Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Facultad de Ciencias
Licenciatura en Matemática Educativa

Problemario

Resolución de problemas de Cálculo Diferencial

mediante Mapas Conceptuales Híbridos

Autores

Dr. Nehemías Moreno Martínez
Laura A. Ramírez Elías
Nahomy I. Torres Valenzuela

Octubre de 2019

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El presente material didáctico pretende ser una ayuda para los alumnos en el estudio de algunos contenidos que se abordan en el curso de Cálculo Diferencial que se imparte en la Licenciatura en Matemática Educativa (LME). El material se apoya en dos técnicas de representación del conocimiento, la técnica del Mapa Conceptual (MC), que permite representar de manera jerárquica y ordenada los conceptos matemáticos, y la técnica del Mapa Conceptual Híbrido (MCH), que permite representar la organización de los distintos objetos matemáticos (lenguaje, conceptos, propiedades, procedimiento y argumentos) que participan en la resolución de un problema matemático.

El empleo de las técnicas del MC y del MCH tiene como objetivo proporcionar un recurso distinto a los que se manejan de manera tradicional en los cursos de Cálculo. Mediante las técnicas también se pretende familiarizar a los estudiantes de la LME en la interpretación y el manejo del MC y del MCH con objeto de que los puedan aplicar en su práctica docente en la enseñanza de las matemáticas en el nivel medio superior y superior.

Algunos problemas que se presentan en este material han sido estudiados por algunos profesores que han impartido la asignatura de Cálculo en la LME, los cuales han sido recuperados a partir de las notas de clase de algunos alumnos. Otros problemas que se consideran en el material han sido seleccionados de algunos libros de texto y han sido considerados generales o representativos de cierto conjunto de problemas, de tal manera que sus resoluciones representadas mediante el MCH pudiesen funcionar como guías para aquellos alumnos que deseen ejercitarse a través de la resolución de otros problemas similares. En algunas secciones se incluyen ejercicios para poner en práctica los conocimientos adquiridos.

Cada MCH que se presenta brinda las herramientas necesarias para comprender cómo se organizan los conceptos, las propiedades, el procedimiento y los argumentos empleados en la resolución de cada problema. Cabe destacar que el MCH también muestra los conocimientos previos que se requieren utilizar para la resolución de los problemas.

El material se divide en cuatro capítulos, los cuales buscan coadyuvar a la realización de los objetivos del curso, es decir, *lograr que el alumno sea capaz de utilizar los conceptos básicos del Cálculo Diferencial en el planteamiento, razonamiento y solución de problemas* *de matemáticas, física e ingeniería*. En el capítulo 1 se describen las técnicas del MC y del MCH. Se describe la interpretación del MCH desde una teoría de la Matemática Educativa, el Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007) y también se explica cómo elaborar dichos esquemas.

En el capítulo 2 se aborda el tema de las funciones, la gráfica, el dominio, el rango, las desigualdades y operaciones con las funciones. En el capítulo 3 se estudia el tema de la derivada, las reglas de derivación, la diferenciación implícita, así como las derivadas de las funciones trigonométricas, logarítmicas y de sus inversas.

En el capítulo 4 se presentan algunas aplicaciones de la derivada a través de la resolución de problemas que involucran situaciones físicas, geométricas y de optimización, y también se abordan las derivadas que implican el uso de las reglas de L'hopital.

Capítulo 1

DOS TÉCNICAS DE REPRESENTACIÓN

Objetivo: *Conocer las técnicas del Mapa Conceptual y del Mapa Conceptual Híbrido para describir la resolución de problemas matemáticos.*

1.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describen las técnicas del Mapa Conceptual (MC) y el Mapa Conceptual Híbrido (MCH) que permiten representar la organización conceptual del contenido de Cálculo, para el caso del MC, y los procesos de resolución de los problemas, para el caso del MCH. Se presenta la interpretación del MCH desde una teoría de la Matemática Educativa, el Enfoque Ontosemiótico (EOS) y también se explica la manera en que el MCH puede ser elaborado. Mediante este capítulo se pretende familiarizar al lector con la técnica del MCH y con la elaboración de estos esquemas para el aprendizaje o la enseñanza de contenidos matemáticos, en particular de Cálculo diferencial.

1.2 EL MAPA CONCEPTUAL

El MC es una técnica de representación útil para ayudar al aprendizaje de teoría científicas, para la comunicación de conocimiento científico, como técnica de enseñanza, para organizar la información, entre otras aplicaciones.

En su aspecto visual, el MC se parece a otras formas de representación gráfica tales como las redes semánticas, los mapas mentales, los cuadros sinópticos, los diagramas de flujo, entre otras, sin embargo, existen importantes diferencias entre el MC y dichas técnicas, una de ellas es la teoría cognitiva y educativa que la sustenta al MC (Aguilar, 2006), a saber, la Teoría del Aprendizaje Significativo.

La tesis principal de la Teoría del Aprendizaje Significativo señala que el conocimiento nuevo debe relacionarse de una manera no arbitraria o significativa con lo que el estudiante ya sabe y, en el caso de que la relación sea arbitraria, el alumno solo memorizará o archivará en su memoria el conocimiento nuevo sin dotarlo de significado. La relación significativa entre el conocimiento nuevo y el conocimiento que ya posee el estudiante se manifiesta a través de las conexiones jerárquicas de los conceptos. Sin embargo, es posible elaborar un MC con un total desconocimiento de la teoría de aprendizaje que lo sustenta, pues el proceso de elaboración es muy intuitivo.

El MC presenta una red de conceptos ordenados de manera jerárquica en donde los conceptos más generales ocupan los lugares superiores y al descender por la red se encuentran conceptos cada vez menos generales o más específicos. El MC puede ser elaborado a partir de un texto, a partir de las notas de clase, es empleado para representar los conocimientos de las personas respecto a cierto tema y también para representar conocimientos y teorías (Aguilar 2006).

Una manera de entender qué es un MC, los elementos que lo conforman y la manera en que se realiza su lectura es a través de un ejemplo, en la figura 1 se presenta un MC de los números reales. Los conceptos se presentan en recuadros y numerados para facilitar su descripción, además, los conceptos se encuentran unidos mediante palabras enlace, por ejemplo, entre (11) y (12) se encuentra la palabra enlace "ejemplos".

En la figura 1, el MC inicia en (1) el cual es el tema o foco que se describe a través de la red de conceptos. Los conceptos (2) y (11) en la parte superior son más generales que los conceptos (6), (8) y (9) en la parte inferior y, también, (7) menos general que (6) pues son ejemplos concretos.

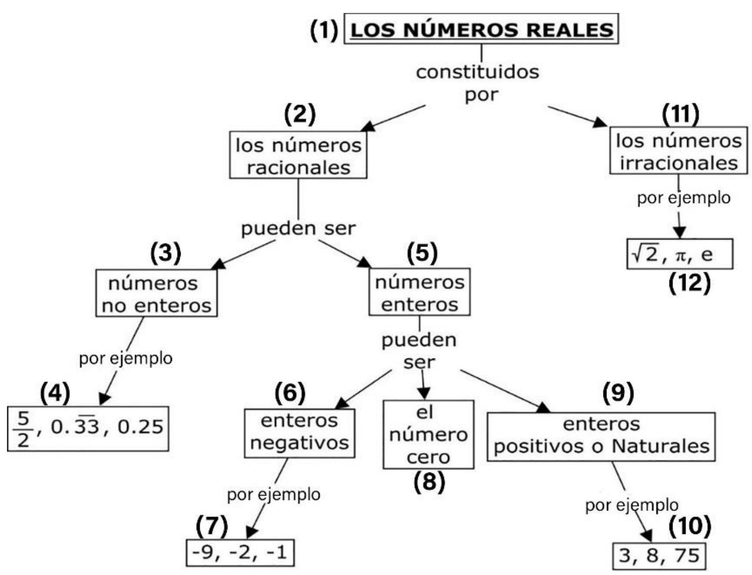


Figura 1. MC que describe los números reales

La lectura del MC parte del concepto de mayor jerarquía y continúa hacia abajo en la dirección en la que indiquen las flechas. La lectura del MC produce proposiciones o enunciados. De esta manera, la ruta de lectura indicada por (2)-(3) se lee “los números racionales pueden ser números no enteros”. Otra ruta de lectura puede ser (5)-(6)-(7) que se lee “números enteros pueden ser enteros negativos, por ejemplo -9,-2,-1”. En general, existen múltiples rutas de lectura en un MC.

En la clase de cálculo, el MC puede presentarse en plenaria como organizador de conceptos, por ejemplo, en la figura 2 se presenta un MC que describe los tipos de funciones el cual podría ayudar a los alumnos a lograr una mejor comprensión de dicho contenido.

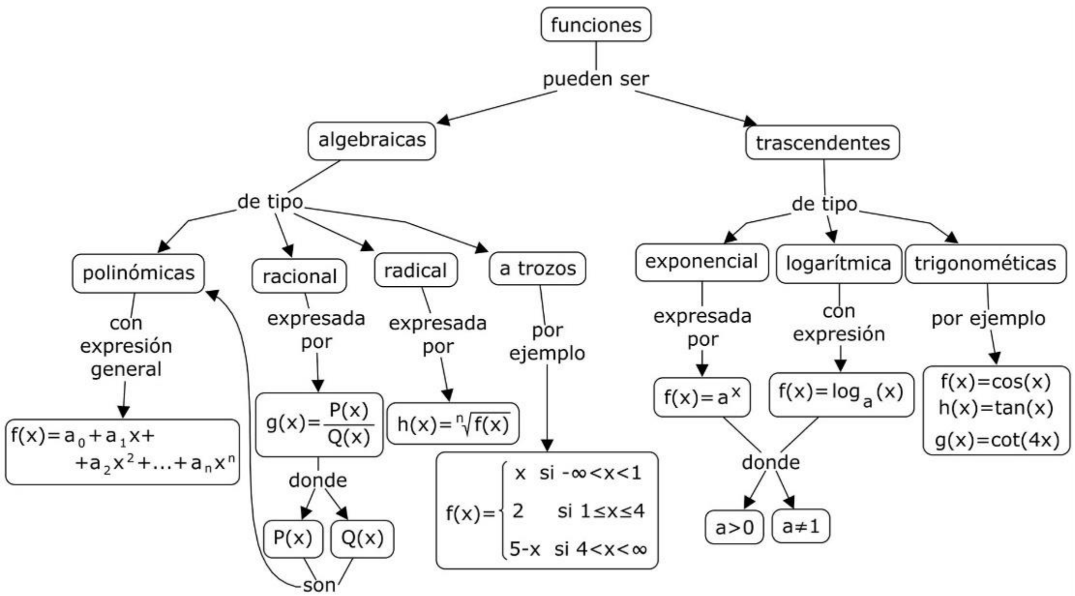


Figura 2. MC sobre tipos de funciones

Para un tema o foco específico no existe un MC único, pues se pueden obtener diferentes MC según lo que se desee mostrar, es decir, los conceptos que se integren al MC tienen que ver con lo que el profesor desee presentar o estudiar con sus alumnos en clase. Por ejemplo, en el MC de la figura 2, se prescindió del concepto de función inversa, de los conceptos de dominio y rango de las funciones, también no se consideró si las funciones son implícitas o explícitas, entre otros aspectos.

La elaboración del MC, por un lado, le sirve de guía al profesor en la enseñanza de las matemáticas al iniciar el estudio de algún contenido matemático, ya que las representaciones gráficas e imágenes permiten a los alumnos tener acceso a los elementos conceptuales del conocimiento matemático, lo cual genera una atmósfera que propicia las actividades mentales (Pérez, 2006). En Cañas y Novak (2009) se describe el procedimiento para la elaboración del MC, así como algunas actividades para su elaboración en distintos niveles educativos.

Ejercicio. Elaborar un MC similar al de la figura 2 pero que describa a las distintas funciones trigonométricas, incluyendo el período, dominio y rango de cada una.

1.3 EL MAPA CONCEPTUAL HÍBRIDO

El MCH es una técnica de representación que resulta al combinar dos técnicas, el MC y la técnica del Diagrama de Flujo. La combinación de ambas técnicas permite tomar en cuenta los aspectos conceptuales y procedimentales que participan en la resolución de los problemas matemáticos.

En la figura 3 se presenta un ejemplo de un diagrama de flujo el cual describe el proceso general de resolución de una ecuación cuadrática "$ax^2 + bx + c = 0$".

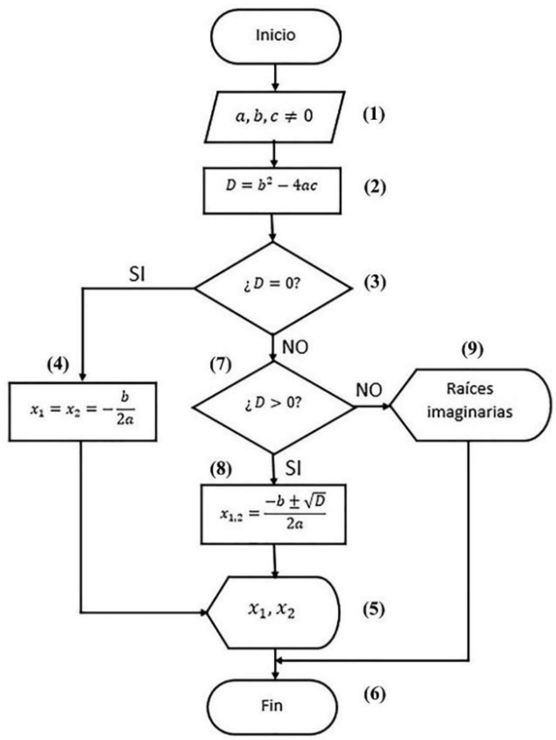


Figura 3. Diagrama de flujo que representa el proceso de resolución de una ecuación cuadrática.

El proceso de la figura 3 admite la entrada de los valores o coeficientes "a", "b" y "c" en (1), los cuales pasan por un primer proceso en (2) que permite obtener el resultado "D". Este valor se somete a una toma de decisión en (3) para la realización de un segundo proceso, el cual sigue la ruta (4) en el caso de obtener "$D = 0$" y finalmente terminar el proceso de resolución de la ecuación mediante (5)-(6), o bien, la ruta hacia (7) en el caso contrario donde "D" puede ser positivo o negativo, lo cual lleva hacia (8) y luego a (5)-(6) o hacia (9) y luego (6) respectivamente.

Como se observa en la figura 3, el diagrama de flujo emplea diversos símbolos que denotan las etapas del proceso (datos de entrada, decisión, procesamiento, finalización, entre otros), sin embargo, a diferencia del MC, el Diagrama de Flujo prescinde de los aspectos conceptuales o argumentativos asociados.

En la actividad matemática no solo interesa el procesamiento o el tratamiento matemático, sino que también interesa el manejo de conceptos, las propiedades y la argumentación, de tal manera que el Diagrama de Flujo describe parcialmente la actividad matemática, de hecho, solo la componente algorítmica de la actividad matemática.

Por otro lado, como se ha visto en la sección 1.2 el MC describe la organización conceptual y, a través de las diferentes rutas de lectura, también permite mostrar proposiciones que pueden ser tanto argumentos o propiedades de los conceptos, sin embargo, el MC no permite describir el tratamiento matemático. En este sentido, se puede decir que las técnicas del MC y del Diagrama de Flujo son incapaces de describir gráficamente la actividad matemática por si solas, sin embargo, su combinación a través del MCH permite integrar ambos dominios, el conceptual y el procedimental.

En la figura 4 se presenta el MCH que describe el sistema de prácticas implicado en la resolución del problema de calcular la derivada de una función cociente mediante la regla general. Como puede observarse en la figura, el MCH no solo presenta el procedimiento matemático, también muestra los conceptos, las propiedades y los argumentos que justifican el procedimiento empleado.

El MCH de la figura 4 presenta en (1) el problema, en (A), (B), (C) y (D) las prácticas, entendidas como todo lo que se tiene que hacer para resolver el problema. En la práctica A, las rutas (A)-(1)-(2)-(3) y (4)-(5)-(6)-(8) representan los argumentos "*sustituir incrementos en la forma Δy en la función y*" y "*obtener nuevos valores de las funciones, es decir $u + \Delta u$ que permite escribir $y + \Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$*" respectivamente. Por otro lado, las rutas (9)-(10)-(11)-(12) en la práctica B y (13)-(14)-(15)-(16) en la práctica C representan los procedimientos realizados. En relación con este último procedimiento, el argumento (15)-(16)-(17)-(18) permite justificar la eliminación del término “$v\Delta v$” en (14).

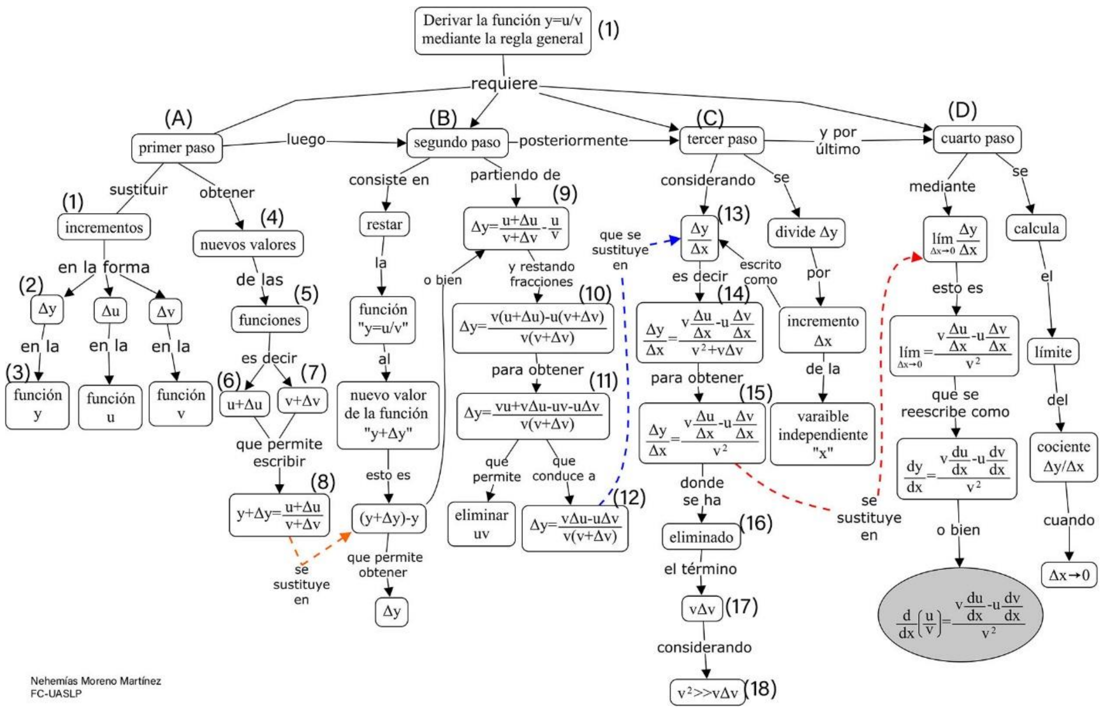


Figura 4. MCH horizontal que describe la derivada de una función compuesta.

El MCH se puede elaborar se manera horizontal o vertical, por ejemplo, el MCH de la figura 4 es horizontal, ya que despliega las prácticas horizontalmente de izquierda a derecha.

Por otro lado, la figura 5 ilustra un MCH de tipo vertical, el cual describe el sistema de prácticas implicado en la resolución del problema que consiste en encontrar la derivada de una función cuadrática mediante la regla general de cuatro pasos. Las prácticas se despliegan verticalmente, mientras que los conceptos, argumentos, propiedades y procedimiento correspondientes a cada práctica se despliegan hacia la derecha horizontalmente. Ambos tipos de MCH, horizontal y vertical, son equivalentes y permiten representar tanto aspectos conceptuales como procedimentales.

Por otra parte, en relación con los aspectos técnicos de construcción del MCH, una manera de elaborar el MCH puede ser a través del empleo del software *CmapTools* (https://cmaptools.uptodown.com/windows). Sin embargo, conviene señalar que debido a que el software fue desarrollado para la elaboración del MC es posible que el usuario se enfrente a ciertas dificultades al tratar de elaborar un MCH debido al empleo de fórmulas matemáticas. Por ejemplo, una de las dificultades es que en una misma “caja” no es posible presentar el nombre de un concepto y una fórmula matemática correspondiente, pues el programa descompone la estructura de los elementos de la caja. Sin embargo, es posible superar esta dificultad mediante un sencillo truco que consiste en superponer dos cajas transparentes, una caja con el nombre del concepto y la otra caja, sin borde, exclusivamente con la fórmula matemática.

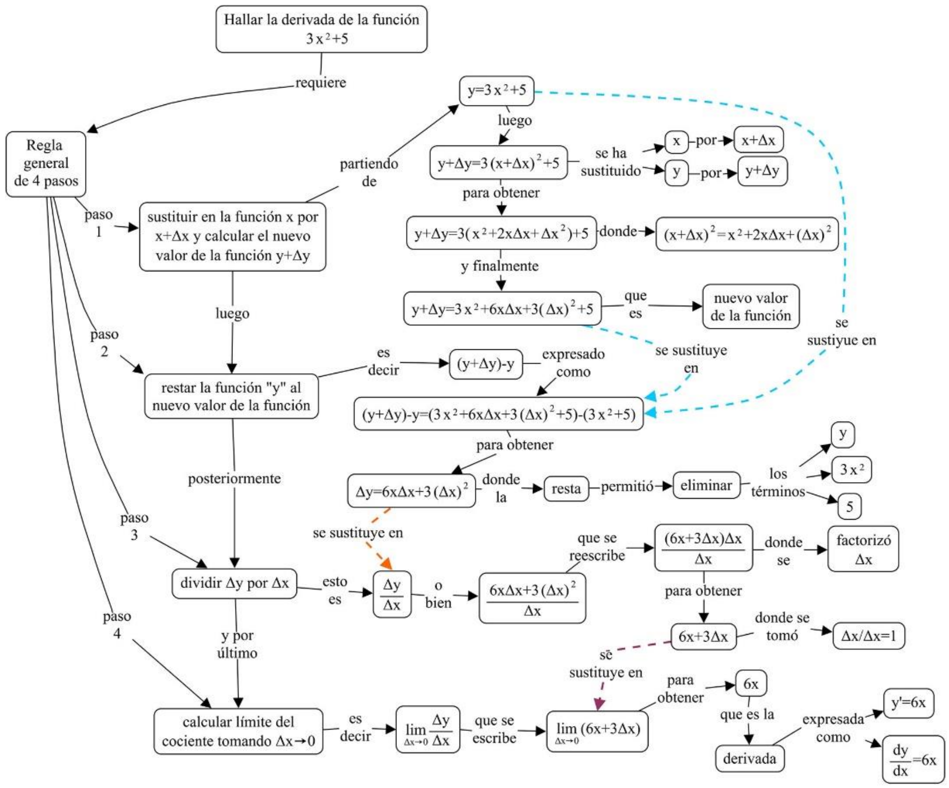


Figura 5. MCH que describe la derivada de una función cociente

Al igual que con el MC, en el MCH es posible separar la técnica de la teoría que lo sustenta, es decir, es posible elaborar un MCH con el total desconocimiento de la teoría que permite la interpretación del mapa, pues la elaboración del MCH también es muy intuitivo. En la siguiente sección se describirá la interpretación del MCH desde una teoría de Matemática Educativa, el Enfoque Ontosemiótico.

1.4 INTERPRETACIÓN DEL MAPA CONCEPTUAL HÍBRIDO DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

La técnica del MCH tiene sustento en algunos elementos de la teoría del Enfoque Ontosemiótico, EOS (Godino, Batanero y Font, 2019), de la Matemática Educativa. Estos elementos son: objetos matemáticos primarios, prácticas, sistema de prácticas, función semiótica y la perspectiva dual cognitiva/epistémica, los cuales se describen a continuación.

Desde la perspectiva del EOS, cuando un sujeto, docente (experto) o estudiante (inexperto), resuelve una situación-problema "P", éste lo descompone en problemas parciales o problemas menores "P_1, P_2, P_3,…". En la resolución de cada uno de estos problemas, el sujeto lleva a cabo una *práctica matemática*, entendida como tolo lo que hace para resolver el problema, en la que organiza un conjunto de objetos matemáticos primarios. Las prácticas, que resuelven cada problema parcial, se organizan y se conectan entre sí para formar el llamado *sistema de prácticas* que permite resolver el problema inicial o mayor "P".

Los objetos matemáticos primarios son:

(i) *Lenguaje*. Se refiere a los símbolos, las expresiones algebraicas, las gráficas y otras representaciones, que el sujeto emplea en la resolución del problema.

(ii) *Conceptos*. Son introducidos mediante definiciones o descripciones, por ejemplo, conceptos tales como el de número, recta, función, dominio, etc.

(iii) *Propiedades*. Se trata de enunciados que señalan atributos sobre los conceptos, por ejemplo, el teorema de Pitágoras o el teorema del valor medio para integrales.

(iv) *Procedimiento*. Considera el tratamiento matemático, operaciones o técnicas de cálculo.

(v) *Argumentos*. Enunciados empleados para justificar o validar el procedimiento empleado.

Según el EOS entre los objetos matemáticos primarios es posible establecer relaciones de significación, y dicha significación puede ser descrita mediante el constructo de *función semiótica*. En analogía con la noción de función en matemáticas, la cual relaciona un conjunto dominio con otro conjunto contradominio (rango) a través de cierta regla, la función semiótica establece una significación al relacionar un objeto matemático primario (dominio o significado) con otro objeto matemático primario (contradominio o significante). Por ejemplo, el símbolo "m" (lenguaje) es el significante que tiene como significado el concepto "pendiente", así mismo, el concepto "linealidad" puede ser un significante y tener como significado el objeto primario propiedad a través de "$T(a+b) = T(a) + T(b)$ y $T(\alpha a) = \alpha T(a)$".

Por otro lado, la *perspectiva dual cognitiva/epistémica* permite considerar por un lado la producción que realiza un sujeto al resolver un problema matemático. Por producción se hace referencia a todos los objetos matemáticos primarios, significados, prácticas y sistemas de prácticas implicados en la resolución del problema. De manera que cuando la producción la realiza un sujeto inexperto (estudiante) se dice que ésta es de tipo *cognitiva,* mientras que si la realiza un experto (docente o investigador) se llama *epistémica*. En este sentido, el MCH va a ser de tipo cognitivo o epistémico según si éste fue elaborado a partir de la producción de un estudiante o profesor respectivamente.

Desde la perspectiva del EOS, el sistema de prácticas puede ser representado esquemáticamente o graficamente mediante el MCH (Moreno, 2017). Para ejemplificar cómo el MCH permite representar esquemáticamente el sistema de prácticas implicado en la resolución de un problema matemático, a continuación, se presenta un ejemplo de aritmética en el que se aborda una *situación-problema* de suma de fracciones.

Ejemplo 1. Simplificar la siguiente suma de fracciones $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{2}{5}$

La figura 6 muestra el MCH de tipo epistémico (solución experta) en el que se ha numerado del (1) al (21) los distintos objetos matemáticos primarios implicados en la resolución del problema. Dicha numeración es empleada como etiqueta para poder referirse a los objetos, de hecho, también se pueden emplear símbolos romanos o letras mayúsculas combinadas con números para etiquetar a los objetos.

El MCH se expresa a través del objeto primario *lenguaje* mediante símbolos, palabras, expresiones algebraicas que aluden a conceptos, propiedades, procedimiento y argumentos. Por ejemplo, en la práctica interpretativa (3) se emplean los *conceptos* (4) "suma y resta de fracciones”, (5) “resultado”, (6) “mínima expresión” u (8) “factores primos”; en la tercera práctica (15) se emplea el concepto “mínima expresión” en (21).

En la segunda práctica (9), de tipo operativa, se emplea la *propiedad* (11) representada mediante la expresión “$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$” y en la tercera práctica (15) se emplea la propiedad (17) mediante la expresión “$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$”. Así mismo, la práctica (9) se lleva a cabo el *procedimiento* representado mediante la ruta (10)-(12)-(13)-(14) y en la práctica (15) se realiza el procedimiento (16)-(18)-(19)-(20), figura 6.

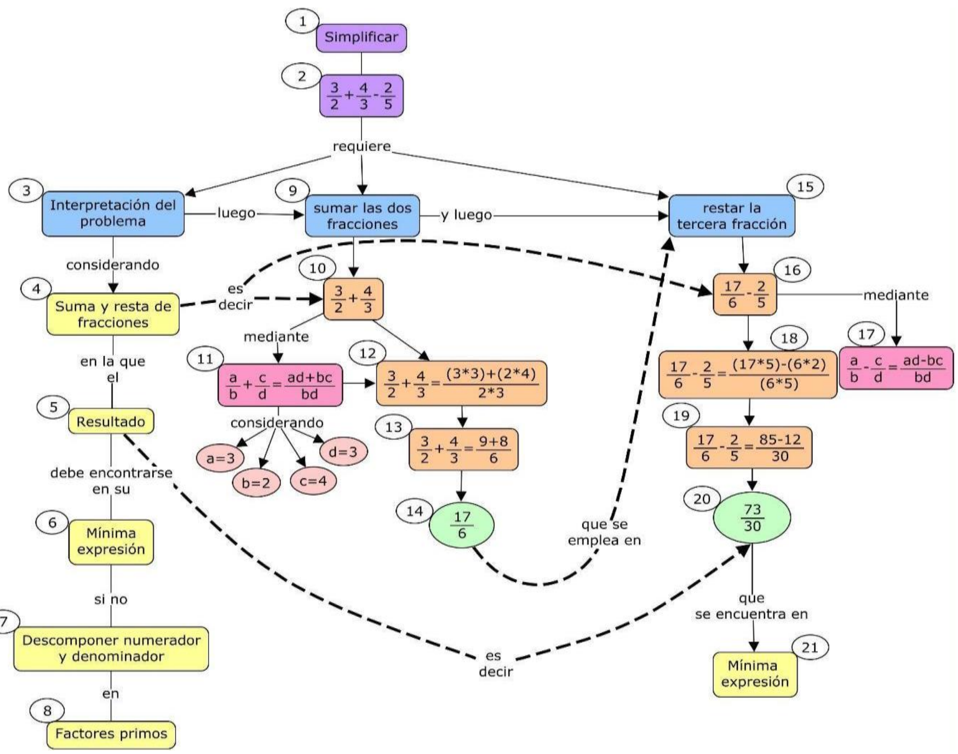


Figura 6. MCH epistémico que representa la resolución de un problema de suma de fracciones.

En el MCH la conexión entre los conceptos conforma *argumentos* que ayudan a justificar la resolución del problema. Un ejemplo de conexión que da lugar a un argumento se observa en la primera práctica (3) mediante la ruta (4)-(5)-(6) que se lee “suma y resta de fracciones en la que el resultado debe encontrarse en su mínima expresión”, figura 6.

En general, el MCH se puede leer mediante las distintas rutas de lectura que lo conforman. A continuación, se describen algunas:

- Se inicia con la identificación de lo que pide el problema, lo que incluye, la instrucción y los datos, (1)-(2).
- El problema se descompone en tres prácticas (3), (9) y (15).
- En la práctica (3) se identifican los conceptos a utilizar mediante (4)-(5)-(6)-(7)-(8).
- En la práctica (9), se realiza la suma de fracciones al realizar el tratamiento matemático de los datos iniciales mediante (10)-(12)-(13) considerando la propiedad (11) y, finalmente, se obtiene el resultado (14).
- El resultado (14) de la primera práctica se conecta con la tercera práctica. Se realiza tratamiento matemático mediante (16)-(18)-(19) considerando la propiedad (17), lo cual permite obtener el resultado (20).

La solución de problemas mediante el uso del MCH permite organizar los procedimientos de tal forma que se puedan visualizar los conceptos y las propiedades matemáticas que requiere la resolución del problema.

Cabe agregar que el MCH correspondiente a la producción de un novato o experto, ante la tarea de resolver un problema matemático, no es único. Por ejemplo, para el MCH de la figura 6, otro experto pudo haber empleado en primer lugar la propiedad asociativa y restar "$\frac{2}{5}$" a "$\frac{3}{2}$" y el resultado sumarlo con la fracción "$\frac{4}{3}$".

1.5 ELABORACIÓN DE UN MAPA CONCEPTUAL HÍBRIDO

La elaboración del MCH de tipo epistémico, a ser empleado en la enseñanza de algún contenido de Cálculo diferencial, se apoya en la técnica de reconstrucción del sistema de prácticas implicado en la resolución de un problema matemático, el cual está reportado en el artículo de Moreno, Angulo y Reducindo (2018).

La descripción de la técnica queda fuera del alcance de este trabajo, sin embargo, ésta puede consultarse en Moreno et al (2018). A grandes rasgos, la técnica permite representar aquel conjunto de objetos (prácticas, sistema de prácticas, conceptos, propiedades y argumentos) que fue necesario considerar en la resolución del problema, los cuales solo fueron pensados por el sujeto experto (por ejemplo, el autor de un libro de texto de matemáticas) más no representados sobre el papel. Con el propósito de apoyar el aprendizaje, dichos objetos que no fueron señalados explícitamente son plasmados en el MCH a manera de mostrarle al sujeto que aprende la “historia” completa del proceso de resolución. A continuación, se muestra un ejemplo que ilustra la aplicación de dicha técnica.

Se parte de la producción escrita de un experto, el cual puede ser el apunte que toma un estudiante en la clase o un ejemplo que se presenta en algún libro de texto donde se describa la resolución de un problema matemático. Por ejemplo, en la Figura 2 se ilustra un ejemplo que describe la resolución de un problema que se presenta en un libro de Cálculo (Leithold, 1998, p. 166) que implica el uso de la regla de la cadena para derivar una función cociente.

▶ **EJEMPLO 1** Determine $f'(x)$ mediante la regla de la cadena si

$$f(x) = \frac{1}{4x^3 + 5x^2 - 7x + 8}$$

Solución Se escribe $f(x) = (4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-1}$ y se aplica la regla de la cadena para obtener

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-2} \cdot D_x(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8) \\ &= -1(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-2}(12x^2 + 10x - 7) \\ &= \frac{-12x^2 - 10x + 7}{(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^2} \end{aligned}$$ ◀

Figura 7. Problema resuelto sobre la aplicación de la regla de la cadena de derivación (Leithold, 1998, p. 166).

La producción del experto o del autor del libro en la figura 7 no presenta de manera explícita la argumentación, los conceptos y las propiedades empleadas en la resolución del problema. Sin embargo, mediante el MCH es posible intuir y representar esquemáticamente el sistema de prácticas realizado por el autor, ver figura 8.

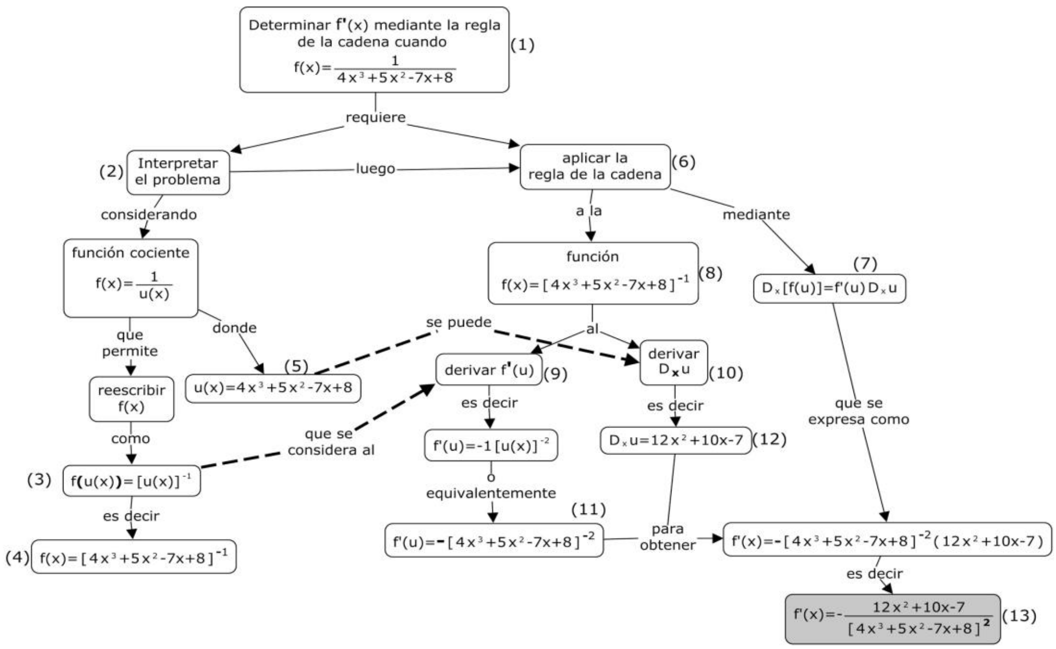


Figura 8. MCH correspondiente a la producción que presenta Leithold (1998).

En el MCH se observa el planteamiento del problema en (1), el cual se resuelve mediante la realización de dos prácticas, (2) y (6). Mediante la práctica (2) se interpreta el problema al reconocer que se trata de una función cociente, posteriormente, se realiza un cambio de variable (5) para luego expresar la función a ser derivada mediante (4).

Mediante la práctica (6) se aplica la regla de la cadena (7) y se calculan por separado los elementos que componen la regla (9) y (10) para obtener (11) y (12) respectivamente. Por último, se obtiene que la derivada está expresada mediante (13).

La reconstrucción del sistema de prácticas implicó la consideración de la práctica (2) y las conexiones con la práctica (6), a través de líneas segmentadas. Lo anterior, permite entender cuáles fueron los conceptos, propiedades y argumentos que se pusieron en juego en la resolución del problema.

En los problemas resueltos que se describen en los siguientes capítulos se ha empleado la misma técnica de reconstrucción para elaborar los MCH epistémicos correspondientes. Los problemas provienen de los apuntes que fueron tomados por algunos estudiantes de la LME en cursos pasados de Cálculo diferencial y otros problemas provienen de ejemplos resueltos de algunos libros de texto.

Capítulo 2

LAS FUNCIONES

Objetivo: *Conocer el concepto de función, su representación gráfica, sus propiedades y operaciones.*

2.1 GRAFICAS DE ECUACIONES Y FUNCIONES

En los libros de cálculo diferencial se presentan diversas definiciones acerca de lo que son las gráficas de las funciones, sin embargo, presentan elementos comunes. Por ejemplo, en el libro Apostol (1999) se señala que en las *funciones de variable real* o *funciones reales* se representa el dominio X en el eje "x", y a partir de cada punto "x" de X se representa el punto (x, y) donde $y = f(x)$, y a la totalidad de puntos (x, y) se denomina la *gráfica de la función*.

También es posible encontrar definiciones que lucen más formales como por ejemplo "*Si f es una función, entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x,y) del plano* R^2 *para los cuales (x,y) es un par ordenado de f*". De esta definición, se puede deducir que la gráfica de una función *f* es la misma que la gráfica de la ecuación y=*f(x)*.

En la figura 9 se presenta un MC que describe la gráfica de una función y también presenta ejemplos de las gráficas de algunas funciones. En el libro de Granville (2009) se señala que la función cuadrática "$y = x^2$", ver (1) en la figura 9, da un valor de "y" para cada valor de "x", o bien, se dice que *define unívocamente a "y"* para todos los valores de la variable independiente "x". El lugar geométrico definido por dicha función es una parábola y se llama *gráfica* de la función "$f(x) = x^2$", así mismo, de manera intuitiva, si "x" varía continuamente entonces "y" variará continuamente, en este caso se dice que la función es continua para todos los valores "x".

Esta misma propiedad ocurre también en el caso de la función identidad $f(x) = x$ y la función valor absoluto $f(x) = |x|$, ver la figura 9. Respecto a esta última, la función es continua pero no es diferenciable no tiene derivada en $x = 0$.

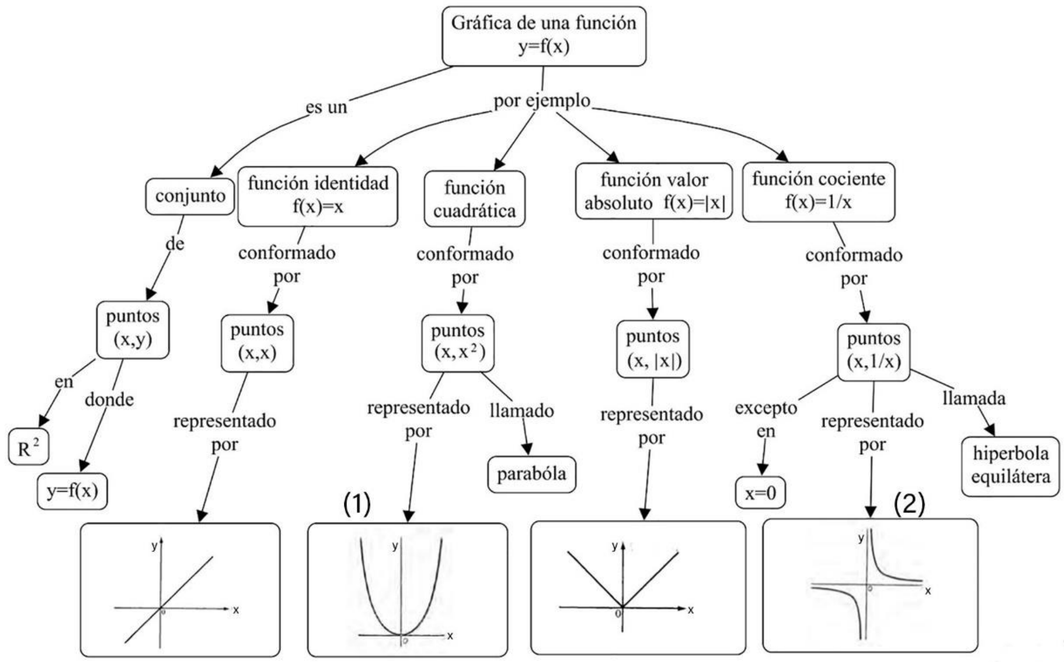


Figura 9. MC sobre la gráfica de una función

Por otra parte, Granville (2009) también analiza el caso de la función $f(x) = 1/x$, ver (2) en la figura 9, y señala que ésta da un valor de "y" para cada valor de "x" con excepción de "$x = 0$" y advierte que para $x = 0$ la función *no está definida*. En este caso se dice que la función es continua para todos los valores de "x" con excepción de $x = 0$, pues no existe en la gráfica un punto correspondiente a $x = 0$.

A partir de una gráfica es posible conocer si ésta corresponde o no a una función, para esto hay que tomar en cuenta que *en una función existe un solo valor de la variable dependiente para cada valor de la variable independiente en el dominio de la función*. Como un criterio geométrico esto significa que *una recta vertical intersecta la gráfica de una función a lo más en un punto.*

En la figura 10 se presenta la aplicación del criterio de la línea vertical, el cual permite identificar si una gráfica corresponde o no a la gráfica de una función. En la figura 10(a) se observa que la recta vertical L1 corta a la curva en dos puntos, de manera que existen dos valores en "y" que se corresponden con un valor de "x", por lo que la gráfica no corresponde a una función.

Por otro lado, en la gráfica en la figura 10(b) cualquier recta vertical corta la curva en un solo punto, por ejemplo, las rectas L1 y L2, de manera que la gráfica si corresponde a una función. En la gráfica de la figura 10(c) las rectas L1, L2 y L3 cortan en un solo punto, sin embargo, podría parecer que L2 corta en dos puntos, pero se tiene que cuando $x = 2$ la función toma el valor “1”, lo cual está representado con un punto más remarcado o grueso al final de la recta horizontal.

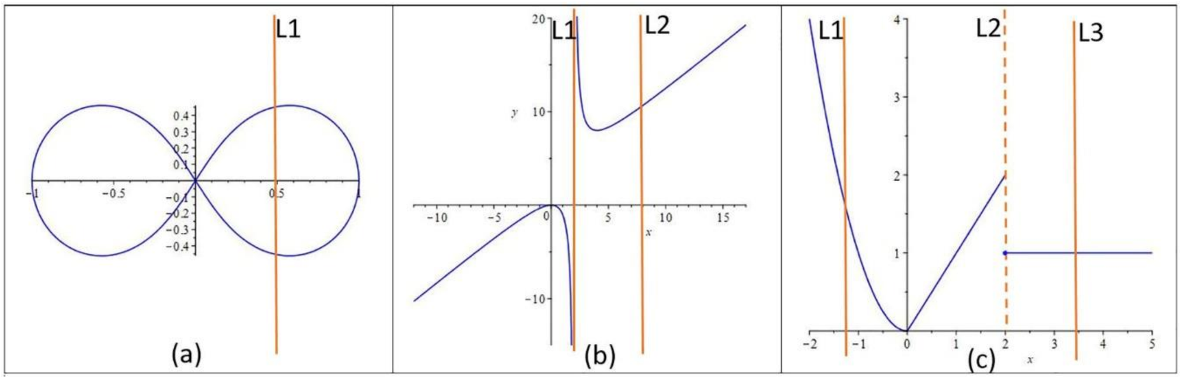


Figura 10. Criterio de la recta vertical para conocer si una gráfica corresponde a una función.

Ejercicio. En la figura 11 se presenta un conjunto de seis gráficas, mediante el criterio de la recta vertical indica cuáles corresponden a gráficas de funciones y justifica tu respuesta

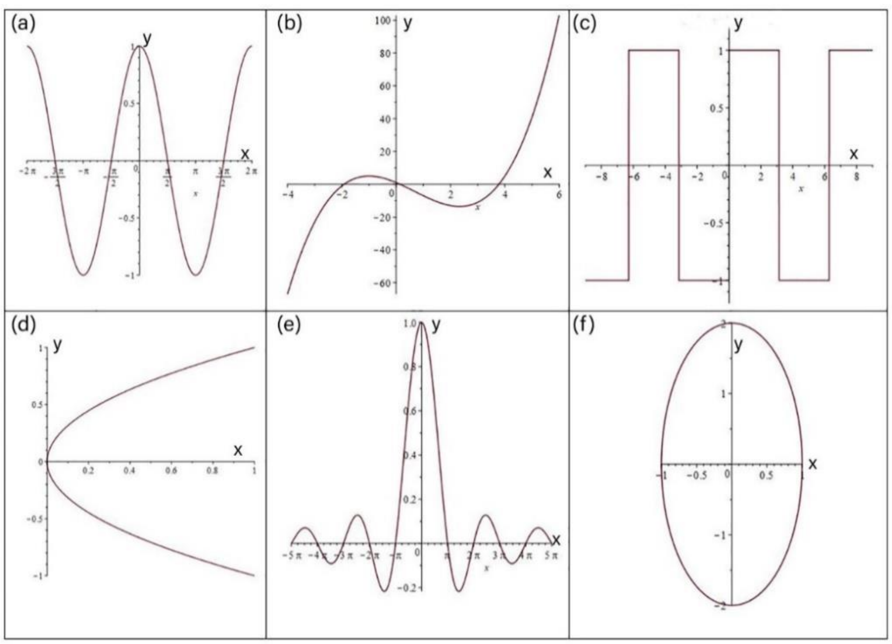


Figura 11

2.2 DOMINIO Y RANGO DE FUNCIONES

De acuerdo con el libro de Apostol (1999), la palabra función fue introducida en las matemáticas por Leibniz, sin embargo, según lo menciona el libro, la manera en que Leibniz interpretaba dicho concepto tenía un alcance muy reducido. Sin embargo, dicho concepto se ha venido generalizando progresivamente de tal manera que en la actualidad se suele definir el concepto de función de la siguiente manera: *Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y, una función es una ley que asocia a cada objeto de X uno y solo un objeto en Y. El conjunto X se denomina el* ***dominio*** *de la función y los objetos Y, asociados con los objetos X forman otro conjunto denominado el* ***recorrido*** *de la función, el cual puede ser todo el conjunto Y pero no necesariamente* (Apostol, 1999, p. 62).

Otra definición equivalente del concepto de función es la siguiente: *Una función es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número. El conjunto de todos los valores admisibles de "x" se denomina* ***dominio*** *de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de "y" recibe el nombre de* ***rango, recorrido*** *o* ***contradominio*** *de la función.*

La definición de función puede ser particularizada y empleada para determinar el dominio y el rango de funciones concretas. Por ejemplo, en el MCH de la figura 13 se muestra un ejemplo donde se determina el dominio y el rango de una función mediante la aplicación de la definición.

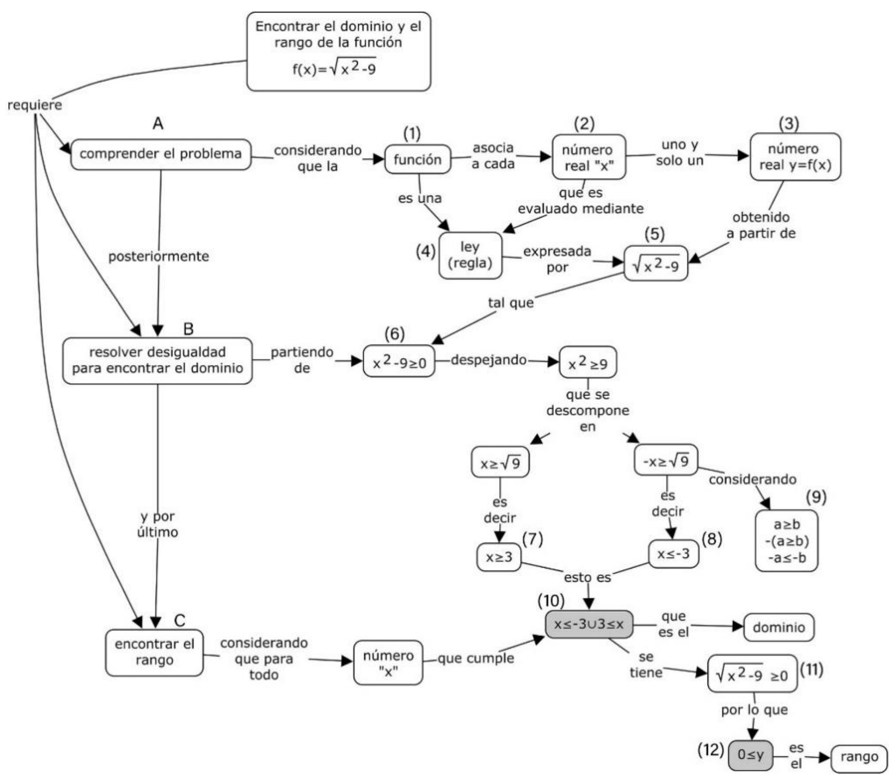


Figura 13. MCH que describe la resolución de un problema de dominio y rango de una función.

Según el MCH de la figura 13, para calcular el dominio y el rango de la función $\sqrt{x^2 - 9}$ primero se requiere realizar la práctica A que consiste en comprender el problema, es decir, apoyado en la definición de función en (1)-(2)-(3)-(4) se lleva a cabo una interpretación de (5). Posteriormente, se realiza la práctica B en la que se resuelve la desigualdad (6) que tiene como solución (7) y (8), es decir, se tiene a (10) como dominio. Por último, mediante la práctica C se identifican los valores de la función que corresponden a los valores del dominio que cumplen con (11) y finalmente se obtiene como rango (12).

Ejercicio. Tomando como guía el MCH de la figura 13, encontrar el dominio y el rango de las funciones (i) $f(x) = \sqrt{x+3}$, (ii) $g(x) = \sqrt{x^3 - 8}$

2.3 CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

En esta sección se describen los tipos de funciones y sus características principales y se resolverán algunos ejemplos de éstos mediante el uso de MCH.

En este material se considera la clasificación de las funciones en dos clases, las funciones algebraicas y las funciones trascendentes. En las primeras se encuentran las funciones polinomiales, racionales, con radical y a trozos, las cuales surgen de la composición de dos o más funciones, mientras que en la segunda clase se encuentran las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. El MC de la figura 14 muestra esta clasificación y también presenta algunos ejemplos concretos

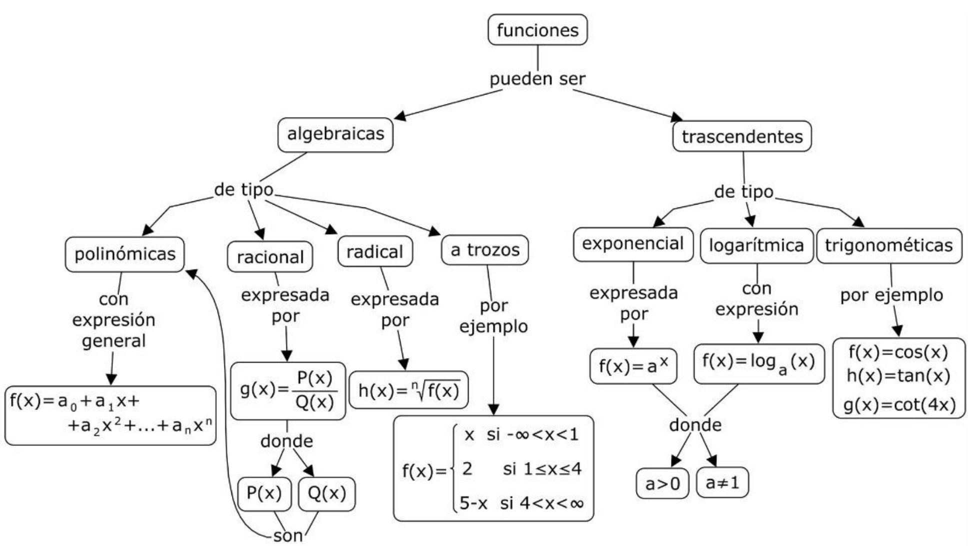


Figura 14. Una clasificación de las funciones de variable real.

Como se muestra en el MC, la expresión general de una función polinomial es $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, donde "$n$" es un número entero no negativo, y $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son constantes, llamadas coeficientes del polinomio. Si el coeficiente principal $a_n \neq 0$, entonces el grado del polinomio es "n". El dominio de una función polinómica es todo el conjunto de los números reales ya que se puede sustituir cualquier valor del dominio en la expresión polinómica y se puede calcular sin ningún problema un elemento correspondiente en la imagen o contradominio. Por otra parte, el rango va a depender del grado de polinomio que se esté tratando.

Cuando $n = 1$ el polinomio es de grado 1 y tiene la forma $P(x) = a_1x + a_0$, o de manera más común $f(x) = mx + b$, por lo que es una función lineal. El dominio y el rango de esta función es el conjunto de los reales.

De la misma manera, un polinomio de grado 2 tiene la forma $g(x) = ax^2 + bx$+c, y se llama función cuadrática; su gráfica siempre es una parábola, en la figura 15 se ilustran ejemplos concretos de las gráficas de dos funciones cuadráticas, nótese que si el primer coeficiente de la función es $a > 0$ la gráfica es cóncava y si el coeficiente es $a < 0$ la gráfica es convexa. El dominio de las funciones cuadráticas es el conjunto de los números reales, sin embargo, el rango va a depender de su concavidad, por ejemplo, en rango de la parábola en la figura 15(a) es $\frac{3}{4} \leq y$ o bien $[\frac{3}{4}, \infty)$, pues tiene vértice en el punto $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, y la parábola de la figura 15(b) tiene contradominio $x \leq \frac{17}{8}$ o bien $(-\infty, \frac{17}{8}]$, pues tiene vértice en $(\frac{3}{4}, \frac{17}{8})$.

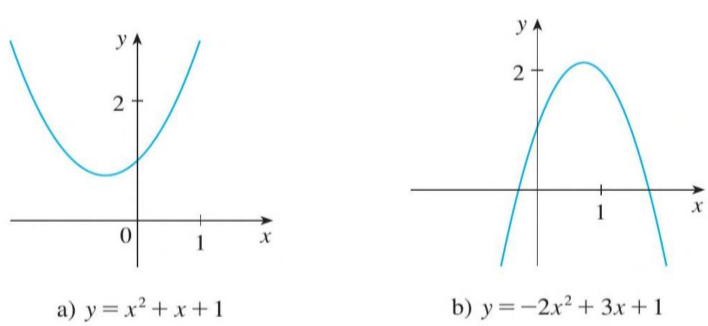
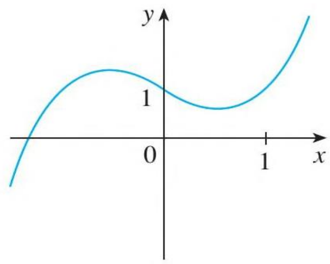


Figura 15. El signo del primer coeficiente de la función cuadrática determina si la gráfica es cóncava o convexa.

Una función polinomial de grado 3 es de la forma $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ y se llama función cúbica. El dominio y el rango de esta función es el conjunto de los números reales. En la figura 16 se ilustra la gráfica de un función cúbica particular.



a) $y = x^3 - x + 1$

Figura 16. Gráfica de una función cúbica.

Dentro de la clase de funciones algebraicas también se tiene a las funciones racionales las cuales pueden definirse a partir del cociente de dos funciones polinomiales: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinomios. El dominio y el rango de estas funciones depende de la existencia de asíntotas horizontales y verticales. Por ejemplo, en la figura 17 se presenta la gráfica de la función $f(x) = \frac{4x^2+4}{2x^2-8}$, la cual tiene como dominio al conjunto de los números reales excepto $x = -2$ y $x = 2$ que son los valores donde el denominador se anula $2x^2 - 8 = 0$ causando que la función no esté definida en esos valores y que se tengan asíntotas verticales, ver rectas L1 y L2 en la figura 17. La función también presenta una asíntota horizontal en $y = 2$, ver L3 en la figura 17, por lo que el rango de la función es todo el conjunto de los números reales excepto dicho valor.

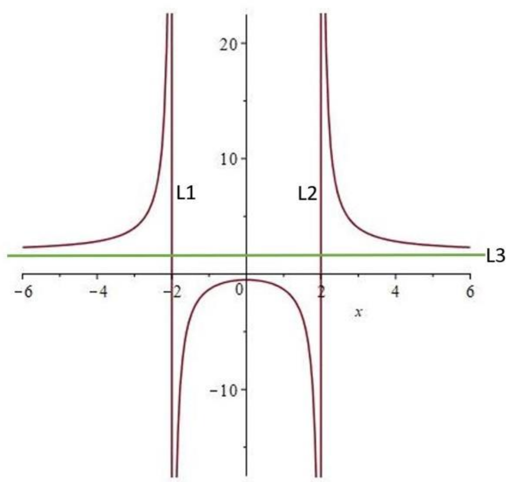


Figura 17. Gráfica de una función cociente.

La función radical o función irracional se tiene cuando la variable independiente se encuentra bajo el signo del radical. En la figura 18 se ilustran las gráficas de cuatro funciones con radical, por ejemplo, la figura 18(a) corresponde a la función $\sqrt{x+2}$ la cual tiene dominio $-2 \leq x$, o bien $[-2, \infty)$, el cual puede deducirse de la condición $x+2 \geq 0$ que cumple el radicando, así mismo, el rango de dicha función es $0 \leq y$ o bien $[0, \infty)$.

Por otra parte, la figura 18(b) corresponde a la función $2+\sqrt{x+2}$ la cual, a partir de la inspección de la gráfica, se puede concluir que tiene dominio $[-2, \infty)$ y rango $[2, \infty)$. Otra manera de calcular el dominio de la función es a través de la condición $x+2 \geq 0$ que debe cumplir el radicando.

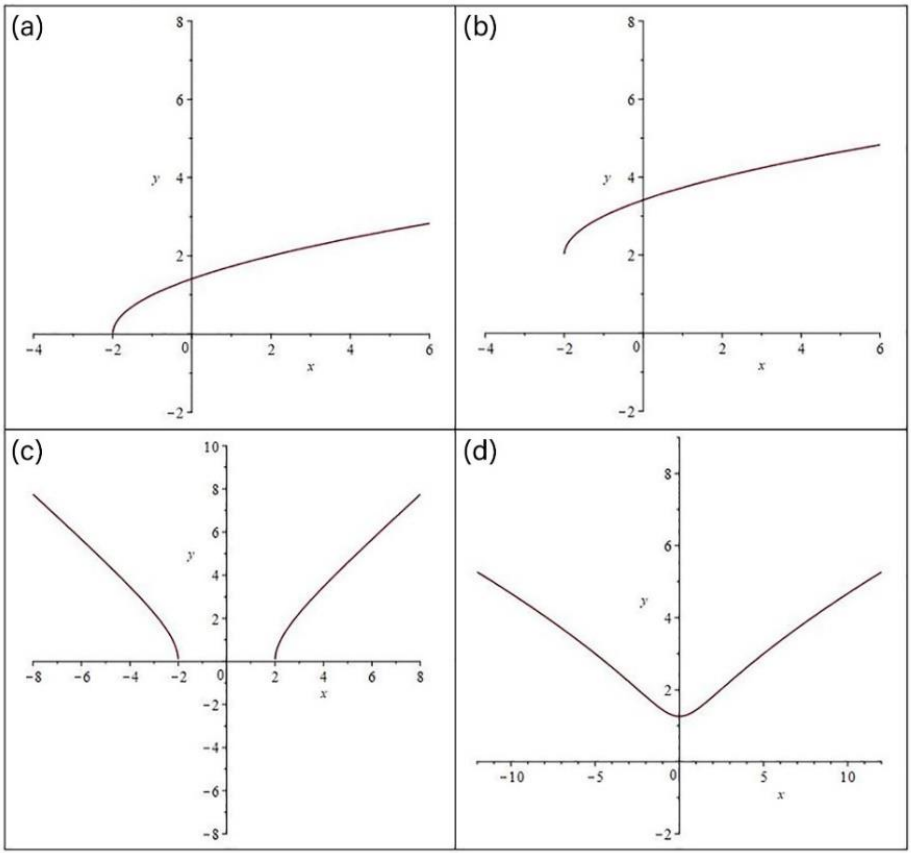


Figura 18. Gráficas de dos funciones con radical.

La gráfica de la figura 18(c) corresponde a la función $\sqrt{x^2-4}$, el dominio y el rango de dicha función puede obtenerse al inspeccionar la gráfica o bien a partir de la condición del radicando $x^2-4 \geq 0$ que tiene como solución $(-\infty,-2] \cup [2 \leq \infty)$ y que se corresponde con el rango $[0, \infty)$.

Por último, la gráfica de la figura 18(d) se corresponde con la función $\sqrt[3]{x^2+2}$, la cual tiene como dominio el conjunto de los reales, pues al sustituir cualquier número éste devuelve siempre valores positivos. Por otro lado, como la gráfica es simétrica respecto al eje vertical y el valor mínimo de la función lo adquiere cuando $x = 0$, por lo que el extremo inferior del rango puede obtenerse al resolver $\sqrt[3]{(0)^2+2} = \sqrt[3]{2}$ y el rango es $[\sqrt[3]{2}, \infty)$.

Las funciones exponenciales son funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva. En la figura 19 se ilustra un MC con algunas propiedades de dicha función.

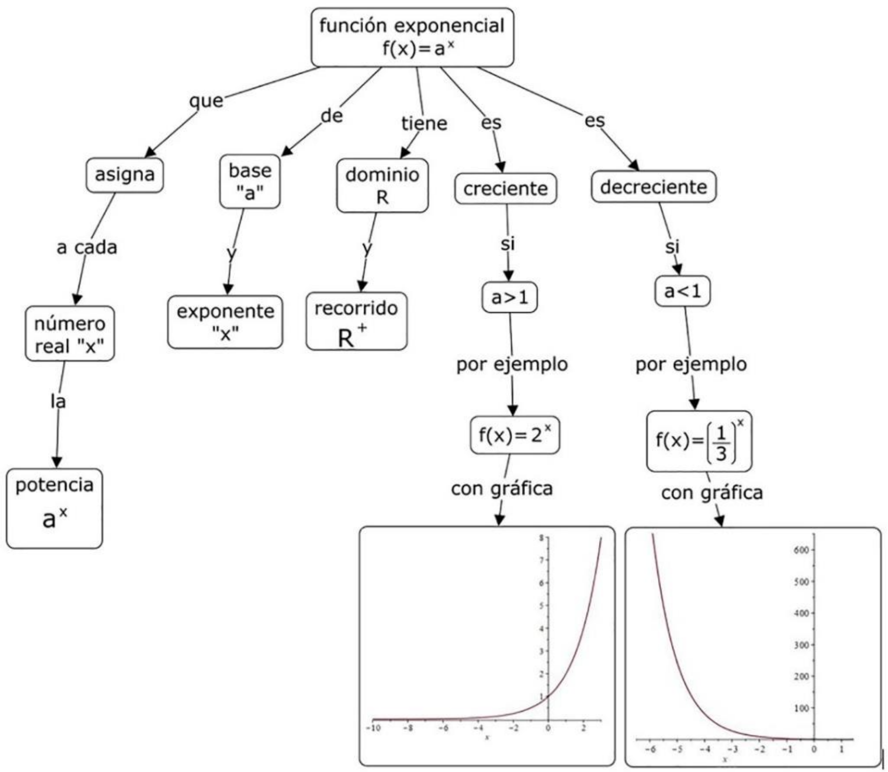


Figura 19. Algunas características de la función exponencial.

La función $f(x) = 2^x$ cuya variable x es el exponente, no debe confundirse con una función potencia, por ejemplo, $g(x) = x^2$ en la que la variable está en la base. La forma más común en Cálculo para denotar la función exponencial es el valor de *a*=*e*, cuyo valor fue denotado por Euler y tiene una aproximación de $e \approx 2.71828$. El número "*e*", al igual que "π" es un *número trascendente* pues no puede expresarse como la raíz de cualquier polinomio con coeficientes enteros. A la función $f(x) = e^x$ se le conoce como *función exponencial natural*.

Por otra parte, las funciones logarítmicas son de la forma $f(x) = log_a(x)$ y tienen como base la constante positiva a, siendo a un real positivo, *a>0* y *a≠1,* éstas son las funciones inversas de las funciones exponenciales. Se llama función logaritmo natural al logaritmo que tiene de base el número *e*, ya mencionado anteriormente, dicha función se escribe como $f(x) = ln(x)$. En la figura 20 se ilustra un MC con algunas propiedades de dicha función.

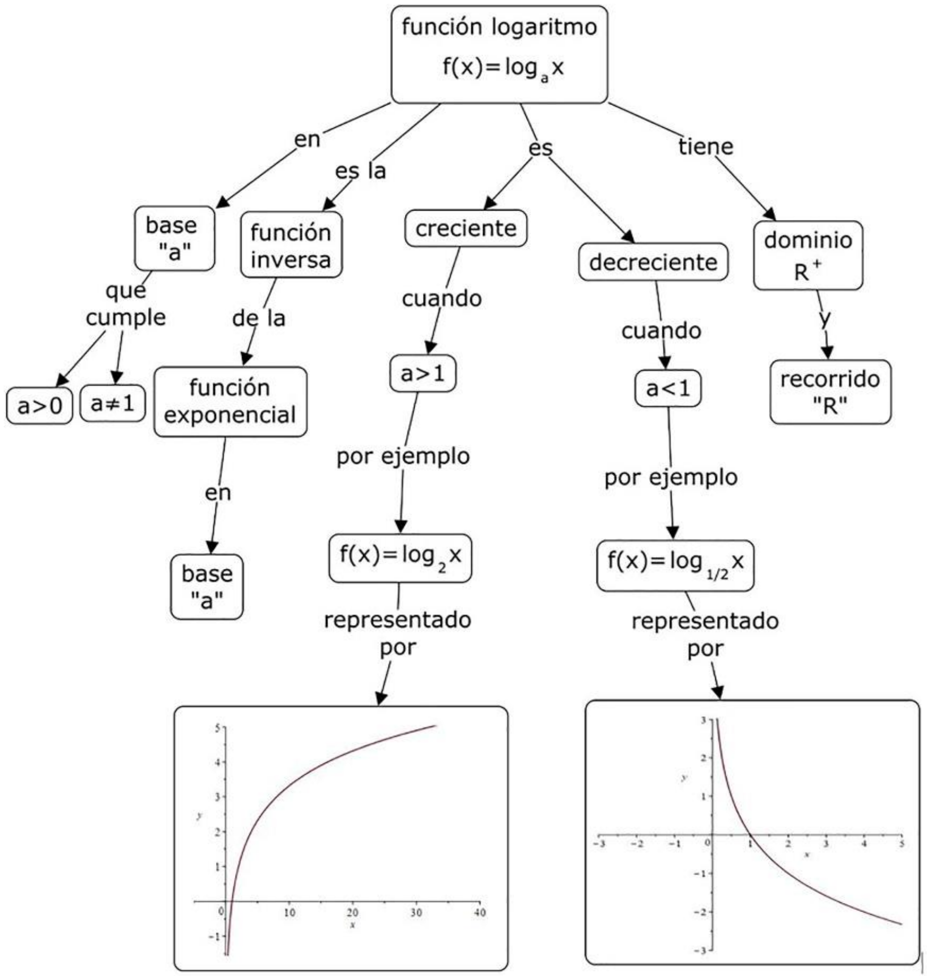


Figura 20. Algunas características de la función logaritmo.

Por último, las funciones trigonométricas asignan a cada número real "x" el valor de la razón trigonométrica del ángulo que tiene como medida en radianes el valor "x". A diferencia de las funciones descritas anteriormente, las funciones trigonométricas son funciones periódicas, ya que repiten el valor de imagen cada 2π radianes ($360°$). La periodicidad de estas funciones permite emplearlas en diversos campos fuera de las matemáticas tales como la física, astronomía, telecomunicaciones, entre otras, con las cuales es posible modelar fenómenos periódicos.

En el MC de la figura 21 se presenta algunas propiedades de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, así como también sus gráficas correspondientes.

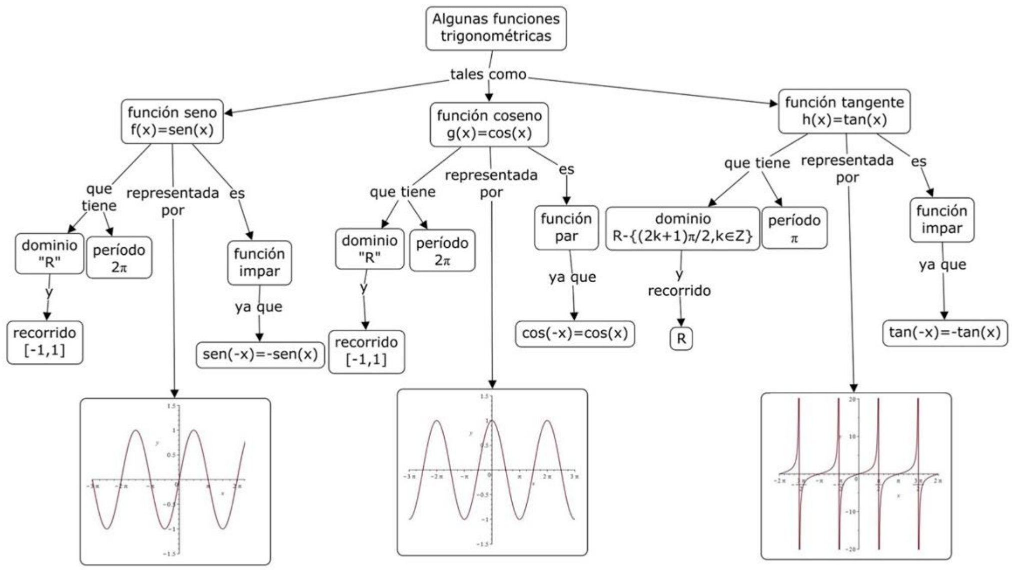


Figura 21. MC de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Ejercicio. Realiza un MC (como el de la figura 21) de las funciones trigonométricas cosecante, secante y cotangente.

2.4 DESIGUALDADES

Las desigualdades son comparaciones entre dos cantidades que no son iguales. Existen cuatro tipos de desigualdad que se simbolizan de la siguiente manera (i) >, que significa *mayor que*; (ii) <, que significa *menor que*; (iii) ≥, que significa *mayor o igual que*, y (iv) ≤, que significa *menor o igual que*.

En Cálculo las desigualdades se pueden utilizar para representar intervalos en la recta numérica. Por ejemplo, $a < b$, el intervalo abierto de "a" a "b" está formado por todos los números entre ellos y se denota como (a, b), que en notación de conjuntos se escribe:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

En los intervalos abiertos, los puntos finales "a" y "b" están excluidos, lo cual se indica con el uso de paréntesis "(…)".

Por otro lado, el intervalo cerrado, denotado mediante $[a, b]$, es el conjunto

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

En los intervalos cerrados, los puntos finales "a" y "b" están incluidos, lo cual se indica con el uso de corchetes "[…]".

También es necesario considerar intervalos como $(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$

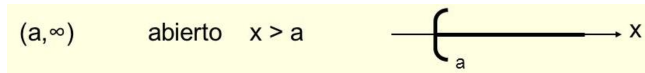


Figura 22. Representación gráfica del intervalo (a, ∞).

Esta notación (a, ∞) representa el conjunto de todos los números que sean mayores que "a", de modo que el símbolo "∞" indica que el intervalo se extiende infinitamente en la dirección positiva, como se puede ver en la figura 22. En caso de que el intervalo se extienda hasta $-\infty$, la notación es $(-\infty, b)$ la cual representa el conjunto de todos los números que sean menores que b, $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$. También existe el caso donde el extremo de la constante sea cerrado por lo que sólo cambiaría la notación, como se puede ver en la figura 23.

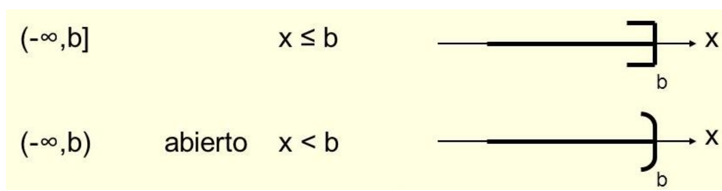


Figura 23. Representación gráfica del intervalo (-∞, b], en la parte superior, en donde el valor de b está incluido en el intervalo. En la parte de abajo se muestra el intervalo (-∞, b), donde el valor de b queda excluido del intervalo.

Las soluciones de desigualdades pueden ser graficadas en una recta numérica que es representada mediante una raya, cuando graficamos una desigualdad con los símbolos "<" y ">", usamos puntos abiertos (intervalos abiertos); y si graficamos con los símbolos " $\geq$ " y " $\leq$ " usamos puntos cerrados (intervalos cerrados).

Para comprender de mejor manera el tema de desigualdad se presenta en un MCH en la figura 24 que ilustra un ejemplo en donde se plantea el problema de representar la desigualdad $0 < x \leq 11$ de manera gráfica.

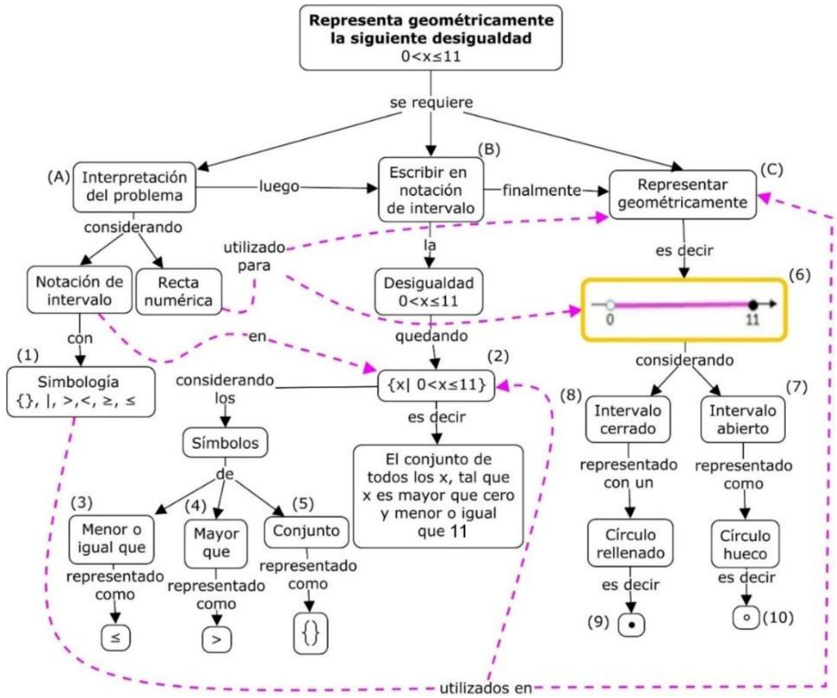


Figura 24. MCH que describe la resolución de un problema de desigualdad y su respectiva representación gráfica.

De acuerdo con el MCH de la figura 24, para poder graficar la desigualdad $0 < x \leq 11$ primero se requiere realizar la práctica (A), la cual consiste en comprender el problema, es decir, identificar cuáles son los símbolos utilizados en la desigualdad (1). Posteriormente, en la práctica B hay que interpretar la desigualdad (2) y analizar qué significan los símbolos utilizados en ella (3)-(4)-(5). Para, finalmente representarlo geométricamente (6), como se puede ver en la práctica C, en donde se puede ver que tenemos intervalos del tipo (7) y (8), los cuáles se representan de la forma (9) y (10).

A continuación, como se muestra en la figura 25, se puede ver un segundo ejemplo sobre la resolución de desigualdades representadas esquemáticamente mediante el MCH.

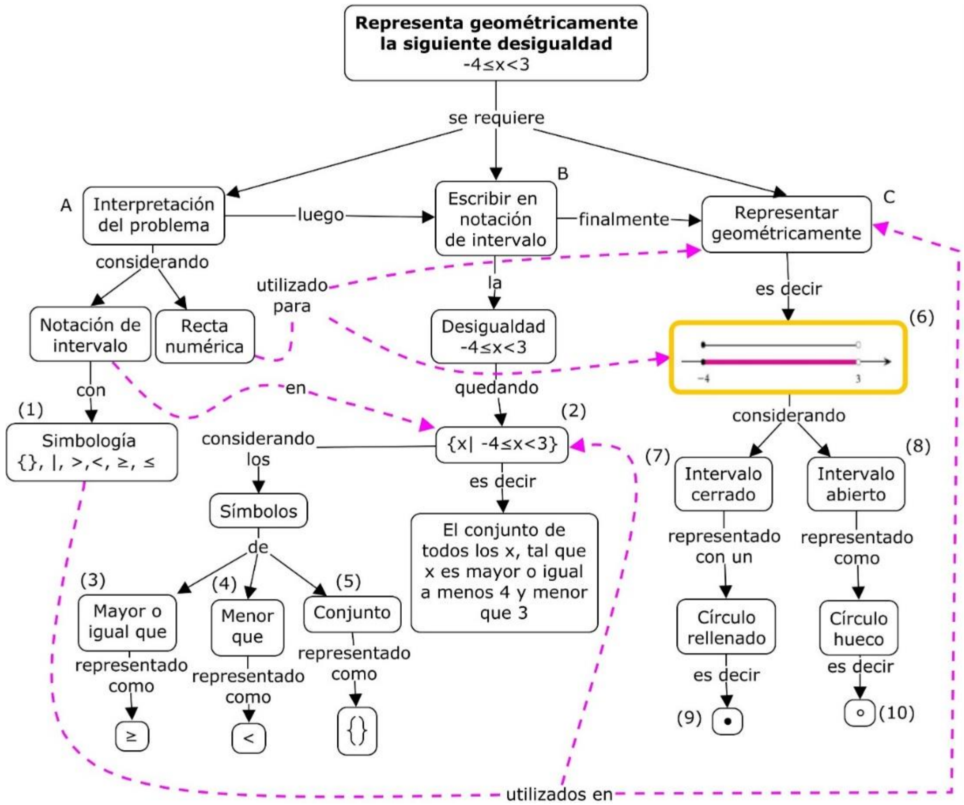


Figura 25. MCH que describe la resolución de un problema de desigualdad y su respectiva representación gráfica.

Como se puede ver en el MCH de la figura 25, la resolución de la desigualdad es similar a la desigualdad planteada en el MCH de la figura 24. La práctica A es la misma, interpretativa, y la simbología necesaria para resolver el problema también (1). Sin embargo, al realizar la práctica B, cuando se interpreta la desigualdad (2), se puede ver cómo los símbolos en (3)-(4)-(5) están en diferente orden, ya que al final, cuando se representa geométricamente en (6), se puede ver un ligero cambio en el uso de (7)-(8)-(9)-(10), pues ahora el lado izquierdo del intervalo es cerrado y el lado derecho es abierto.

Ejercicio. Tomando como guía los MCH de las figuras 24 y 25, representa geométricamente las desigualdades (i) $-5 < x \leq 8$, (ii) $3 \leq x < \infty$.

2.5 VALOR ABSOLUTO

En esta sección se describirán las propiedades y características del valor absoluto, y también se resolverán ejercicios de éstos mediante el uso de MCH.

El valor absoluto de un número real es el número natural que resulta de suprimir el signo negativo y como resultado todos los números son positivos. El valor absoluto se representa con dos líneas verticales paralelas "| |" y dentro de estas líneas paralelas se coloca(n) el(los) número(s) $|a + b|$ o bien $|c|$.

Si un número real "*a*" es la coordenada de un punto A sobre una recta numérica, para denotar la **distancia** que hay del punto A al origen, independiente del sentido, se utiliza el *valor absoluto*, es decir, el valor no negativo de la coordenada "*a*". Como se puede ver en la figura 26.

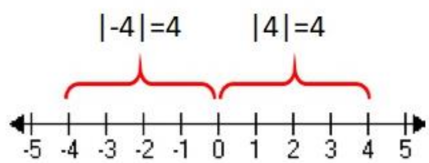


Figura 26. Representación del valor absoluto en una recta numérica.

En general, para calcular el valor absoluto de un número $|a|$, se tiene la siguiente definición: *Sea "a" un número real. El valor absoluto de "a" se denota por* $|a|$ *y está dado por la expresión de la* figura 27.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Figura 27. Definición de valor absoluto.

Es decir, de acuerdo con la definición de la figura 27, si el número "*a*" es positivo su valor que queda igual, pero si el valor de "*a*" es negativo hay que multiplicarlo por -1, para convertirlo en un número positivo.

Para resolver una ecuación con desigualdades que involucran al valor absoluto se tienen las siguientes propiedades, como se puede ver en el MC de la figura 28.

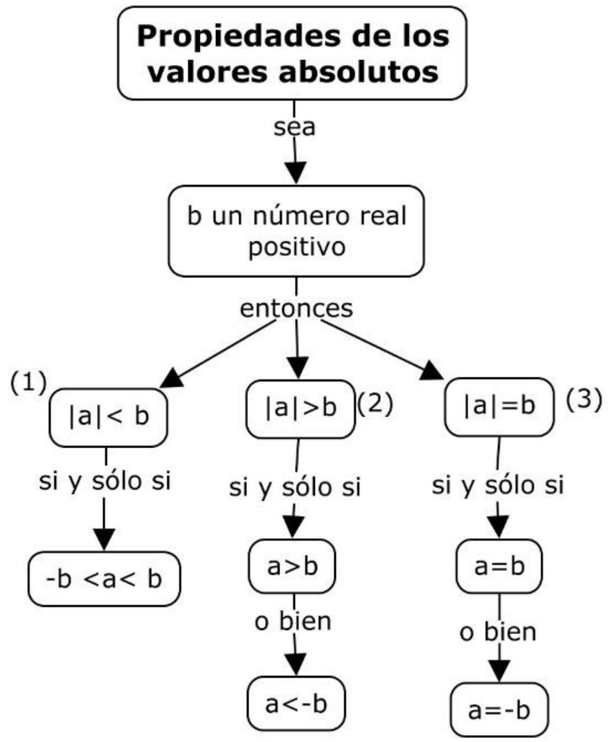


Figura 28. Propiedades del valor absoluto.

De acuerdo con las propiedades que se muestran en el MC de la figura 28, para las propiedades (2) y (3) también se cumplen si $b = 0$. Por lo tanto, si $b \geq 0$, entonces:

(i) $|a| \leq b \quad si\ y\ sólo\ si \quad -b \leq a \leq b$

(ii) $|a| \geq b \quad si\ sólo\ si \quad a \geq b\ \ o\ bien\ \ a \leq -b$

De igual manera también es importante tomar en cuenta que

I. $|a| = |-a|$
II. $|a * b| = |a| * |b|$
III. $|a + b| = |a| + |b|$

Por ejemplo, en el MCH de la figura 29 se muestra cómo es que se utiliza una de estas propiedades (ver (2) de la figura 28) en la resolución de un problema que involucra una desigualdad con valor absoluto.

De acuerdo con el MCH de la figura 29, para resolver la inecuación $|x + 4| \geq 3$, primero se realiza la práctica A, en donde se identifica la propiedad del valor absoluto a utilizar, en este caso es la (1) que se desglosa como se ve en (2) y (3).

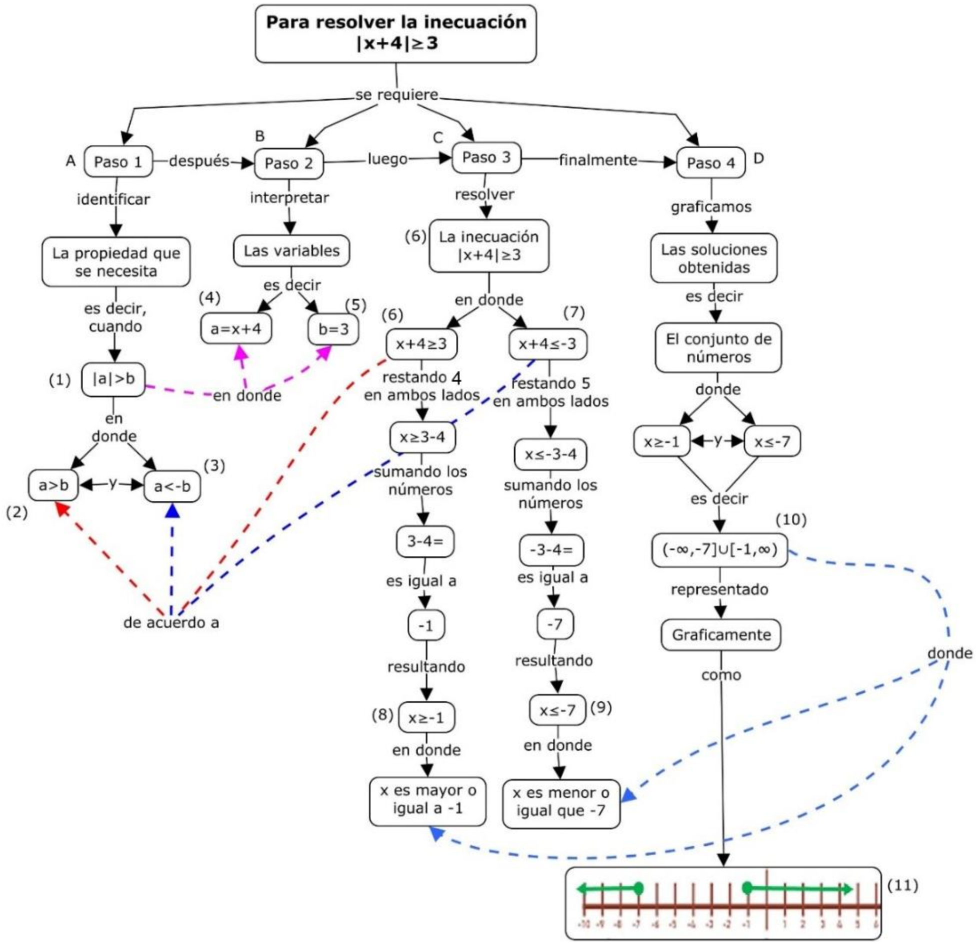


Figura 29. MCH que describe la resolución de una inecaución y su representación gráfica.

Posteriormente en la práctica B, se interpreta la propiedad a utilizar y se relaciona con el problema, quedando como se muestra en (4) y (5). Después, siguiendo la práctica C, se empieza a resolver el problema, quedando las desigualdades (6) y (7), al resolver estas dos queda como resultado (8) y (9), siguiendo cuidadosamente la ley de los signos, en donde números con signos iguales se suman y números son signos diferentes se restan. Finalmente, se grafican los resultados obtenidos, quedando como el conjunto (10) en donde x es el conjunto de números entre menos infinito y -7, y también aquellos números entre -1 e infinito, como se puede ver en (11).

Por último, ya en el contexto de las funciones, las funciones expresadas en términos de valor absoluto se transforman en funciones a trozos cuando se emplea la definición de valor absoluto (ver figura 27). Por ejemplo, en el MCH de la figura 30 se muestra como el caso de la función $f(x) = \left|\frac{3x}{2} - 1\right|$ que es convertida en una función a trozos.

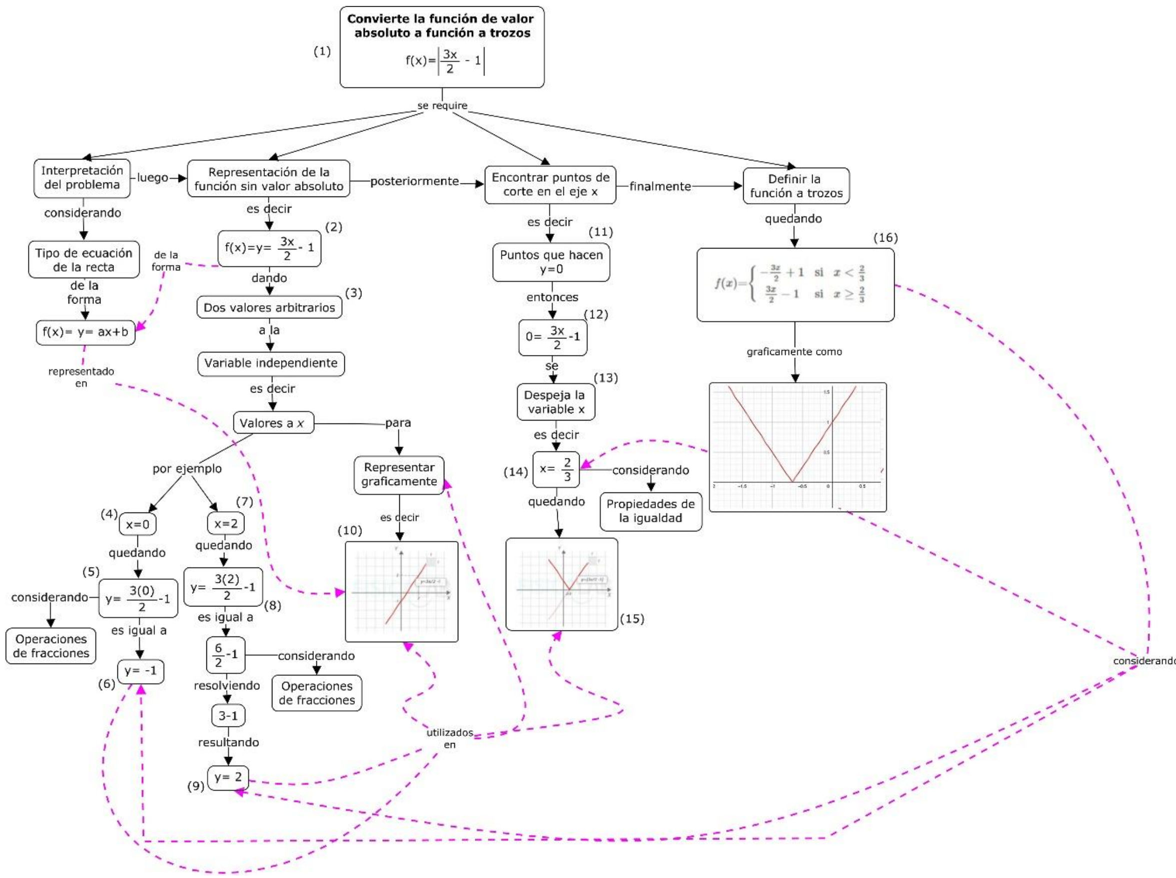


Figura 30. MCH que describe la resolución de una función a trozos y se presenta su respectiva gráfica.

De acuerdo con el MCH de la figura 30, para convertir a trozos la función (1), se requiere realizar el paso (2) y (3), al ejecutar estos pasos darán como resultado (4)-(5)-(6)-(7)-(8)-(9), gráficamente se ve como (10). Posteriormente para encontrar los valores críticos se debe de hacer el (11) y sustituir (12), para obtener el valor de (14) y la gráfica (15). Finalmente, aplicando la definición de valor absoluto de la figura 27 a la función (1), obtenemos (16) y el resultado de la función y su gráfica.

Ejercicios. Tomando en cuenta los MCH de las figuras 29 y 30, realizar los siguientes ejercicios (i) Resolver y graficar la inecuación $|x+3| < 14$, (ii) Transformar a función a trozos la función $f(x) = |x-2|$

2.6 OPERACIONES DE FUNCIONES

En esta sección se describirán los pasos a seguir para resolver operaciones básicas con funciones tales como la suma, la resta, la multiplicación y división mediante el uso de MCH.

La formación de nuevas funciones a partir de la aplicación de operaciones algebraicas se realiza de la siguiente manera:

Dadas dos funciones f y g:

1) La suma, denotada por $f + g$, es la función definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

2) La diferencia, denotada por $f - g$, es la función definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

3) El producto, denotado por $f * g$, es la función definida por

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

4) El cociente, denotado por f/g, es la función definida por

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)\ ;\ g(x) \neq 0$$

Para el caso particular de la suma de una función "f" con una constante "c" se obtiene una función "g" definida por $g(x) = f(x) + c$, para todo "x" en el dominio de f. Si $c > 0$, la gráfica de "g" se obtiene desplazando la de "f" una distancia "c" hacia arriba y si $c < 0$, hay que desplazar la gráfica de "f" una distancia $|c|$ hacia abajo, como se puede ver en la figura 31.

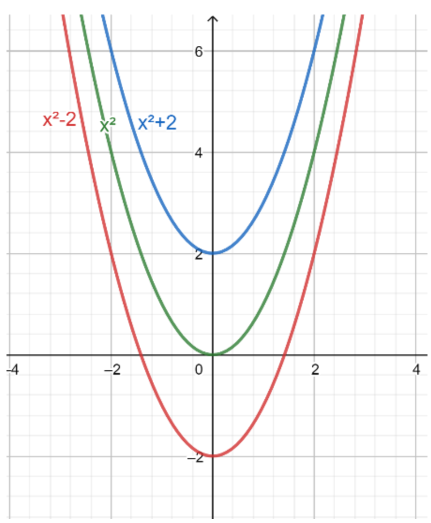


Figura 31. Representación del desplazamiento vertical de la función $y = x^2$.

Cabe agregar que la función también puede desplazarse horizontalmente, para lo cual la constante "c" debe sumarse de la siguiente manera, $y = f(x + c)$, es decir, el valor de "c" debe de estar dentro del argumento de f. Si $c > 0$, la gráfica se desplaza hacia la izquierda y si $c < 0$ ésta se desplaza hacia la derecha, como se puede ver en la figura 32.

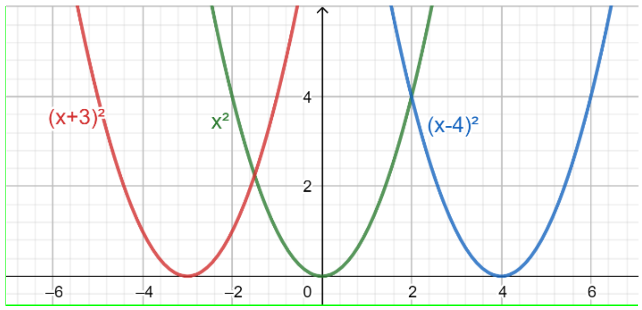


Figura 32. Representación del desplazamiento horizontal de la función $y = x^2$.

Retomando la suma de funciones, el MCH de la figura 33 ilustra la resolución del problema de la suma de dos funciones cuadráticas, a saber, $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = x^2 - 2x - 7$.

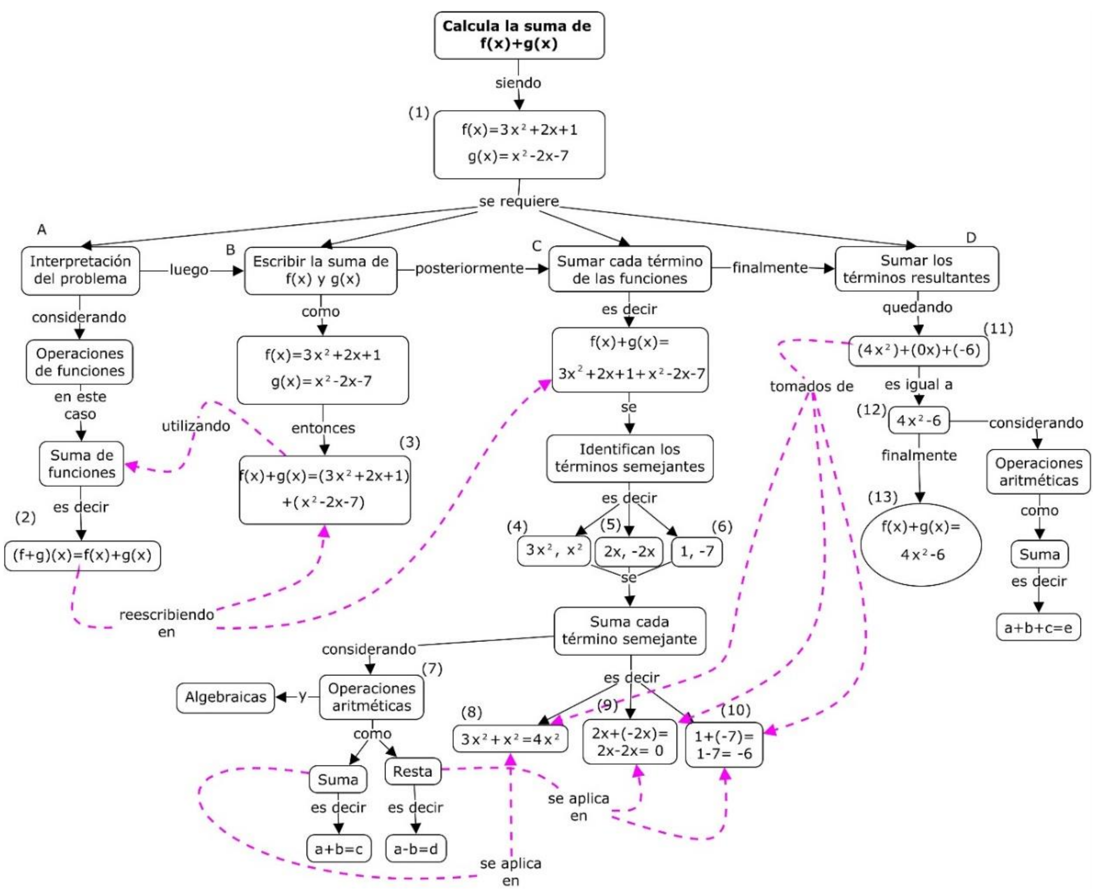


Figura 33. MCH que describe la resolución de un problema de suma de funciones.

De acuerdo con el MCH de la figura 33, para poder resolver la suma en (1) hay que realizar primero la práctica A en donde se tiene que interpretar el problema, es decir, ver qué realmente se necesita realizar en la suma de funciones (2). Posteriormente, se escribe la suma de las funciones, como se muestra en la práctica B, sustituyendo en (2) las expresiones de las funciones, ver (3). Después, hay que realizar la práctica C, sumando los términos semejantes de las funciones, como se muestra en (4)-(5)-(6), esto mediante (7), para obtener lo que se muestra en (8)-(9)-(10). Finalmente, en la práctica D, se juntan cada uno de los términos resultantes (11), se simplifica en (12) para luego obtener el resultado en (13).

De igual manera, para el caso de la resta de dos funciones, se muestra un ejemplo resuelto por medio de un MCH en la figura 34.

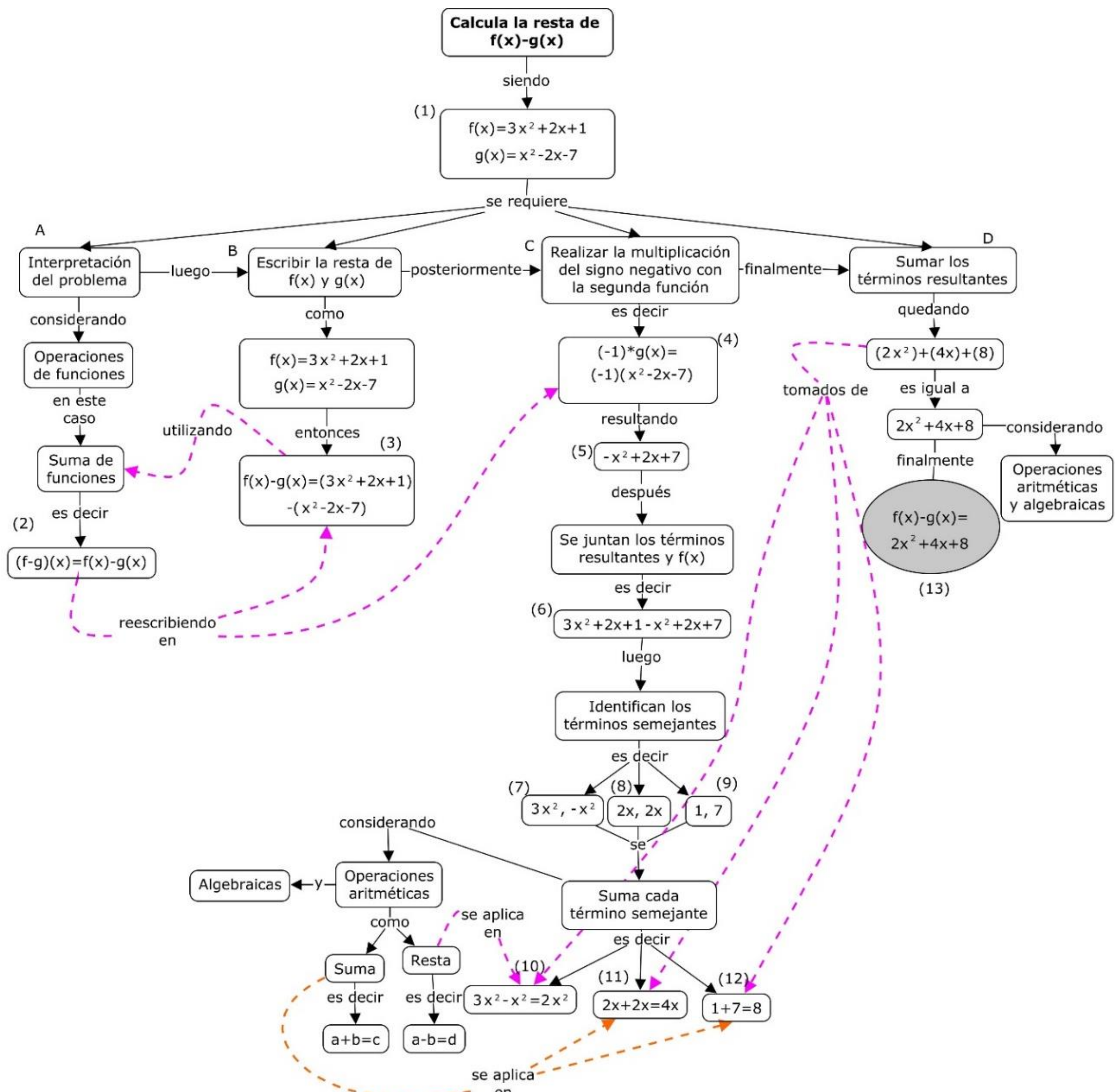


Figura 34. MCH que muestra la resolución de la resta de dos funciones polinómicas.

Según el MCH de la figura 34, para resolver la resta de las funciones en (1), primeramente, se tiene que realizar la práctica A, en donde hay que realizar la interpretación del problema y tomar en cuenta la notación de la resta de funciones en (2). Después, se tiene que realizar la práctica B, en donde hay que sustituir las funciones en la fórmula de la resta (3). Posteriormente se tiene que realizar la multiplicación del signo negativo de la resta por la función que se encuentra a la derecha, ver (4), luego se juntan los términos obtenidos (5) con los de la otra función (6), se identifican los término semejantes, de acuerdo a sus exponentes (7)-(8)-(9), y se realiza la suma de cada uno de los términos semejantes en (10)-(11)-(12). Finalmente, en la práctica D, se suman todos los términos resultantes, dando como resultado (13).

En la multiplicación de dos funciones el procedimiento es casi similar al empleado en la suma y en la resta, como se puede ver en el MCH de la figura 35.

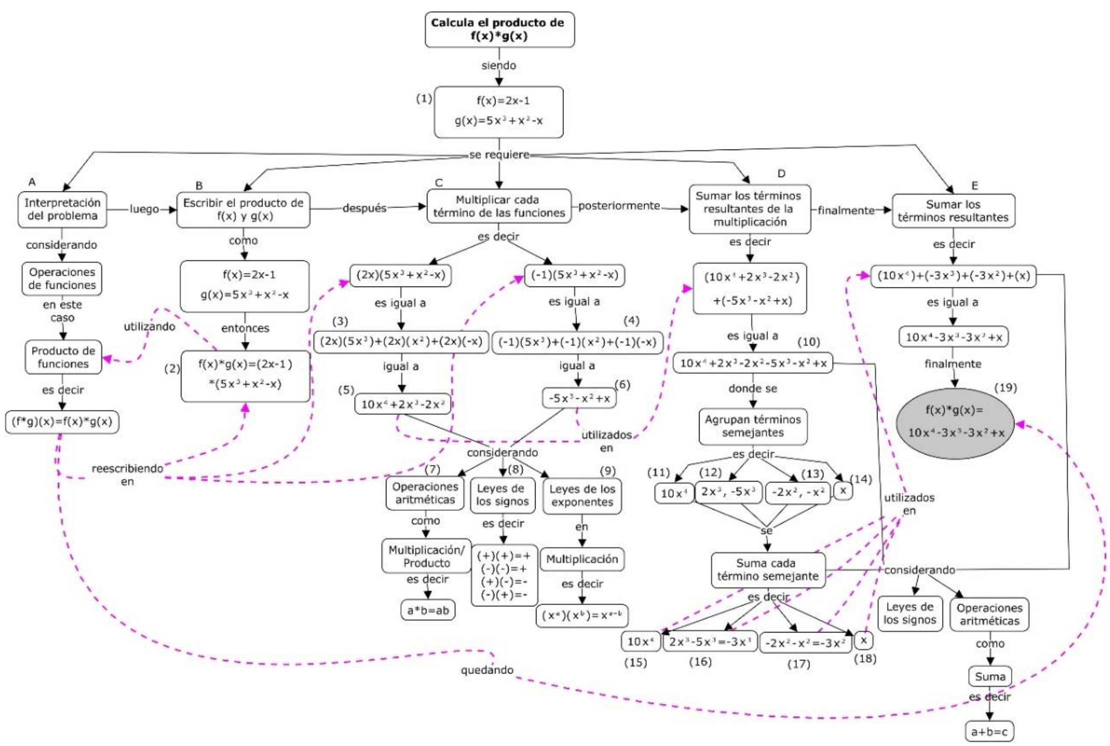


Figura 35. MCH que ilustra la resolución de un problema de multiplicación de funciones.

De acuerdo con el MCH de la figura 35, para resolver la multiplicación de las funciones en (1). Primero se tiene que realizar la práctica A, donde se interpreta el problema y se toma en cuenta la notación de la multiplicación. Después, se realiza la práctica B, donde hay que sustituir los funciones de (1) en la fórmula del producto de funciones (2).

Posteriormente, se realiza la práctica D, donde hay que multiplicar cada uno de los términos de las funciones como se muestra en (3) y (4), dando como resultado (5) y (6), esto tomando en cuenta nociones básicas como las que se muestran en (7)-(8)-(9). Luego, se tiene la práctica D, donde hay que juntar los términos semejantes resultantes en (5)-(6), resultado lo mostrado en (10),para poder realizar la suma de éste hay que agrupar los términos semejantes (11)-(12)-(13)-(14) y sumar cada uno de ellos, como se puede ver en (15)-(16)-(17)-(18). Finalmente juntando todos estos últimos términos obtenemos el resultado (19).

Finalmente, para mostrar cómo se realiza la división de polinomios, se muestra una resolución de un problema mediante el uso de MCH en la figura 36.

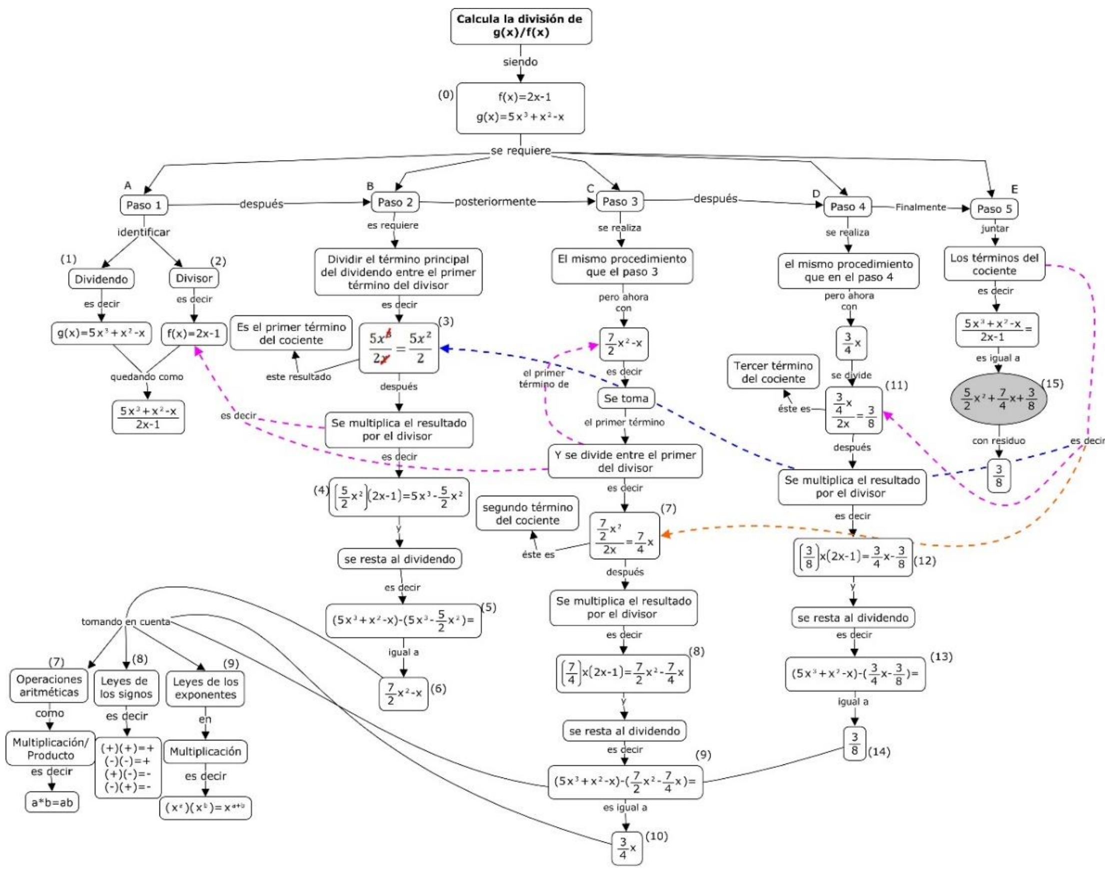


Figura 36. MCH que ejemplifica la resolución de un problema de división entre funciones.

De acuerdo con el MCH de la figura 36, para resolver la división de las funciones en (0), se tiene que realizar la práctica A que consiste en identificar (1) y (2). Después se realiza la práctica B, en donde se toma el primer término del dividendo y se divide entre el primer término del divisor (3), se realiza (4)-(5) y se obtiene el primer residuo (6). Posteriormente, en la práctica C, se toma (6) y se realiza la práctica (7)-(8)-(9) para obtener el segundo residuo (10). En la práctica D se realizan mismos procedimientos (11)-(12)-(13), y se obtiene el último residuo (14), los pasos B, C y D se repiten tantas veces como términos tenga el dividendo. Finalmente, en la práctica E, se juntan todos los términos del cociente (3)-(7)-(11) y se obtiene el resultado de la división la expresión en (15).

Ejercicios. En base a los MCH de las figuras 33-36, realiza $(f+g)(x), (f-g)(x), (fg)(x)\ y\ (\frac{g}{f})$. De las funciones (i) $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^2 - 4$. (ii) $f(x) = 5x + 3$ y $g(x) = 11x^3 - 8x^2 + 6$.

Capítulo 3

DERIVADA

Objetivo: *Asimilar el concepto de derivada como pendiente de la tangente de una curva y como límite de funciones de una variable*.
3.1 Reglas de derivación para: Sumas, productos, cocientes y potencias 3.2 Regla de la cadena y función a una potencia 3.3 Derivación implícita 3.4 Reglas de derivación para funciones trigonométricas y trigonométricas inversas 3.5 Reglas de derivación para funciones exponenciales, logarítmicas e hiperbólicas

3.1 REGLAS DE DERIVACIÓN: SUMAS, PRODUCTOS, COCIENTES Y POTENCIAS

En esta sección se describirán las reglas de derivación para la suma, la resta, la multiplicación, la división y la potencia de funciones, y también se presentarán algunos ejemplos mediante el uso de MCH.

Para dar a conocer las reglas que se deben seguir para la derivación de las funciones compuestas, en la figura 37 se muestra un MC que explica detalladamente los pasos a seguir para obtener las derivadas.

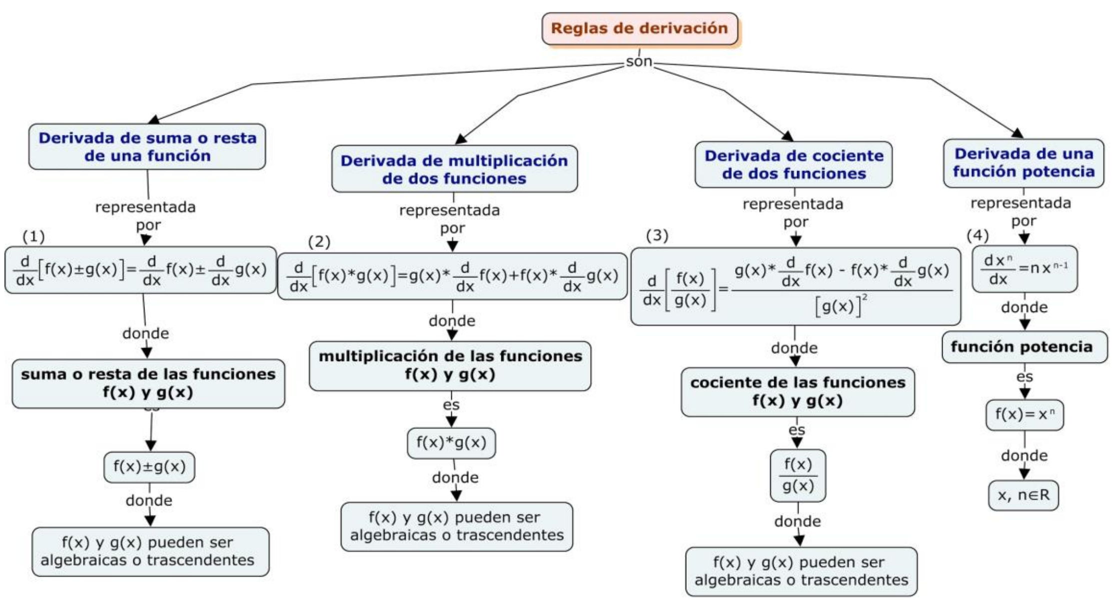


Figura 37. MC acerca de las reglas de derivación de las operaciones elementales

De acuerdo con el MC de la figura 37, se tienen que seguir ciertos pasos para la derivación de las funciones que están siendo sometidas a operaciones básicas. Para comprender estas reglas de derivación se iniciará con la derivada de una suma de funciones, ver el MCH en la figura 38.

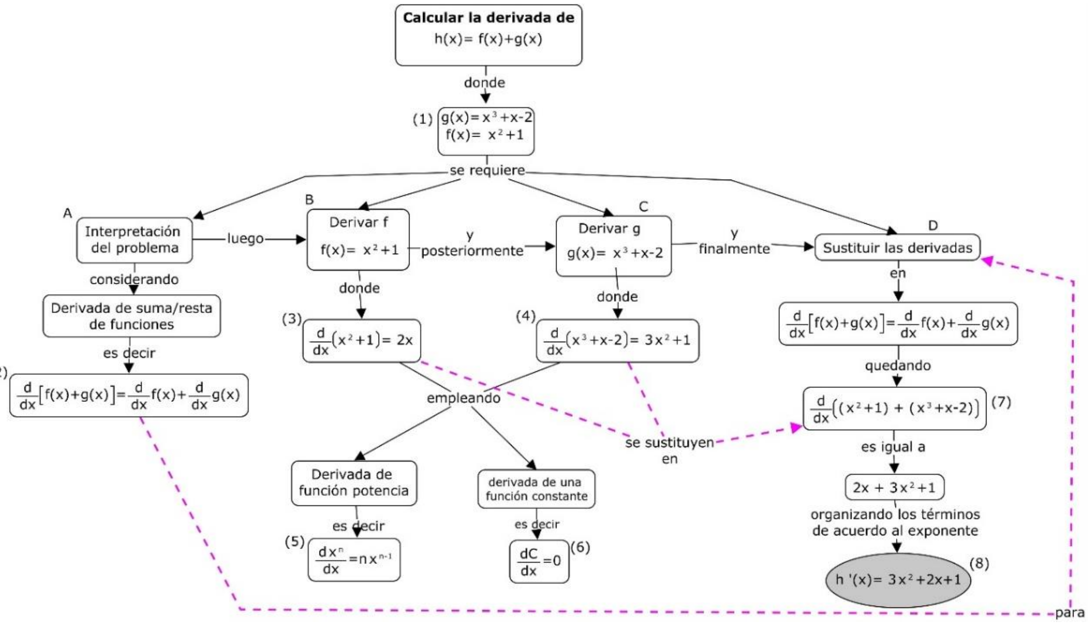


Figura 38. MCH que representa la resolución de la derivada de una suma de funciones.

Según el MCH de la figura 38, para resolver la derivada de la suma de las funciones (1), se necesita llevar a cabo 4 pasos. En el paso A, se requiere una interpretación del problema, en donde se toma en cuenta la fórmula para derivar en (2). En el paso B, de acuerdo con la fórmula de derivación, primero se realiza la derivada de la primera función (3). Después, en el paso C, se deriva la segunda función (4), para estos dos pasos, se necesita saber las fórmulas para derivar una función potencia y una constante (5)-(6). Finalmente, para obtener el resultado de la derivada, se sustituyen los valores obtenidos de (3) y (4) en (2), obteniendo (7); al juntar los términos semejantes y sumándolos, obtenemos el resultado (8).

Ejercicio. Tomando como base el MC de la figura 37 y el MCH de la figura 38. Realizar un MCH de la derivada de la resta de las funciones $(f-g)(x)$ donde, $f(x)=3x^5-x^2$ y $g(x)=4x^3-6x$.

Para calcular la derivada de una multiplicación de funciones, se tomarán los pasos señalados en (2) del MC de la figura 37, y mediante el uso de un MCH se resolverá el ejercicio que se muestra en la figura 39.

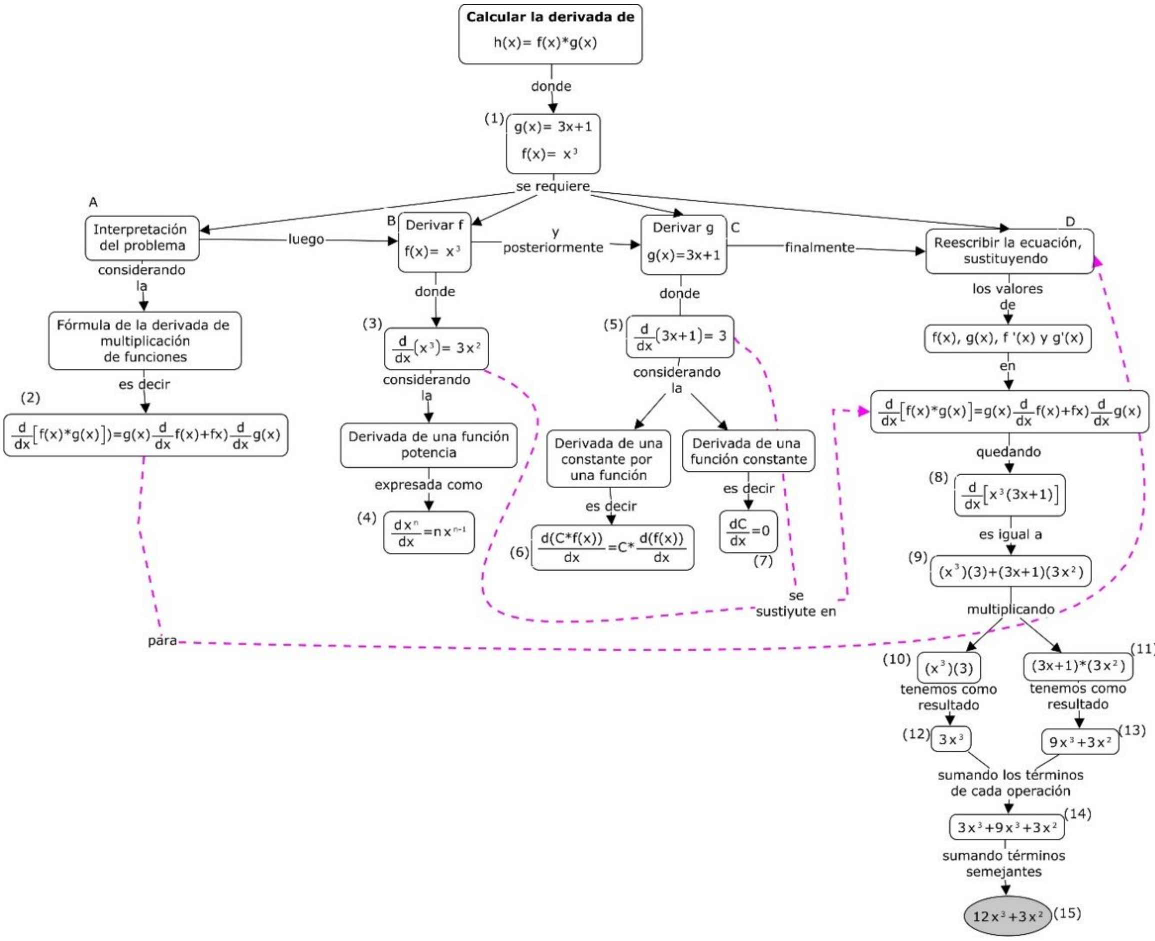


Figura 39. MCH que muestra la resolución de la derivada de una multiplicación de funciones.

Según el MCH de la figura 39, para calcular la derivada de la multiplicación de las funciones en (1), primero en el paso A se tiene que llevar a cabo la interpretación del problema, en donde se define la regla de derivación a seguir (2). Posteriormente, en el paso B, se deriva la función “f” en (3), dado que ésta tiene una potencia se hace uso de la fórmula en (4). Posteriormente, en el paso C se deriva la función “g” en (5), utilizando las fórmulas (6) y (7). Finalmente, teniendo los valores de las derivadas, en el paso D, se sustituyen todas las funciones obtenidas en la fórmula (2), y realizando las operaciones mediante (8)-(9)-(10)-(11)-(12)-(13), se juntan y se suman los nuevos términos semejantes (14), dando como resultado (15).

Por último, siguiendo el procedimiento (3) descrito en el MC de la figura 37, a continuación, se muestra la resolución del problema de derivar la división de dos funciones mediante el empleo del MCH, ver figura 40.

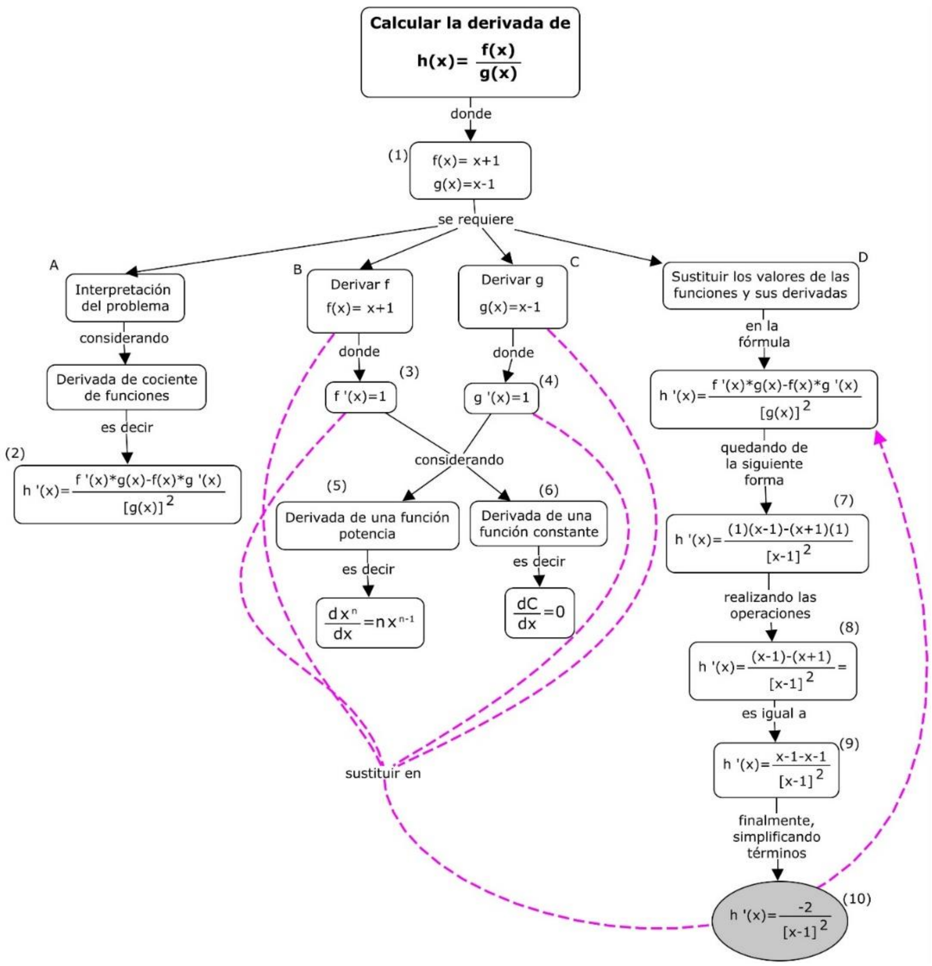


Figura 40. Resolución de un problema de derivación de una división de funciones mediante el uso de un MCH.

De acuerdo con el MCH de la figura 40, para resolver la derivada del cociente de las funciones en (1). Primero se realiza la práctica A, en donde se lleva a cabo la interpretación del problema, es decir, se considera y se analiza la fórmula para derivar una división de funciones (2). Después, en la práctica B, se deriva la primera función (3) y en la práctica C, se deriva la segunda función (4), para ambas prácticas, se tiene que tomar en cuenta las fórmulas (5) y (6). Finalmente se sustituyen las funciones y las derivadas de dichas funciones en la fórmula (2) para dar lugar a la expresión que se muestra en (7), al realizar las operaciones y simplificación mediante (8)-(9) es posible obtener como resultado (10).

Ejercicios. Tomando en cuenta los pasos vistos en los MCH de las figuras 39 y 40, y el MC de la figura 37. Realizar las siguientes derivadas, teniendo. (i) $h(x) = 3x^3(x^2 - 5)$, (ii) j(x)= $\frac{3x^2-5}{x^3-3}$, (iii) $f(x) = x^5$, (iv) $\frac{2}{5} * \sqrt{x}$.

3.2 REGLA DE LA CADENA Y FUNCIÓN A UNA POTENCIA

En esta sección se explicará la regla para derivar funciones compuestas mediante la regla de la cadena. La derivada de una función compuesta $f \circ g$ es el producto de las derivadas de f y g. Este hecho es uno de los más importantes de las reglas de derivación y se le conoce como *regla de la cadena* (Stewart, p.199).

En términos de razones de cambio, si la razón de cambio de "u" respecto a "x" es du/dx, y también, si la razón de cambio de "y" respecto a "u" es dy/du, entonces, la razón de cambio de "y" respecto a "x" podría escribirse como $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$, a continuación, en la figura 41 se presenta la regla de la cadena tal y como se aparece en el libro de Steward (2012):

Regla de la cadena *Si g es derivable en x y f es derivable en g(x), entonces la función compuesta* $F = f \circ g$ definida mediante $F(x) = f(g(x))$ es derivable en x, y F' está dada por el producto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Figura 41. Regla de la cadena según Steward (2012).

A continuación, se muestra el cálculo de la derivada de la función $y = (x^2 + 1)^3$ por medio de la regla de la cadena por medio de la utilización de un MCH.

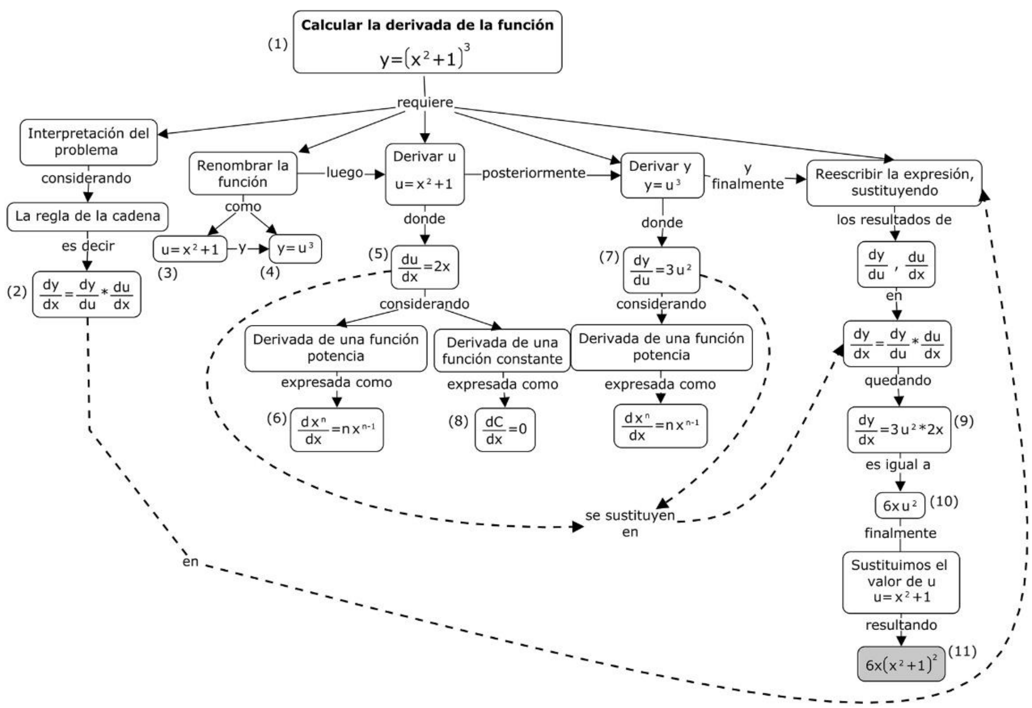


Figura 42. MCH que describe la resolución de un problema por medio de la regla de la cadena.

Como puede observarse en la figura 42, la derivada de la función en (1) requiere considerar la fórmula (2), la cual requiere, por un lado, considerar una función auxiliar "u" que va a depender de la variable "x", en este caso, sería (3), de tal manera que ahora es posible advertir la dependencia de la función "y" respecto a la variable "u" a través de (4).

Habiendo establecido las relaciones de dependencia, por separado se llevan a cabo las derivadas de las funciones obtenidas, ver (5) y (7). Posteriormente se realiza el producto de las derivadas en (9)-(10) y, finalmente, la expresión (10) se reescribe términos de la variable "x" para obtener el resultado (11).

En el MCH de la figura 43 se presenta otro ejemplo de la aplicación de la regla de la cadena para el problema de calcular la derivada de la función $y = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^3$

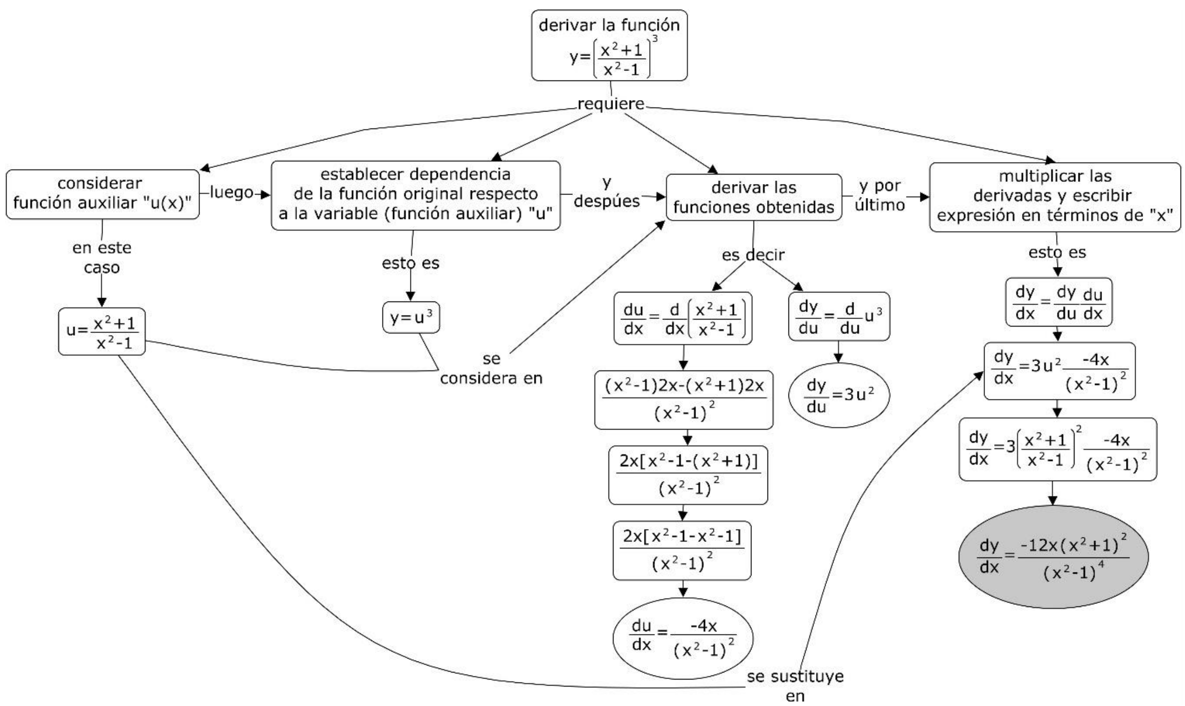


Figura 43. Aplicación de la regla de la cadena.

Ejercicios. Apoyándote en el MCH de las figuras 42 y 43, derivar las siguientes funciones.

(i) $f(s) = \sqrt{\frac{s^2+1}{s^2+4}}$

(ii) $y = \cos\left(a^3 + x^3\right)$

3.3 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

En las secciones anteriores se ha presentado el problema de derivar una función cuya expresión algebraica permite advertir la variable, llamada dependiente, explícitamente en términos de otra variable, llamada independiente. Sin embargo, existen funciones que expresan implícitamente la relación entre la variable dependiente y la independiente, por ejemplo, $x^2 + y^2 = 36$, $xy + y^2 = 7$, por mencionar algunas. Para derivar este último tipo de funciones se emplea el método de la *derivación implícita*.

El método de la derivación implícita consiste en derivar ambos miembros de la ecuación respecto a la variable independiente y después resolver la ecuación resultante para la derivada de la variable dependiente.

En el MCH de la figura 44 se ejemplifica el proceso de derivación implícita de la función en I. El MCH muestra que se derivan ambos miembros de la expresión en (1)-(2), lo que conduce a (3). Posteriormente, a partir de (3) se despeja "$\frac{dy}{dx}$", lo cual se realiza mediante (4)-(5)-(6) y finalmente se obtiene (7).

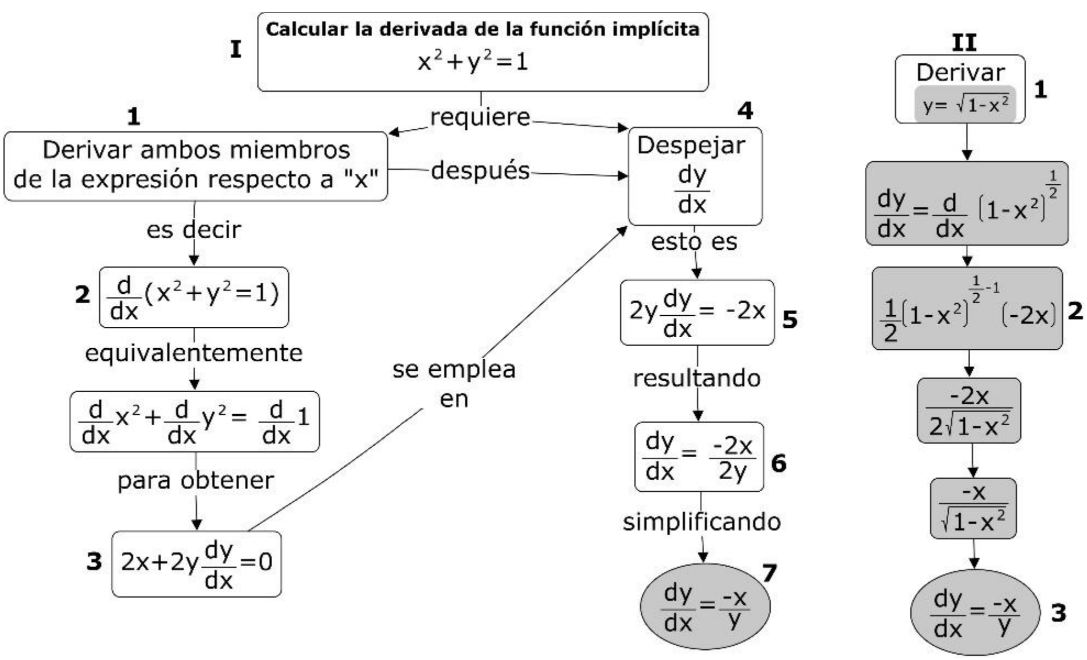


Figura 44. Resolución de un ejemplo de derivación implícita, utilizando un MCH.

Para el caso de la expresión en "I" sí es posible despejar primero la variable dependiente "y" y luego derivar respecto a "x". En la figura 44, en "II", se presenta la expresión despejada en II(1) y luego el proceso de derivación que se apoya en la regla de la cadena en II(2) que permite obtener finalmente II(3), que es el mismo resultado que fue obtenido mediante derivación implícita en I(7).

En el MCH de la figura 45 se presenta otro MCH en el que se deriva implícitamente la expresión $e^y cosx = 1 + sen(xy)$. Nótese que en esta expresión no es posible despejar la variable dependiente "y" como sucedió en el caso de la función de la figura 44.

La derivación implícita de (1) consiste en derivar respecto a "x" ambos miembros de la expresión, ver (2)-(3)-(4). Posteriormente se despeja "$\frac{dy}{dx}$" a través de (5)-(6)-(7) para obtener finalmente el resultado en (8).

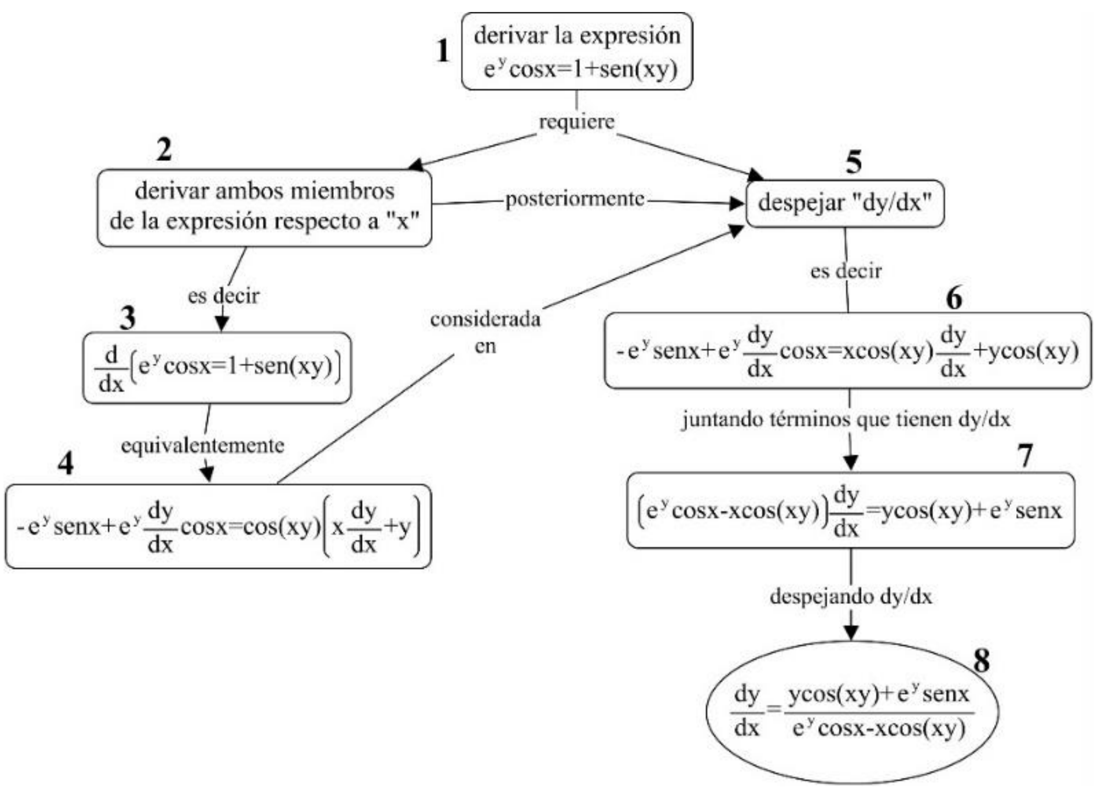


Figura 45. Aplicación del método de derivación implícita.

Ejercicio. Derivar implícitamente las siguientes expresiones

(i) $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$ (ii) $\tan(x - y) = \frac{y}{1+x^2}$

3.4 REGLAS DE DERIVACIÓN PARA FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS.

En esta sección se describe cómo derivar funciones trigonométricas. En la figura 46 se presenta un MCH que describe el proceso de derivación de la función $sen(x)$ a partir de la definición de derivada.

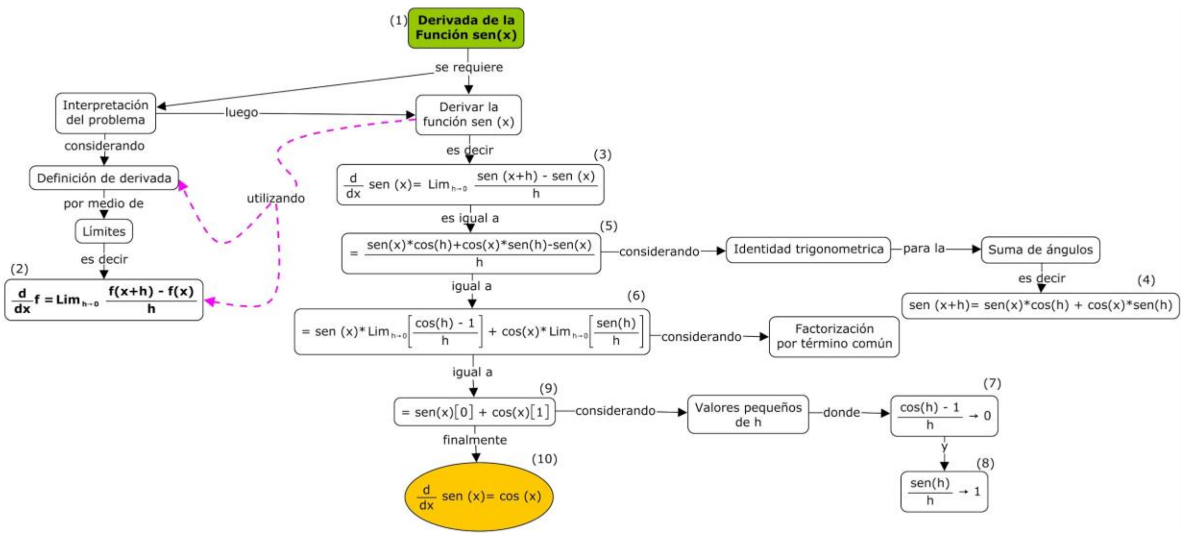


Figura 46. Derivada de la función trigonométrica sen(x).

Sin embargo, cuando se tiene la función $y = sen(u)$ donde “u” es una función derivable respecto a la variable “x” es posible usar la regla de la cadena de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos(u)\frac{du}{dx}$$

De esta manera, se tiene la siguiente fórmula

$$\frac{d}{dx} sen(u) = \cos(u)\frac{du}{dx}$$

De igual modo, todas las formulas para derivar el resto de las funciones trigonométricas también pueden ser obtenidas a partir de la regla de la cadena. En el MC de la figura 47 se presentan las fórmulas de las derivadas de las seis funciones trigonométricas para el caso en el que “u” sea una función derivable de “x”.

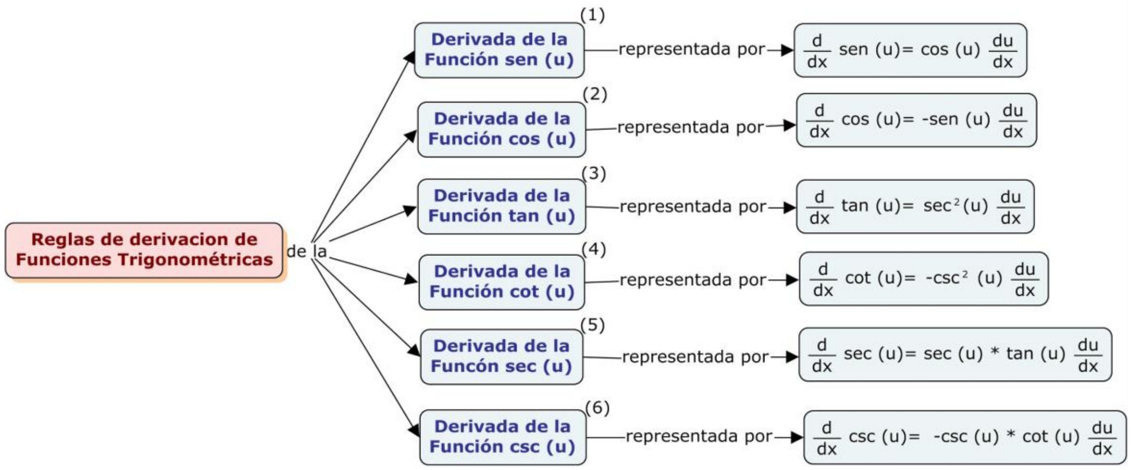


Figura 47. MC sobre las reglas de derivación de Funciones Trigonométricas.

En la figura 48 se presenta el MCH que describe la resolución de la derivada de la función $y = \tan{(3t)}$.

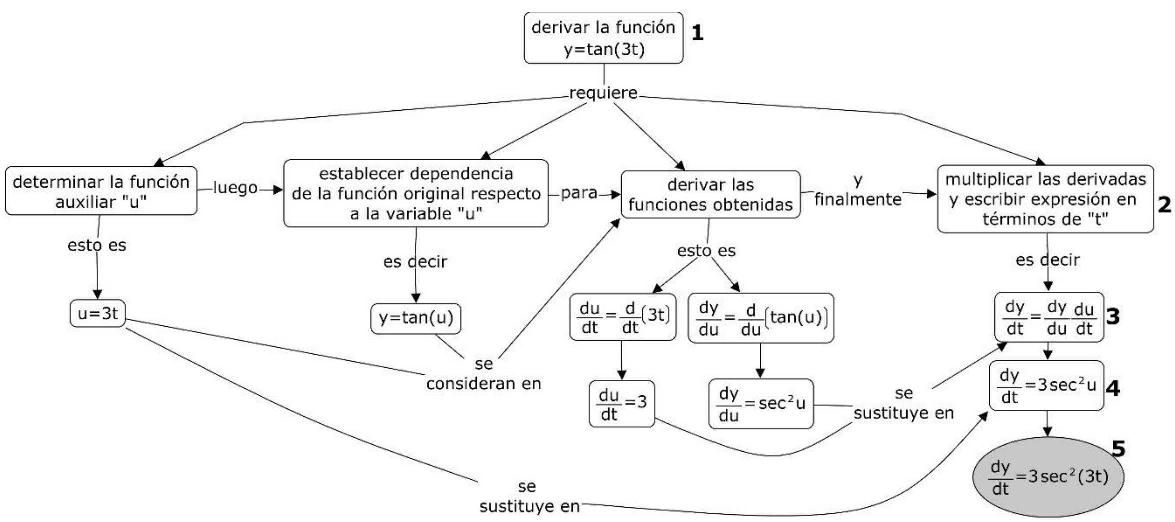


Figura 48. Derivada de la función trigonométrica tangente mediante la regla de la cadena.

La derivada de la función trigonométrica en (1) se realizó mediante la regla de la cadena a través de (2)-(3)-(4) para obtener como resultado (5). El mismo procedimiento se sigue para resolver el problema de calcular la derivada de la función $y = sen^2(3t^2 - 1)$ en el MCH que se presenta en la figura 49. Se trata de un procedimiento que consiste en apoyarse en una función auxiliar "u", luego expresar la función problema en términos de dicha variable, calcular las derivadas de las funciones resultantes y posteriormente realizar el producto de ellas.

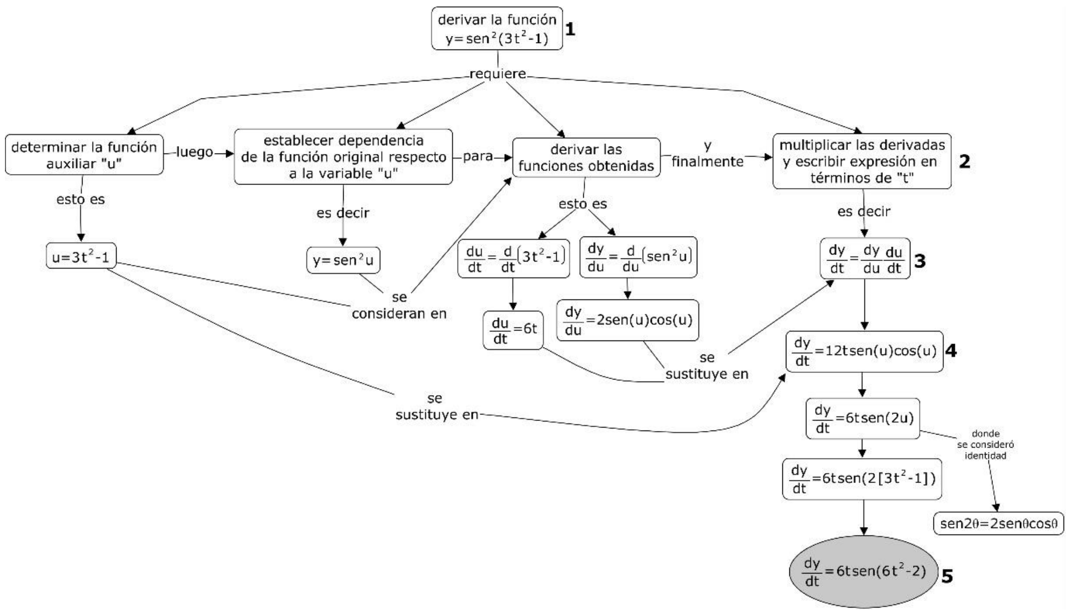


Figura 49. Derivación de la función trigonométrica seno mediante la regla de la cadena.

Por otra parte, también es posible obtener fórmulas para la derivada de las funciones inversas. Para esto se considera que “la derivada de una función monótona y continua, y la derivada de su inversa son recíprocas una de la otra” (Leithold, p. 471). Partiendo de la función inversa

$$y = sen^{-1}x$$

Lo cual es equivalente a $x = sen\, y$ donde “y” está en $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, al diferenciar los dos miembros de esta última expresión con respecto a “y” resulta

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

Luego, empleando la identidad trigonométrica $sen^2y + cos^2y = 1$, y luego, sustituyendo $sen\, y$ por “x”, dicha identidad se convierte en $x^2 + cos^2y = 1$, o bien, $cos^2y = 1 - x^2$. Pero como $y \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ y en ese intervalo $\cos y$ es no negativo, se tiene entonces que $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$, de esta manera, es posible reescribir la derivada como

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - x^2}$$

Pero como $\frac{dy}{dx}$ es recíproco de $\frac{dx}{dy}$, se tiene entonces que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

O lo que es lo mimos $\frac{d}{dx} sen^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. En la literatura es posible encontrar la notación “$arc\ sen\ x$” para denotar $sen^{-1}x$, y también para las otras funciones inversas. En el MC de la figura 50 se describen las fórmulas de derivación para el resto de las funciones trigonométricas inversas para el caso general en las que éstas tiene como argumento una función “$u(x)$” diferenciable. La deducción de estas fórmulas queda fuera del presente material, y más bien nos centraremos en la descripción mediante el MCH de la aplicación de éstas en la resolución de algunos problemas.

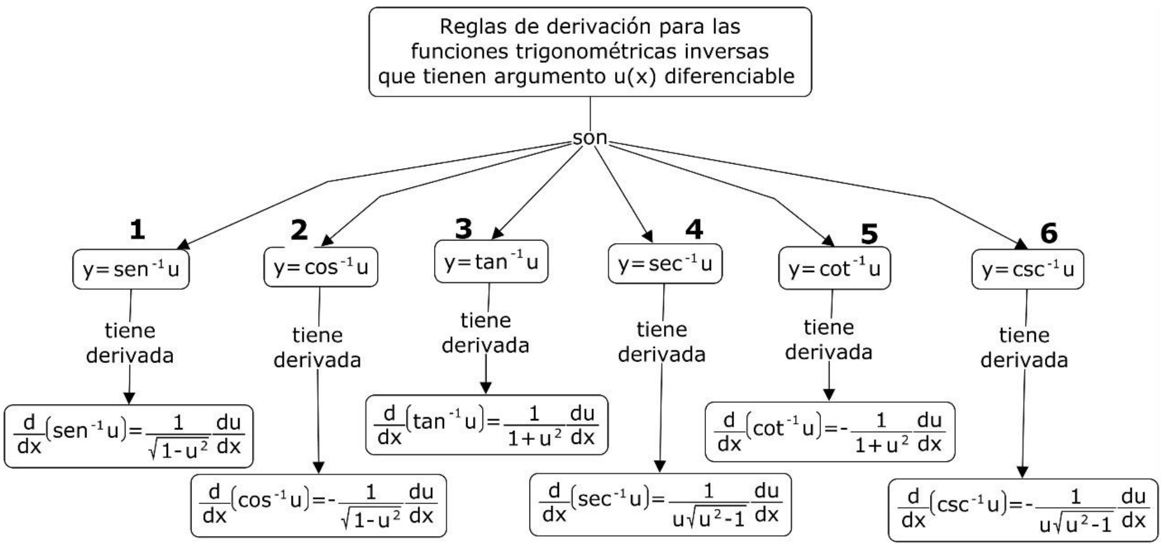


Figura 50. MC reglas de derivación de funciones trigonométricas inversas.

En el MCH de la figura 51 se describe el problema de calcular la derivada de la función $y = cot^{-1}\frac{2}{x}$. En dicho mapa se ilustra la aplicación de la fórmula 5 que aparece en la figura 50. En este caso, se identifica primero la función auxiliar “u” en (2), figura 51, se realiza la derivada de dicha función en (3) y por último se considera la fórmula (5) de la figura 50 y luego se realizan las operaciones en (4)-(5)-(6) para obtener el resultado (7).

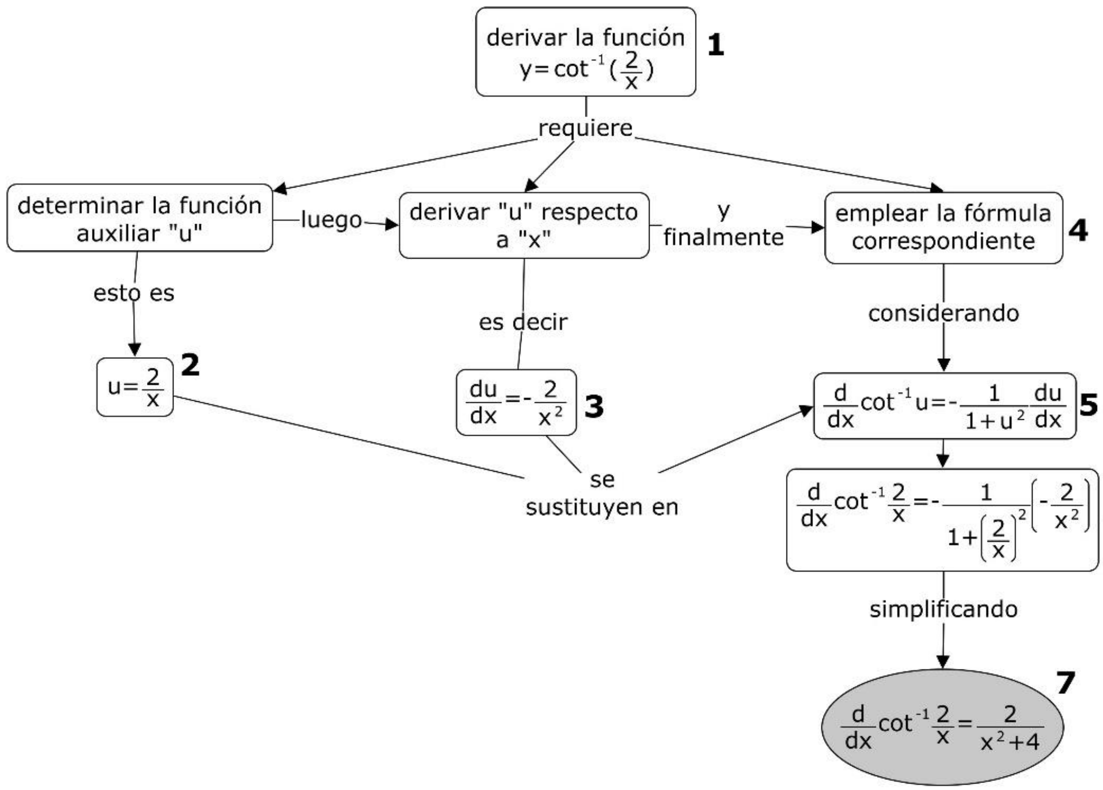


Figura 51. MCH que describe la derivación de una función trigonométrica inversa.

Ejercicio. Siguiendo el procedimiento de los MCH de las figuras 48 y 49 derivar las siguientes funciones: (i) $y = 3\cos{(2x)}$ y (ii) $y = \sqrt[3]{\tan{(3\theta)}}$.

Ejercicio. Considerando el procedimiento de la figura 51, derivar las siguientes funciones trigonométricas inversas: (i) $y = cos^{-1}(3x)$ y (ii) $y = 2tan^{-1}\frac{1}{w}$.

3.5 REGLAS DE DERIVACIÓN PARA FUNCIONES EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS E HIPERBÓLICAS

En relación con la *función logaritmo natural*, es decir $y = \ln u$, el libro de Leithold (1998) señala que si "u" es una función diferenciable de "x" y además $u(x) > 0$, entonces se tiene que $\boldsymbol{\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{d}{dx}u}$.

Por otra parte, de manera general, la derivada de la función $y = log_a u$ puede ser obtenida a través del siguiente procedimiento:

Considerando $y = log_a x$

Entonces se tiene

$a^y = u$ (por definición)

$\ln a^y = \ln x$ (aplicando logaritmo natural a ambos miembros)

$y \ln a = \ln x$ (por propiedad del logaritmo)

$y = \frac{\ln x}{\ln a}$ (de donde se ha despejado "y")

Y finalmente se obtiene que $\boldsymbol{log_a x} = \frac{\mathbf{ln}\, \boldsymbol{x}}{\mathbf{ln}\, \boldsymbol{a}}$ (pues inicialmente se consideró que $y = log_a\, x$), nótese que si se sustituye $x = e$ en esta expresión se tiene que $log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$.

Luego, diferenciando ambos miembros de esta la expresión $\boldsymbol{log_a x} = \frac{\mathbf{ln}\, \boldsymbol{x}}{\mathbf{ln}\, \boldsymbol{a}}$ respecto a "x" se tiene que $\frac{d}{dx} log_a x = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$ o equivalentemente $\frac{d}{dx} log_a x = \frac{log_a e}{x}$.

Aplicando la regla de la cadena a esta última fórmula se obtiene la fórmula general para el logaritmo de base "a" como $\boldsymbol{\frac{d}{dx} log_a u = \frac{log_a e}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{(ln\, a)u}\frac{du}{dx}}$.

En la figura 52 se muestra un MCH que ejemplifica de la solución del problema de derivar la función $y = \ln 5x$.

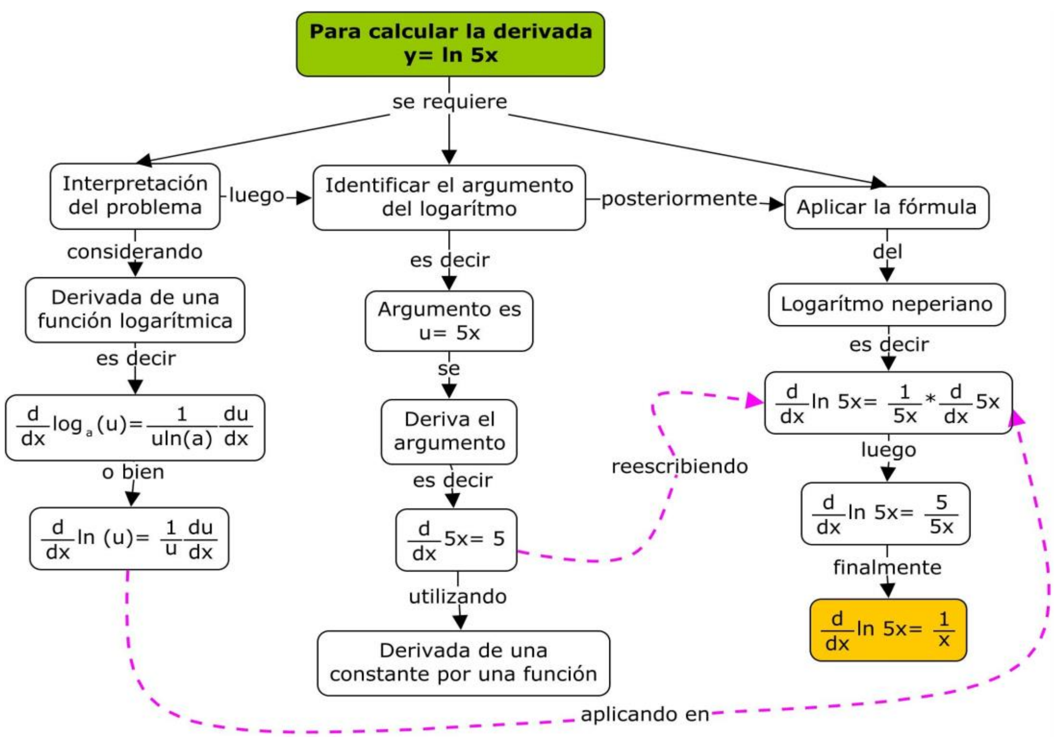


Figura 52. MCH de la solución de la derivada de una función logarítmica.

Por otra parte, en relación con la *función exponencial* $y = e^x$, se tiene que dicha función tiene la propiedad de que es su propia derivada, es decir $\frac{d}{dx}e^x = e^x$. El significado de esto es que la pendiente de una recta tangente a la curva $y = e^x$ es igual a la coordenada "y" del punto (Steward, 2012, p. 180).

Aplicando la regla de la cadena para derivar la función exponencial $y = e^u$, donde "$u(x)$" es una función diferenciable de "x" es posible obtener la fórmula $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$. En la siguiente figura 53 se muestra un ejemplo de la aplicación de la fórmula anterior para derivar la función exponencial $y = e^{4x}$.

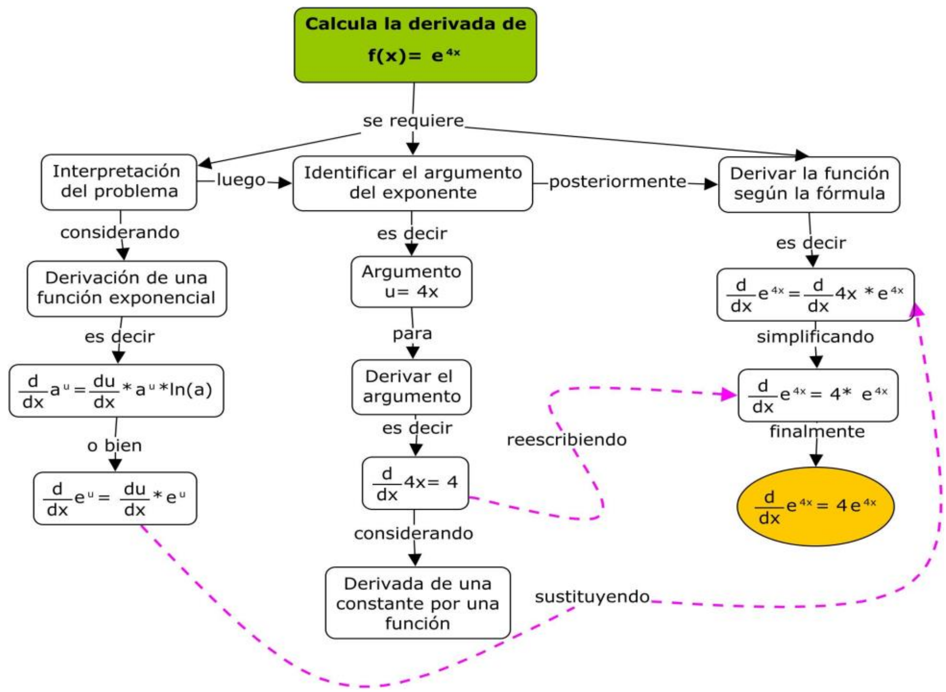


Figura 53. MCH que muestra la resolución del problema de la derivada de una función exponencial.

Según el Leithold (1998) formular para calcular la derivada de una *función exponencial de base "a"*, es decir, de la función $y = a^x$, puede ser determinada de la siguiente manera:

$a^x = e^{x\ln a}$ (pues el logaritmo natural es inverso a la exponencial natural)

$\frac{d}{dx}a^x = e^{x\ln a}\frac{d}{dx}(x\ln a)$ (por regla de la cadena)

$\frac{d}{dx}a^x = e^{x\ln a}(\ln a)$ (mediante la propiedad de derivar una constante por una función)

$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ (que es la fórmula para derivar una función exponencial de base "a")

Esta última expresión puede ser generalizada mediante la regla de la cadena al caso de la derivada de la función exponencial $y = a^u$, donde "u" es una función diferenciable de "x", quedando de la siguiente manera $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \, \frac{d}{dx} u$.

En la figura 54 se ilustra un MCH que describe la resolución del problema de derivar la función exponencial $y = 4^{3t^2}$.

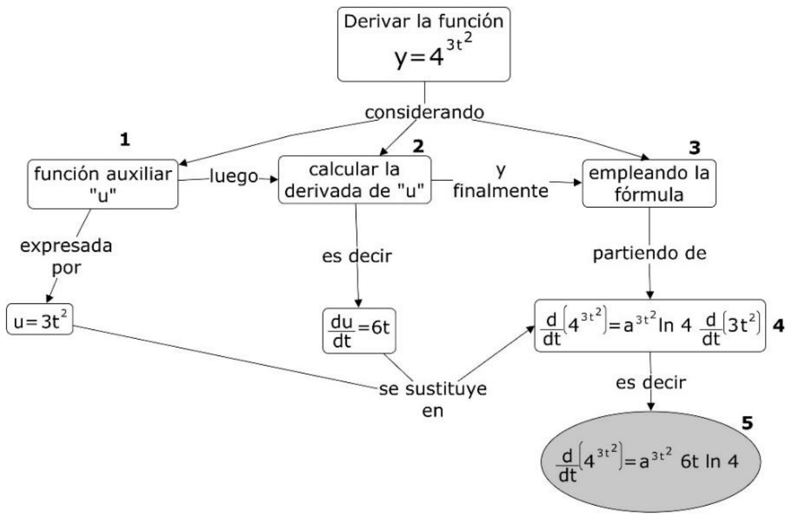


Figura 54. Derivada de una función exponencial mediante la regla de la cadena

Según el MCH de la figura X13 calcular la derivada de la función requiere definir una función auxiliar "u" en (1), posteriormente derivar dicha función en (2) y posteriormente sustituir la función "u" y su derivada en la fórmula general de la derivada de una función exponencial, de manera que el procedimiento a seguir es (3)-(4)-(5), el cual permite obtener el resultado (5). Otros problemas de derivación de funciones exponenciales pueden ser resueltos mediante el mismo sistema de prácticas representado mediante el MCH de la figura 54.

Por último, en relación con las *funciones hiperbólicas*, éstas resultan de ciertas combinaciones de las funciones exponenciales e^x y e^{-x}. De las funciones hiperbólicas las más importantes son la función *seno hiperbólico* (denotada como "$senh$") y *coseno hiperbólico* (denotada como "$cosh$") las cuales está definidas de la siguiente manera (Leithold, 1998, p. 490): $senh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ donde "x" es cualquier número real. De estas fórmulas y de la aplicación de la regla de la cadena se pueden obtener las siguientes derivadas generales $\frac{d}{dx} senh\, u = \cosh u \, \frac{du}{dx}$ y $\frac{d}{dx} cosh\, u = \mathrm{senh}\, u \, \frac{du}{dx}$.

En el MC de la figura 55 se presentan las funciones hiperbólicas, ver (1), (4), (7), (11), (14) y (17), como combinaciones de exponenciales naturales, ver (2), (5), (8), (12), (15) y (18), con sus correspondientes fórmulas para determinar sus derivadas, ver (3), (6), (9), (13), (16) y (19).

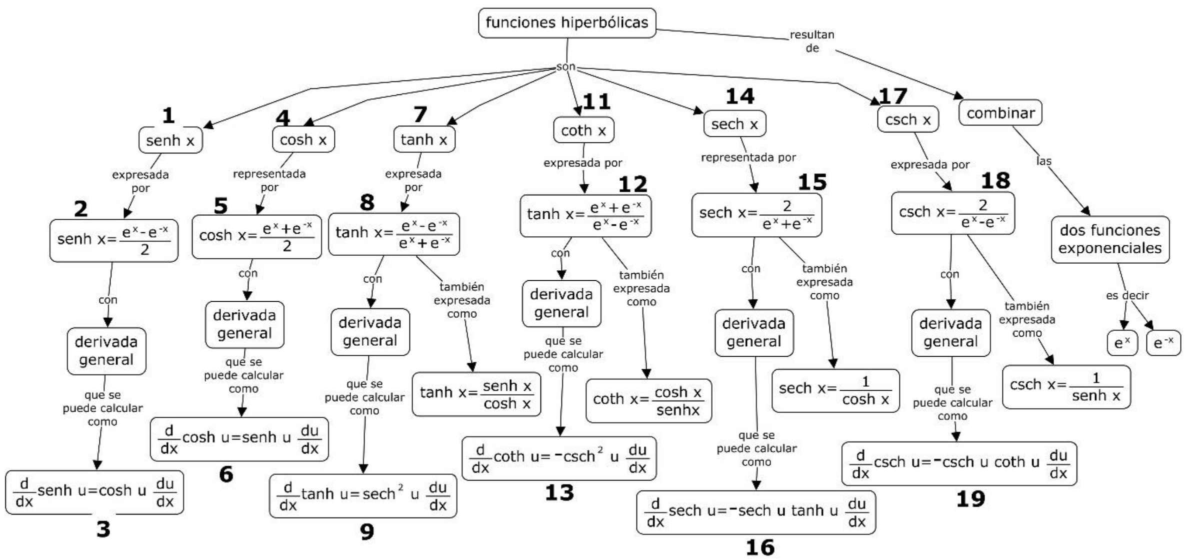


Figura 55. Las funciones hiperbólicas y sus derivadas.

En el MCH de la figura 56 se ilustra un ejemplo de la aplicación de la fórmula (3) de la figura 55 para calcular la derivada de la función $y = senh\, x^2$

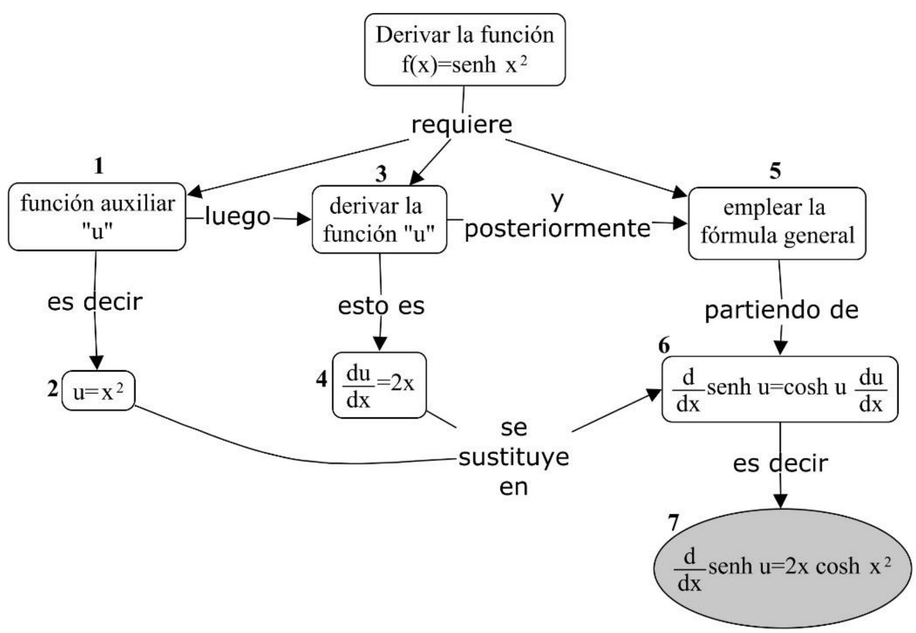


Figura 56. MCH que describe la resolución del problema de la derivada de la función seno hiperbólico.

En el MCH de la figura 56 se observa que para derivar la función hiperbólica primeramente se necesita definir la función auxiliar "u", ver (1)-(2), posteriormente se deriva dicha función respecto a la variable "x" en (3)-(4) y por último se emplea la fórmula de la derivada general (ver 3 en la figura 55) mediante (5)-(6), la cual permite obtener la solución del problema como (7).

Ejercicio. Apoyándote en el MCH de la figura 53 calcular las siguientes derivadas: (i) $y = e^{2\,sen\,3x}$; (ii) $y = e^{e^x}$

Ejercicio. Siguiendo el MCH de la figura 54, calcular la derivada de las siguientes funciones: (i) $f(x) = 6^{-3x}$; (ii) $f(z) = 2^{\csc 3z}$

Ejercicio. Considerando el MCH de la figura 56 calcular la derivada de la función $f(x) = \coth\frac{1}{x}$

Capítulo 4

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Objetivo: *Aplicación del concepto de derivada para resolver problemas de minimización, razones de cambio y características gráficas de las funciones como son concavidad, puntos de inflexión y simetría.*

4.1 LA DERIVADA COMO UNA RAZÓN DE CAMBIO

Siempre que una función $y = f(x)$ tenga una interpretación específica en alguna de las ciencias (física, biología, química, etc), entonces se considera que ésta tendrá una interpretación como *razón de cambio*, es decir, será un problema que involucra variación de variables relacionadas. Se sabe que si $y = f(x)$, entonces la derivada dy/dx puede interpretarse como la razón de cambio de y con respecto a x.

Sea $x(t)$, donde "x" es derivable y "t" representa el tiempo, la posición instantánea de una partícula, de este modo:

(i) La tasa media de variación de $x(t)$ en el intervalo $[t, t + h]$ está expresada por el cociente $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$

(ii) La tasa (o razón) de variación instantánea de $x(t)$ con respecto a t es $\frac{dx}{dt} = x'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ es interpretada como la velocidad de la partícula.

A continuación, se describen dos ejemplos en el contexto de la física escolar, el primero sobre un movimiento rectilíneo y el segundo sobre el movimiento vertical de un proyectil:

El problema del semáforo. Un vehículo acelera inmediatamente después de cruzar un semáforo. Su aceleración constante es de 4.0 m/s2. En el tiempo t=0 s, el vehículo se encuentra a 5.0m del semáforo, y se mueve a una velocidad de 15m/s. Calcular (a) la posición y velocidad del automóvil en t=2.0s y (b) ¿a qué distancia se encuentra el automóvil cuando su velocidad es de 25m/s?

Solución

En la figura 57 se presenta un dibujo que ilustra la situación-problema, también aparecen los datos numéricos que proporciona el problema y que se corresponden con las variables mecánicas de la situación, a saber, el desplazamiento "d", el tiempo "t" y la velocidad "v".

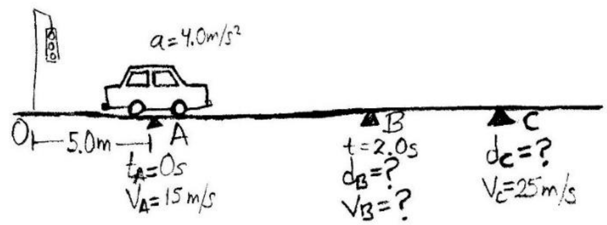


Figura 57. Dibujo del problema del semáforo.

Por otra parte, en la figura 57 las letras A, B y C se interpretan como tres distintos estados de movimiento del automóvil, mientras que la letra O se considera como el punto de referencia respecto al cual se describe el movimiento. De este modo, en el dibujo, un estado mecánico se representa mediante las variables mecánicas con un subíndice A, B ó C, por ejemplo, para el estado A se tiene el estado dA, tA y vA.

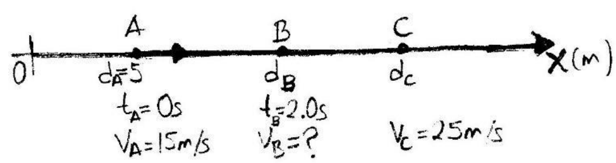


Figura 58. Representación esquemática del problema del semáforo.

En la resolución del problema también es de gran importancia la elaboración de un esquema con objeto de simplificar aspectos de la situación que no son indispensables para la resolución del problema. Por ejemplo, se puede prescindir del semáforo y de las dimensiones físicas del automóvil y considerarla como una partícula o punto, se puede considerar que el movimiento del automóvil es únicamente sobre una línea recta. Los elementos anteriores permiten elaborar la representación esquemática que se muestra en la figura 58. El esquema es una recta numérica "X" donde cada valor en la recta numérica que se encuentra a la derecha del origen "0" se interpreta como el desplazamiento del automóvil en metros (m), es decir, dA=5m, dB y dC. En el esquema también se presenta el tiempo y la velocidad para cada desplazamiento.

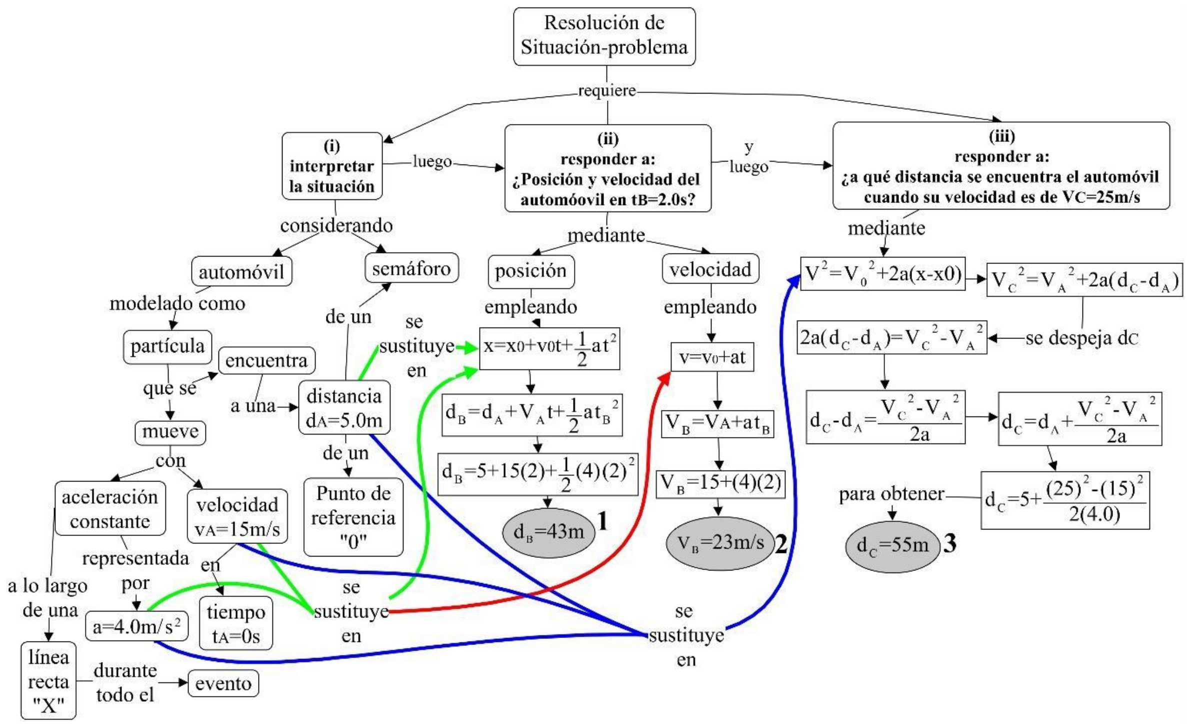


Figura 59. MCH correspondiente al problema del semáforo.

Finalmente, en la figura 59 se presenta de manera gráfica el proceso de resolución del problema. La resolución del problema requiere de la realización de tres prácticas etiquetadas como i, ii e iii. La práctica "i" consiste en la interpretación de la situación, y muestra una organización jerárquica de conceptos comenzando en la parte superior con conceptos de tipo material como *automóvil* y *semáforo*, hasta aquellos conceptos cada vez más abstractos que se encuentran en la parte media e inferior del mapa tales como el concepto de *partícula*, *línea recta*, *aceleración*, entre otros.

En la práctica "ii" la función $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ describe la posición de la partícula en cada instante de tiempo "t", cuando $t = 0$ la posición de la partícula es $x(0) = x_0 + v_0(0) + \frac{1}{2}a(0)^2 = x_0 = 5$. Por otra parte, la velocidad instantánea de la partícula se obtiene al derivar la función $x(t)$ respecto al tiempo, es decir, $v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at$. La velocidad en $t = 0$ es entonces $v(0) = v_0 + a(0) = 15$. De manera que a partir de $x(t)$ y $v(t)$ es posible calcular la posición y la velocidad en $t_B = 2.0$, lo cual fue determinado mediante (1) y (2) en el MCH de la figura 59.

Para resolver el inciso (b) del problema las funciones anteriores no son suficientes, debido a que se requiere una expresión que relacione la velocidad instantánea con la posición de la partícula. Por lo que en la práctica "iii" se consideró la ecuación de cinemática $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$, la cual permite calcular la posición de la partícula cuando ésta ha alcanzado la velocidad $v = 25$. En el MCH, despejando d_c y sustituyendo las condiciones iniciales se obtiene como solución (3).

Un problema de tiro vertical. La altura (en metros) de un proyectil disparado verticalmente hacia arriba, desde un punto 2m por encima del nivel del suelo con una velocidad inicial de 24.5m/s es $h = 2 + 24.5t - 4.9t^2$ después de "t" segundos. (a) encuentre la velocidad después de 2 segundos y después de 4 segundos, (b) ¿cuándo alcanza el proyectil su altura máxima?, (c)¿cuál es su altura máxima?

Solución

La resolución del problema de tiro vertical se ilustra en el MCH de la figura 60. Según el mapa, la resolución inicia con una práctica interpretativa que consiste en considerar las condiciones iniciales, ver (2), del problema a partir de la lectura del texto y, también, también en apoyarse en la ecuación de movimiento, ver (3).

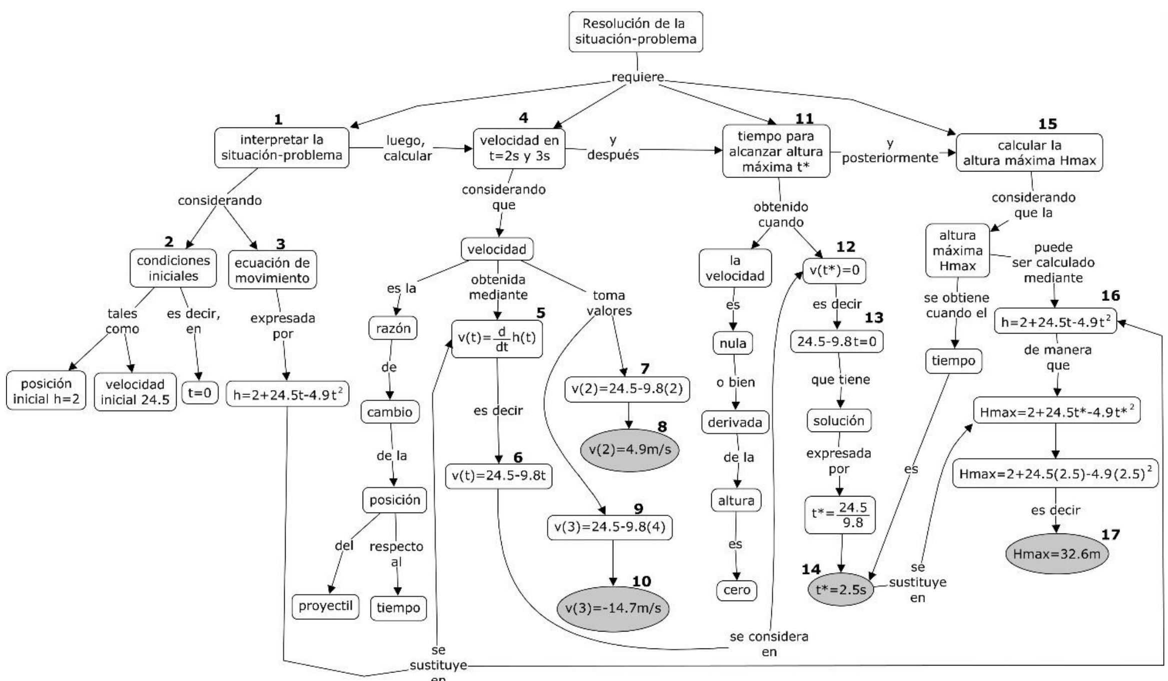


Figura 60. MCH que describe la resolución del problema de tiro vertical de un proyectil.

Posteriormente, la velocidad en 2s y 3s es obtenida a partir de la ecuación de la velocidad del proyectil "$v(t)$", la cual es obtenida al derivar la ecuación de movimiento, ver

(5)-(6). Una vez obtenida la velocidad instantánea, se sustituyen los tiempos y se calculan las velocidades, ver (7)-(8) y (9)-(10).

Por otro lado, a partir de la expresión de la velocidad instantánea también es posible obtener el tiempo en el que el proyectil alcanza la altura máxima, para lo cual es preciso igualar la ecuación de la velocidad a cero, ver (12)-(13), la cual permite obtener el tiempo en (14). Así mismo, a partir de este tiempo también es posible calcular la altura máxima del proyectil, al sustituir directamente en la ecuación de movimiento (16), lo cual permite obtener como resultado (17).

4.2 RECTA TANGENTE Y NORMAL DE UNA CURVA

La derivada de una función en un punto P puede ser interpretada como la pendiente de la recta tangente T a la gráfica C de dicha función en ese punto. Por otra parte, la recta normal a la curva C en el punto P es la recta a través de dicho punto que es perpendicular a la recta tangente T (Steward, 2012).

Si una función $y = f(x)$ posee una derivada en el punto x_1, la curva tiene una tangente en el punto $P(x_1, y_1)$. En la figura 61 se ilustra un MCH muestra un ejemplo de cómo resolver un problema en donde se solicita obtener la ecuación de la recta tangente ala gráfica de la función $y = x^2$ en el punto $P(1,1)$.

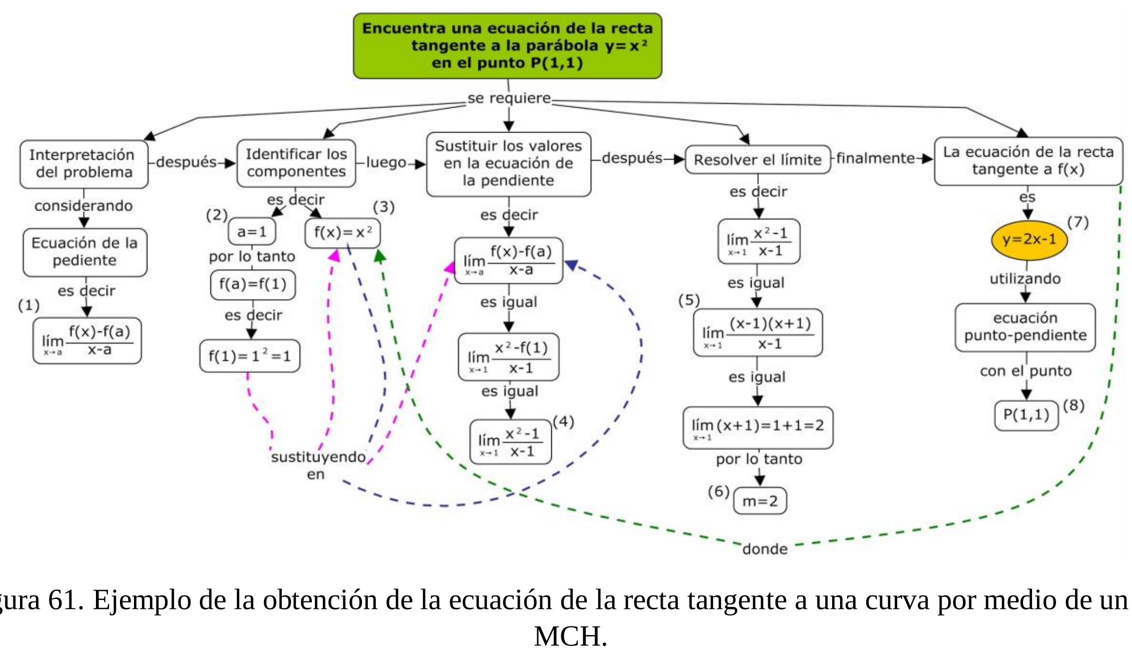


Figura 61. Ejemplo de la obtención de la ecuación de la recta tangente a una curva por medio de un MCH.

Según el MCH de la figura 61, la resolución del problema involucra una interpretación del problema que consiste en tomar en cuenta la definición de la derivada como el límite (1) de la función cuando “x” se aproxima a “a”. Posteriormente, se realiza una segunda práctica, que consiste en particularizar dicha fórmula a las condiciones del problema, esto es, interpretar mediante (2), (3) y evaluar la función en $a = 1$. Se realiza una tercera práctica donde se sustituyen las componentes de la práctica anterior, lo cual permite obtener el límite a calcular (4).

Posteriormente, en la cuarta práctica se resuelve el límite mediante una factorización por diferencia de cuadrados (5), que permite obtener (6) como la pendiente de la recta tangente. La ecuación de la recta tangente es obtenida en la última práctica al sustituir (6) en la expresión $y = mx + b$, esto es, $y = 2x + b$ para luego obtener “b” al sustituir las coordenadas del punto $P(1,1)$, es decir, $1 = 2(1) + b$, lo cual implica que $b = -1$, de manera que la ecuación de la recta tangente a P es (7).

Otra manera de calcular la recta tangente, y también la recta normal, sin hacer uso de la definición de derivada se ilustra en el MCH de la figura 62.

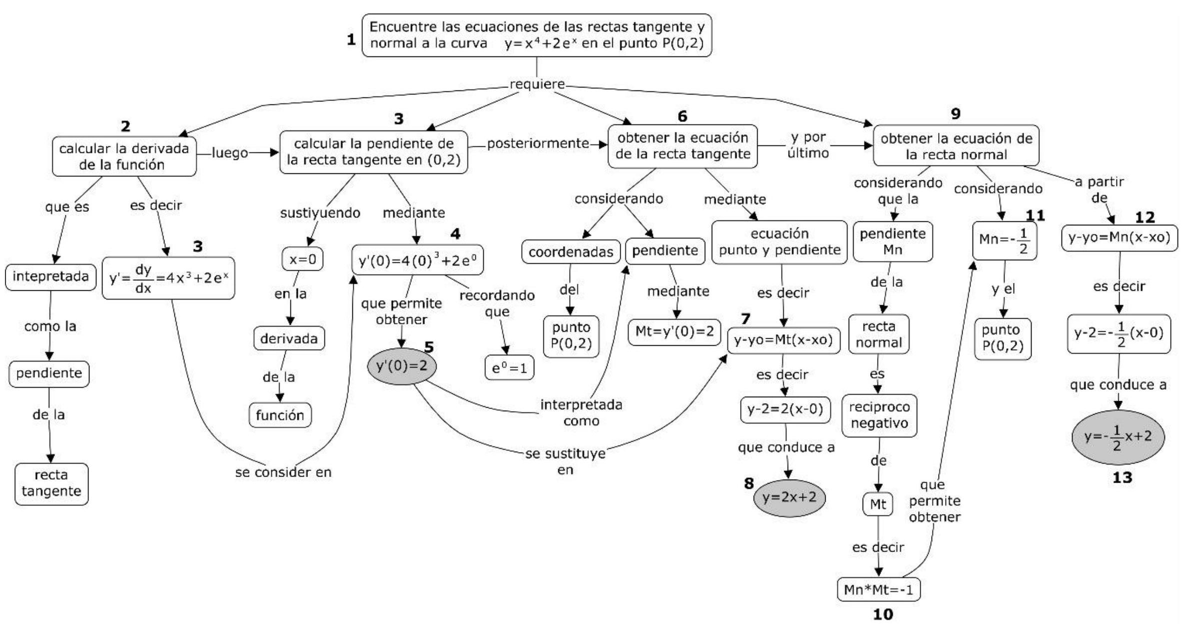


Figura 62. MCH que describe la resolución de un problema que involucra la recta tangente y perpendicular a la gráfica de una función.

Según el MCH de la figura 62, la resolución del problema (1) requiere primero calcular la derivada de la función, es decir (2)-(3). Y como la derivada puede ser interpretada como la pendiente de la recta tangente, en la segunda práctica numerada mediante (3) se calcula la pendiente de la recta tangente, ver (4)-(5) en la figura 62. En la tercera práctica numerada con (6) se emplea la ecuación punto pendiente para determinar la ecuación de la recta tangente mediante (7) y luego (8). Por último, en la práctica se emplea la propiedad (10) de que el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es menos uno, para poder determinar la pendiente de la recta normal (11) que es perpendicular a la recta tangente y, mediante la ecuación punto pendiente (12) con los parámetros adecuados, se determina la ecuación de la recta normal como (13).

4.3 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Una aplicación importante de la derivada es determinar dónde una función alcanza sus valores más grandes (máximos) y más pequeños (mínimos) en una región (extremos relativos) o en todo su dominio (extremos absolutos). Los máximos y mínimos también se le conocen como los extremos de una función.

La definición para un máximo relativo dice: *Si una función f tiene un **valor máximo relativo** en el número c si existe un intervalo abierto que contiene a c, en el que f está definida, tal que* $f(c) \geq f(x)$ *para toda x en ese intervalo.*

Por otro lado, la definición de un mínimo relativo dice: *La función f tienen un **valor mínimo relativo** en el número c si existe un intervalo abierto que contiene a c, en el que f está definida, tal que* $f(c) \leq f(x)$ *par toda x en este intervalo.*

En la figura 63 se muestra una función que tiene (a) un máximo relativo en el intervalo (0,3) y (b) un mínimo relativo en el intervalo (3,6).

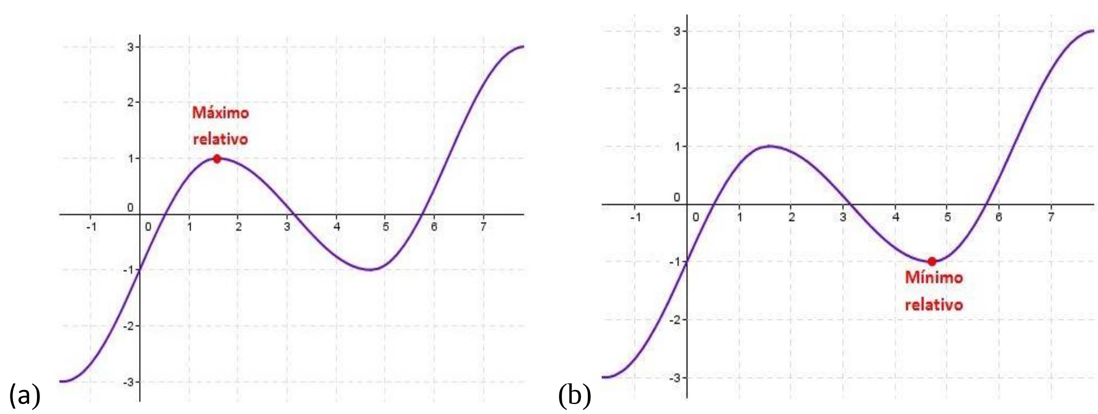


Figura 63. Representación gráfica de máximos y mínimos relativos (a) Máximo en el intervalo (0,3), (b) Mínimo en el intervalo (3,6).

Si una función tiene un valor máximo relativo o mínimo relativo en *c*, entonces se dice que la función tiene un extremo relativo o también conocido como extremo local en *c*. Los extremos relativos (locales) de una función f son los valores ya sea más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos) de una región del dominio.

El siguiente teorema es utilizado para determinar los números posibles en los que una función tiene un extremo relativo.

Si f(x) existe para todos los valores de x en el intervalo abierto (a,b) y si f tiene un extremo relativo en c, donde $a < c < b$*, y además* $f'(c)$ *existe, entonces* $f'(c) = 0$.

El teorema establece que, si *f* tiene un extremo relativo en *c*, y si $f'(c)$ existe, entonces la gráfica de *f* tiene una recta tangente horizontal en el punto donde $x = c$. Además, si *f* es diferenciable, entonces los únicos números posibles *c* para los cuales *f* puede tener un extremo relativo son aquellos en los que $f'(c) = 0$.

A este teorema también se le conoce como el **criterio de la primera derivada**, y además establece lo siguiente:

- Si $f'(x)$ cambia de signo de positiva a negativa en *c*, entonces *f* tiene un máximo relativo en *(c, f(c)).*
- Si $f'(x)$ cambia de signo de negativa a positiva en *c*, entonces *f* tiene un mínimo relativo en *(c, f(c)).*
- Si $f'(x)$ es positiva o negativa en ambos lados de *c*, entonces *f* (c) es un *punto de inflexión* (ni máximo ni mínimo).

Otro término que es importante conocer para determinar extremos relativos son los números críticos. Si *c* es un número de la función *f*, y si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe, entonces *c* es un número critico de *f*.

La definición de un valor máximo absoluto establece lo siguiente: *La función f tiene un* ***valor máximo absoluto en un intervalo*** *si existe algún número c en el intervalo tal que* $f(c) \geq f(x)$ *para toda x del intervalo. El numero f(c) es el valor máximo absoluto de f en el intervalo.*

Mientras que la definición de un valor mínimo absoluto menciona que: *La función f tiene un valor mínimo absoluto en un intervalo si existe algún número c en el intervalo tal que* $f(c) \leq f(x)$ *para toda x del intervalo. El numero f(c) es el valor mínimo absoluto de f en el intervalo.*

En la siguiente figura 64 se muestra la representación de los valores máximos y mínimos absolutos de una función en una gráfica.

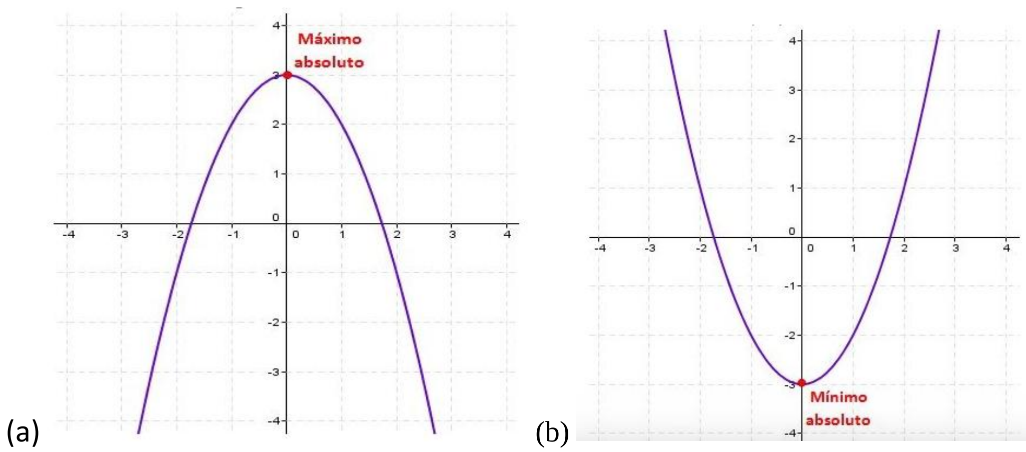


Figura 64. Representación gráfica de los máximos y mínimos absolutos. (a) Máximo absoluto en todo el dominio. (b) Mínimo absoluto en todo el dominio.

Por lo tanto, un **extremo absoluto** o también conocidos como **extremos globales** son aquellos valores de una función *f* más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos) de todo el dominio. Aunque puede determinarse el extremo absoluto de una función en un intervalo cuando se tiene un valor máximo absoluto o un valor mínimo absoluto de la función en el intervalo.

El *teorema del valor extremo* es utilizado para asegurar si una función tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en el intervalo, el teorema dice lo siguiente: *Si la función f es continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en [a,b].*

El teorema del valor extremo establece que la continuidad de una función en un intervalo cerrado es una condición suficiente para garantizar que la función tiene un máximo y mínimo absolutos en el intervalo.

En el MC de la figura 65 se muestra la diferencia que existe entre obtener extremos relativos (máximos y mínimos relativos) y extremos absolutos (máximos y mínimos absolutos).

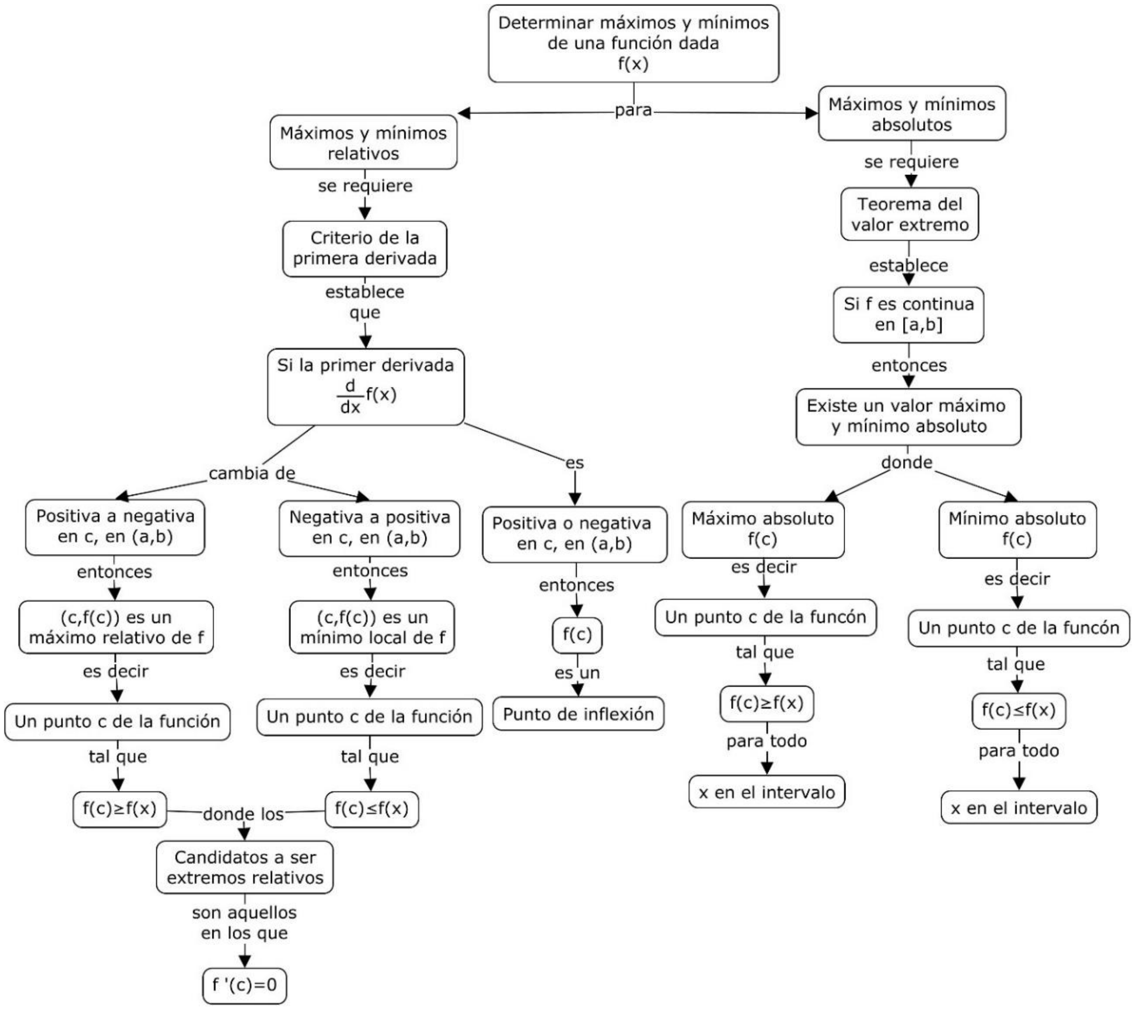


Figura 65. MC sobre la diferencia entre extremos relativos y extremos absolutos.

En la figura 65 se muestra la vía para determinar los extremos relativos o absolutos según sea el caso, en la parte izquierda se muestra los aspectos a considerar para determinar que un valor es máximo o mínimo relativo, en este caso, hace uso del criterio de la primera derivada para poder encontrar dichos valores; y en la parte derecha se muestra el teorema del valor extremos como el fundamento para determinar los valores máximos y mínimos absolutos.

Para poder mostrar a detalle los pasos para encontrar los valores máximos y mínimos se presenta en la figura 66 un MCH donde se determinar los valores máximos y mínimos relativos a partir de una función dada.

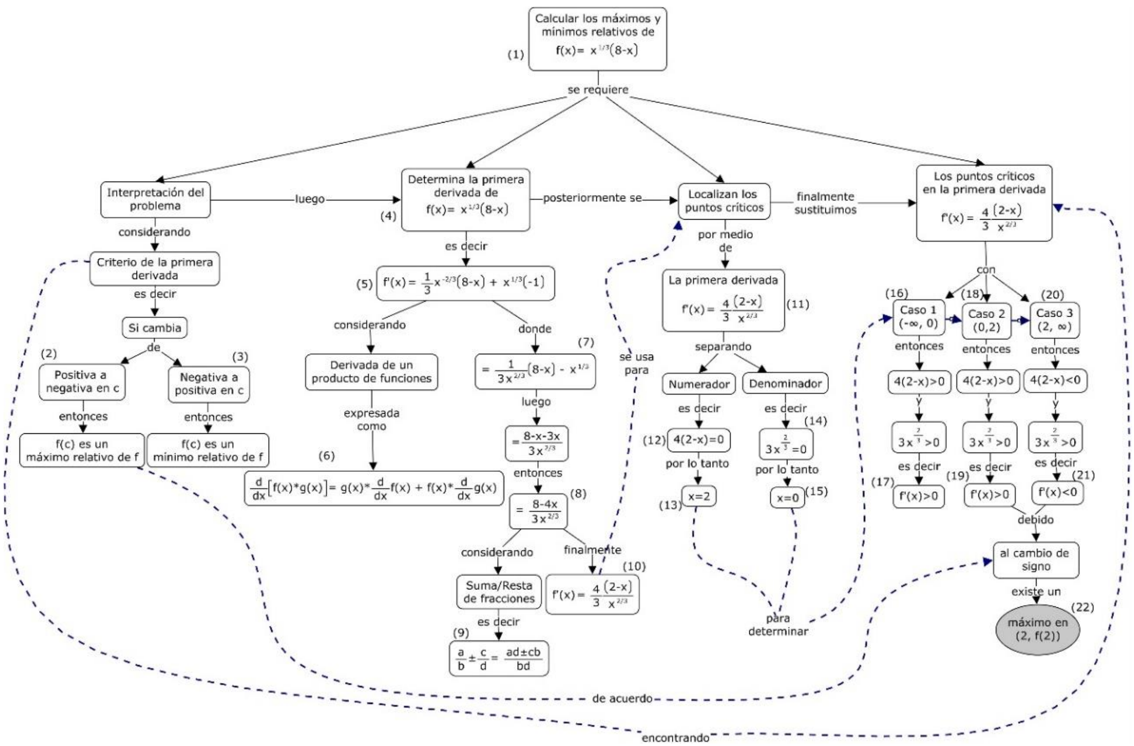


Figura 66. MCH de la resolución para encontrar máximos y mínimos relativos.

En la figura 66 se presenta el proceso de solución para encontrar los máximos y mínimos de la función (1) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(8 - x)$ donde para poder resolver este ejercicio es necesario tomar en cuenta el criterio de la primera derivada, es decir, si la función al ser evaluada en el punto c cambia de (2) positiva a negativa, entonces se tiene un máximo relativo, de manera similar, si cambia de (3) negativa a positiva, entonces es un mínimo relativo. El primer paso es (4) determinar la primera deriva de (1) quedando (5) mediante el uso de (6) derivada de una función potencia, donde al realizar la derivada nos queda (7), simplificando resulta (8) y se realizan las operaciones necesarias (9) y finalmente queda (10). Posteriormente se localizan los puntos críticos por medio de (11) por un lado tomando el numerador para despejar x (12) resultado (13), de manera análoga se toma el denominador (14) y resultado (15). Los resultados obtenidos en (14)-(15) se utilizan para determinar los intervalos (16)-(18)-(20) aplicando el criterio de la primera derivada resulta (17)-(19)-(21) respectivamente, finalmente al utilizar (2)-(3) nos queda el resultado final que es (22).

Ejercicio: Tomando como referencia el MCH de la figura x4, encuentra los máximos y mínimos de las funciones (i) $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 1$. (ii) $f(x) = 2x^2 - 3$

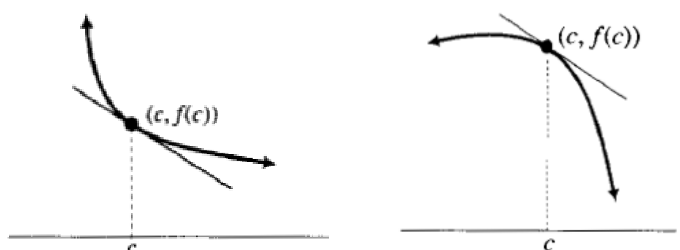
4.4 CONCAVIDAD Y PUNTO DE INFLEXIÓN, CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA INFLEXIÓN

La segunda deriva, al igual que la primera derivada aportan información relevante acerca del comportamiento de una función y su gráfica.

Se presenta la definición formal de concavidad hacia arriba. *Se dice que la gráfica de una función es* ***cóncava hacia arriba*** *en el punto (c, f(c)) si existe* $f'(c)$ *y un inetrvalo abierto (a,b) que contiene a c tal que para todos los valores de* $x \neq c$ *en (a,b), el punto (x,f(x)) de la grafica esta arriba de la recta tangente a la gráfica en (c, f(c)).*

Mientras que la concavidad hacia abajo establece: *se dice que la gráfica de una función es* ***cóncava hacia abajo*** *en el punto (c, f(c)) si existe* $f'(c)$ *y un intervalo abierto (a,b) que contiene a c tal que para todos los valores de* $x \neq c$ *en (a,b), el punto (x, f(x)) de la gráfica esta debajo de la recta tangente a la gráfica en (c,f(c)).*

En la figura 67 se muestra como se ve la concavidad de una función de manera gráfica.



(a) (b)

Figura 67. Gráfica de la concavidad de una función. (a) Cóncava hacia arriba en el punto *(c,f(c)).* (b) Cóncava hacia abajo en el punto *(c,f(c)).*

Para determinar si la gráfica de la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo se enuncia el siguiente Teorema de la "prueba de la concavidad", donde se emplea la segunda derivada para conocer el comportamiento de la función:

Sea f una función derivable en (a,b), y $c \in (a, b)$*; tal que* $f''(c)$ *existe*

- *Si* $f''(c) > 0$*, la gráfica de f es* ***cóncava hacia arriba*** *en el punto (c,f(c)).*
- *Si* $f''(c) < 0$*, la grfaica de f es* ***cóncava hacia abajo*** *en el punto (c,f(c)).*

A partir de la concavidad de una función se puede verificar si dicha función tiene un máximo relativo y un mínimo relativo, esta prueba de verificación se le conoce como el **criterio de la segunda derivada** el cual se basa en el hecho de que si la gráfica de una función *f* es cóncava hacia arriba en un intervalo abierto que contiene a *c*, y $f'(c) = 0, f(c)$

debe ser un mínimo relativo de *f.* De manera similar si la gráfica de una función es cóncava hacia abajo en un intervalo abierto que contiene a c y $f'(c) = 0, f(c)$ debe ser un máximo relativo de *f.* De manera formal se enuncia de la siguiente manera:

Sea *f* una función tal que $f'(x) = 0$ y la segunda derivada de *f* existe en un intervalo abierto *(a,b)* que contiene a *x*, entonces:

- Si $f''(x) < 0$, entonces *f* tiene un **máximo relativo** en *(x,f(x)).*
- Si $f''(x) > 0$, entonces *f* tiene un **mínimo relativo** en *(x,f(x)).*
- Si $f''(x) = 0$, entonces el criterio falla. Esto significa que *f* quizás tenga un máximo relativo en *x*, un mínimo relativo en *(x,f(x))* o ninguno de los dos.

En la figura 68 se muestra un ejemplo de la forma de determinar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^5 - 5x^3$ en base al criterio de la segunda derivada por medio de un MCH.

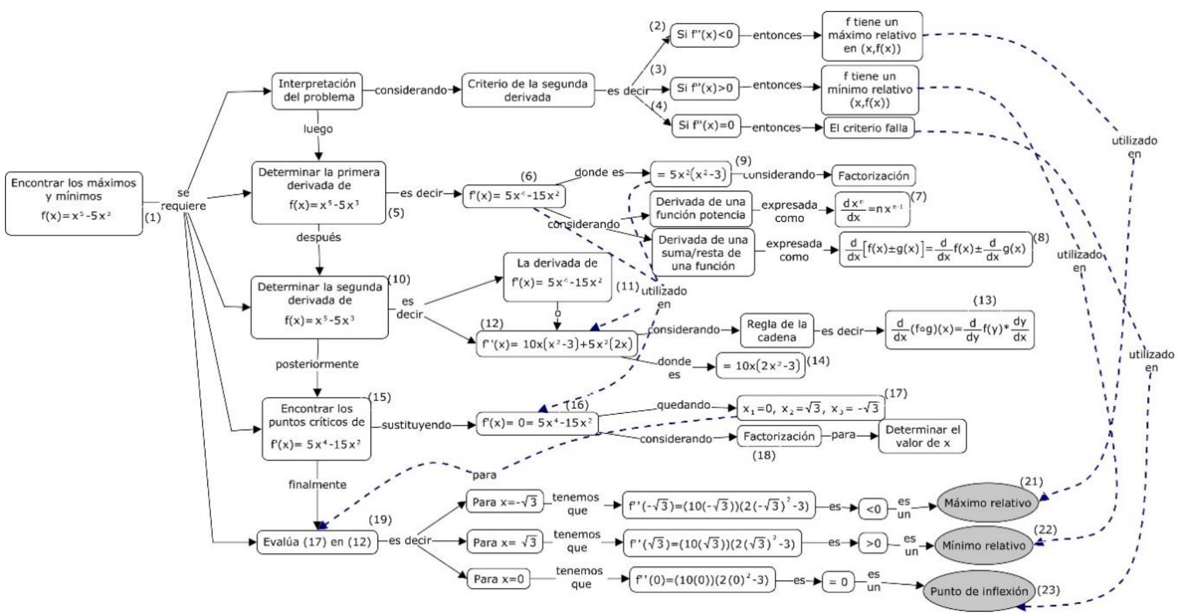


Figura 68. MCH de la determinación de máximos y mínimos con el criterio de la segunda derivada.

En la figura 68 se muestra por medio de un MCH la determinación de máximos y mínimos de la función $f(x) = x^5 - 5x^3$ en base al criterio de la segunda derivada para poder resolver este ejercicio es necesario tomar en cuenta el criterio de la segunda derivada, es decir, si la segunda derivada de la función (2) es menor que cero, entonces se tiene un máximo relativo, si (3) es mayor que cero, entonces es un mínimo relativo y si (4) es igual a cero, entonces es un punto de inflexión. El primer paso es (5) determinar la primera deriva de (1) quedando (6) por medio de (7) derivada de una función potencia y la (8) derivada de suma de funciones; factorizando nos resulta (9). Luego es necesario (10) determinar la segunda derivada de (1) donde al realizar la derivada de (9) o bien aplicando (11) la derivada de (6) nos resulta (12) por medio de la aplicación de la regla de la cadena que expresa en (13). Posteriormente se localizan los (15) puntos críticos por medio de (16) consiguiendo (17) por medio (18). Los resultados obtenidos en (17)-(12) se utilizan para ser (19) evaluados y de esta manera obtener el resultado final (21)-(22)-(23).

Si existe un punto en la gráfica de una función en que el sentido de la concavidad cambia, y la gráfica tiene una recta tangente en ese punto, entonces la gráfica cruza su recta tangente en ese punto. A dicho punto se le llama *punto de inflexión*, y se le define de la siguiente manera: Si *f* es diferenciable en *(a,b)* y $c \in (a, b)$ y si el punto (c,f(c)) es un **punto de inflexión**, entonces, si $f''(c)$ existe, entonces $f''(c) = 0$.

Para identificar los posibles puntos de inflexión basta con despejar la variable *x* de la ecuación que resulta que resulta una vez que se ha igualado la segunda derivada de la función a cero; o para los valores de *x* para los cuales la segunda derivada no existe. Por ejemplo, en la Figura 69 se ilustra un ejemplo que describe la resolución de un problema que se presenta en un libro de Cálculo (Leithold, 1998, p. 236) que implica el uso de los puntos de inflexión y la concavidad de una función potencia.

▶ **EJEMPLO 2** Dada

$$f(x) = x^{1/3}$$

encuentre el punto de inflexión de la gráfica de *f* y determine dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Apoye las respuestas gráficamente.

Solución Las derivadas primera y segunda de *f* son

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} \quad \text{y} \quad f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-5/3}$$

De las ecuaciones anteriores se observa que $f'(0)$ y $f''(0)$ no existen. En el ejemplo ilustrativo 3 de la sección 2.2, se mostró que el eje *y* es la recta tangente de la gráfica de esta función en el origen. Además,

$$f''(x) > 0 \quad \text{si } x < 0 \quad \text{y} \quad f''(x) < 0 \quad \text{si } x > 0$$

Por tanto, de la definición 3.5.4 (ii), *f* tiene un punto de inflexión en el origen. La concavidad de la gráfica se determina a partir del signo de $f''(x)$, los resultados se resumen en la tabla 3.

Tabla 3

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < 0$		+	+	*f* es creciente; la gráfica de *f* es cóncava hacia arriba
$x = 0$	0	n.e.	n.e.	La gráfica de *f* tiene un punto de inflexión
$0 < x$		+	−	*f* es creciente; la gráfica de *f* es cóncava hacia abajo

La figura 14, que muestra la gráfica de *f* trazada en el rectángulo de inspección de [−3, 3] por [−2, 2], apoya la información de la tabla 3. ◀

Figura 69. Problema resuelto sobre concavidad y puntos de inflexión (Leithold, 1998, p. 236).

El proceso de solución del autor del libro en la figura 69 no presenta de manera explícita la argumentación, los conceptos y las propiedades empleadas en la resolución del problema. Sin embargo, mediante el MCH es posible intuir y representar esquemáticamente el sistema de prácticas realizado por el autor, ver figura 70.

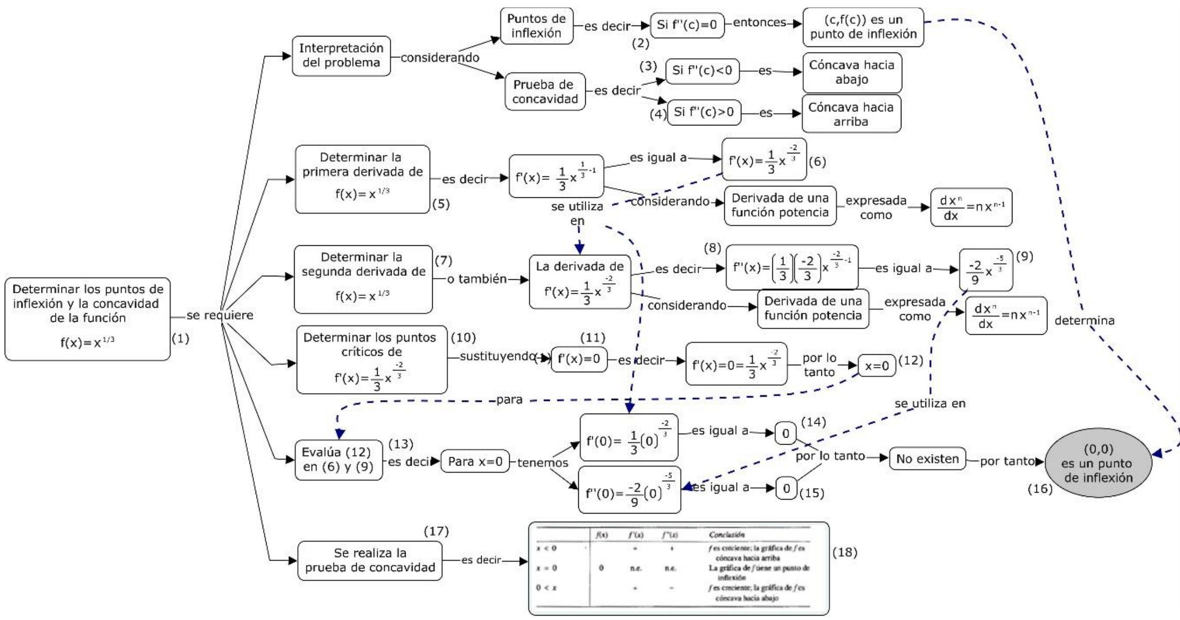


Figura 70. MCH para determinar concavidad y puntos de inflexión

En la figura 70 se muestra por medio de un MCH la determinación de los puntos de inflexión y la concavidad de la función $f(x) = x^{1/3}$ considerando la definición de puntos de inflexión que se refiere a (2) y la prueba de concavidad que enuncia (3) para cóncava hacia abajo y (4) para cóncava hacia arriba. El primer paso es (5) y consiste en determinar la primera deriva de (1) quedando (6). Luego es necesario (7) determinar la segunda derivada de (1) donde al realizar la derivada de (6) tenemos (8) por medio de la derivada de una función potencia quedando como se muestra en (9). Posteriormente se localizan los (10) puntos críticos sustituyendo (11) en (6) resultando el (12) valor de x. En (13) resultado obtenido en (12) se evalúa en (6) y (9) obteniendo (14)-(15) para determinar (16). Finalmente se realiza (17) por medio de (3)-(4) quedando (18) como resultado final (18).

Ejercicios: Basándote en el MCH de la figura x8 encuentre el punto de inflexión de la gráfica de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ y determina dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

4.5 APLICACIONES DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

La aplicación de la derivada para calcular máximos y mínimos se presenta en diversas áreas de conocimiento como en aritmética, geometría, economía, administración, etc., ya que en la práctica muchos problemas exigen minimizar un costo o maximizar un área, o bien encontrar el mejor resultado posible para una situación.

Para resolver los problemas que se presentan en cualquiera de estas áreas a partir de los datos existentes, es importante como primer momento encontrar la expresión matemática de la función que represente el problema y cuyos valores máximos y mínimos se desean obtener. Deberá plantearse en función de una sola variable, esto es, las condiciones del problema deben aportar suficientes relaciones entre las variables, para poderse expresar a todas ellas en función de una sola variable independiente. Una vez que se tenga la función en la forma $y = f(x)$, se aplican los señalamientos discutidos en las secciones 4.3 y 4.4.

Una de las aplicaciones más importantes de la derivada son los problemas de optimización, es decir, determinar donde una función alcanza sus valores máximos y/o mínimos. Algunos de los problemas que usualmente se resuelven son: ¿cuál debe de ser la forma de la lata que minimice los costos de fabricación?, ¿cuál es la aceleración máxima de un transbordador?, etc.

Para comprende más acerca del proceso de resolución de problemas de optimización se tomará como ejemplo el MCH de la figura 72, el cual describe la resolución del problema típico de la caja: *Un fabricante de cajas de estaño desea emplear piezas de 8x15 in, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando los lados, ver figura 71. Calcule la longitud necesaria del lado del cuadrado por cortar si desea obtener de cada pieza de estaño una caja sin tapa del máximo volumen posible*.

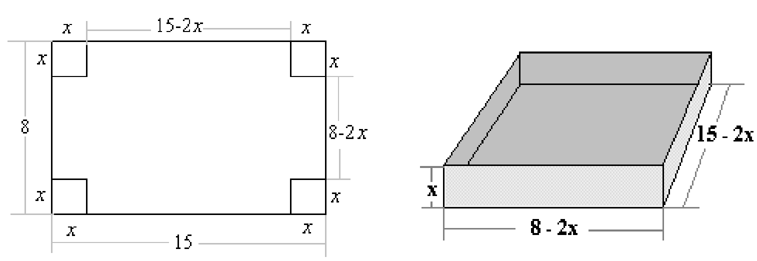


Figura 71. Problema de la caja de estaño. Pieza rectangular de estaño donde se recortan cuadrados en las esquinas (izq) y caja de estaño obtenida al doblar los lados (der).

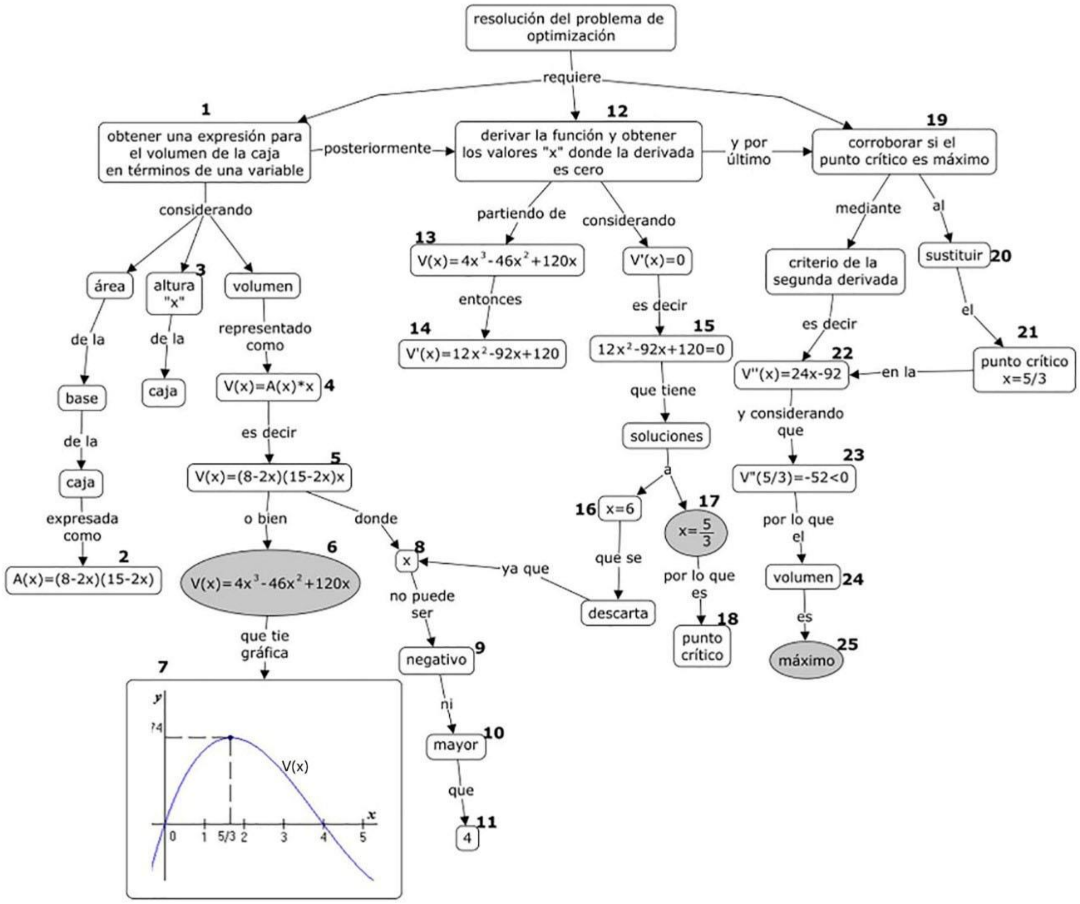


Figura 72. MCH que describe la resolución de un problema de optimización.

Según el MCH de la figura 72, la resolución del problema requiere como primer paso en (1) obtener una expresión para el volumen en término de una sola variable, para lo cual es necesario considerar el producto del área de la base de la caja (2) y la altura de la caja (3), lo cual permite obtener (4)-(5) y finalmente el volumen expresado como (6). La gráfica del polinomio cúbico obtenido se presenta (7) y en ella puede verse que el valor de “x” tiene que encontrarse en el intervalo $[0,4]$, es decir, debe cumplirse (8)-(9)-(10)-(11).

Posteriormente, en la segunda práctica numerada con (12), es necesario obtener los puntos críticos de la función (lo cual puede verse en (7) directamente). Para eso se calcula la derivada de la función mediante (13)-(14) y se iguala a cero en (15). La resolución de dicha ecuación permite obtener como punto crítico a (17). Se descarta la solución (16) pues ésta al exceder (11) carece de significado en el contexto del problema. Por último, se determina si el punto crítico encontrado es máximo mediante el criterio de la segunda derivada (22)-(23), lo cual permite encontrar que (17) corresponde a un máximo del volumen de la caja.

Ejercicio. Tomando como guía el MCH de la figura 71, resolver el problema de optimización: (i) *Si un lado de un campo rectangular va a tener como límite natural un río, halle las dimensiones del terreno rectangular más grande que puede cercarse usan 240m de valla para los otros tres lados del terreno*; (ii) *Halle el número en el intervalo [0,1] tal que la diferencia entre el número y su cuadro sea máxima*.

4.6 REGLA DE L'HOPITAL

Al aplicar un límite a un cociente formado por dos funciones, necesita el riesgo de que este valor indetermine la función, por ejemplo, si se analiza el comportamiento de la siguiente función, aplicando el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}$$

Se puede ver como al sustituir el valor del límite en el denominador, éste toma el valor de 0, al igual que el numerador, por tanto, el resultado queda como $\frac{0}{0}$ cuyo valor no está definido.

Si se toma la misma función, pero ahora tomando el límite cuando $x \to \infty$, es decir, $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x-1}$ aquí hay una lucha en el resultado final, ya que puede quedar 0 o ∞, dependiendo de quién gane, el numerador o el denominador. En cualquiera de los dos casos, el límite queda indeterminado, quedando como posible resultado el tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Por ello el principal uso de la Regla de L'Hopital es la resolución de límites que tienen alguna indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. A continuación, me enuncia la Regla de L'Hopital de manera formal:

Sean *f(x)* y *g(x)* dos funciones continuas y derivables en un intervalo *(a,b)* que contiene al punto x_0, de tal manera que:

- El límite de la función *f(x)* en el punto x_0, asi como el de *g(x),* es 0.
- La derivada de la función *g(x)* es distinto de cero en cualquier punto del intervalo *x* que sea distinto de x_0, es decir, $g'(x) \neq 0$.
- Existe el límite del cociente de las derivadas respectivamente en el punto x_0:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si se cumplen estas condiciones, entonces existe el límite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ y se calcula como:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Algunas observaciones para considerar se enuncian a continuación:

- Esta regla también se puede utilizar cuando la x tiende a infinito $(x \to \infty)$.
- La Regla de L'Hopital se puede aplicar tantas veces como sea necesario mientras sigan cumpliéndose las condiciones mencionadas anteriormente, hasta hallar el valor del límite.
- Esta regla también se puede aplicar en otro tipo de indeterminaciones, siempre y cuando hallamos realizado las transformaciones necesarias para convertir la indeterminación en una del tipo necesario para aplicar L'Hopital: $\frac{0}{0}$, o la de $\frac{\infty}{\infty}$.

En el siguiente MCH se muestra la forma de aplicar la regla de L'Hopital. La figura 73 ilustra el ejemplo de una función que tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

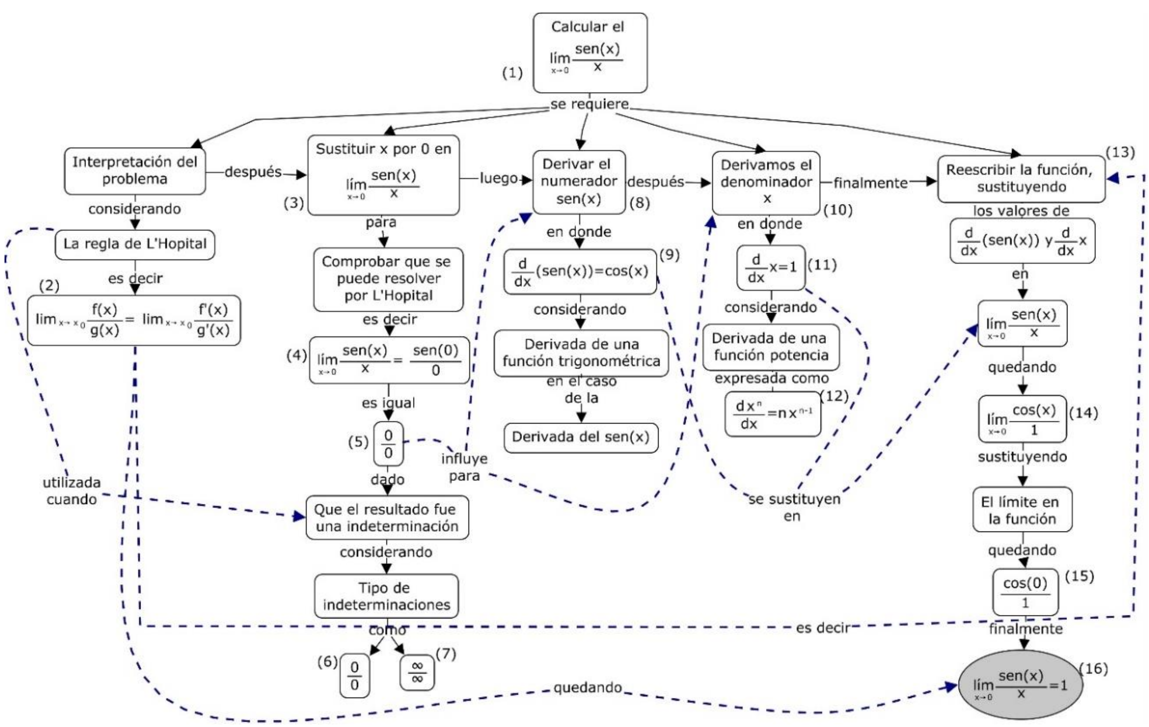


Figura 73. Resolución de una indeterminación aplicando la regla de L'Hospital.

En la figura 73 se muestra la solución para encontrar el límite la (1) función $\frac{sen\,(x)}{x}$ cuando x tiende a 0. Para la solución de este ejercicio es necesario considerar la regla de L'Hospital que se expresa en (2). El primer paso a realizar es (3) evaluar el límite en la función para verificar que posea alguna indeterminación, para lo cual resulta (4)-(5) basándose en los tipos de indeterminaciones como (6)-(7), al ver que si resulta una indeterminación se aplica la regla de L'Hospital, por lo cual se realiza primero (8) derivando el numerador donde resulta (9) considerando la derivada de las funciones trigonométricas, en seguida se realiza (10) la derivada del denominador resultando (11) considerando la derivada de una función potencia que se expresa en (12). Finalmente se (13) reescribe el límite tomando en cuenta (9)-(12) quedando como (14), (15) se evalúa el límite con esta nueva función quedando finalmente como (16).

A continuación, en la figura 74 se muestra otro ejemplo de la aplicación de la regla L'Hopital para resolver limites que poseen alguna indeterminación.

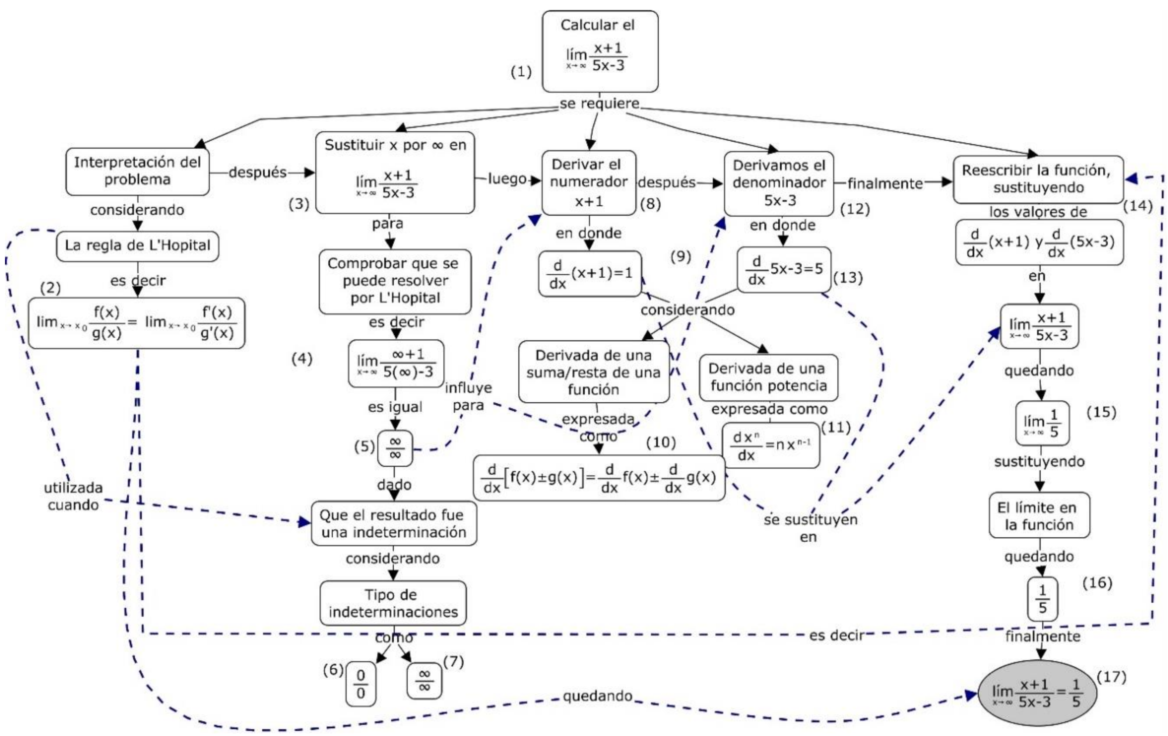


Figura 74. MCH ejemplo de la aplicación de la regla de L'Hospital.

En la figura 74 se muestra la solución para encontrar el límite la (1) función $\frac{x+1}{5x-3}$ cuando x tiende a ∞. Para la solución de este ejercicio es necesario considerar la regla de L'Hopital que se expresa en (2). El primer paso a realizar es (3) evaluar el límite en la función para verificar que posea alguna indeterminación, para lo cual resulta (4)-(5) basándose en los tipos de indeterminaciones como (6)-(7), al ver que si resulta una indeterminación se aplica la regla de L'Hopital, por lo cual se realiza primero (8) derivando el numerador donde resulta (9) considerando la (10) derivada de una suma de funciones y derivada de una función potencia expresada en (11), en seguida se realiza (12) la derivada del denominador resultando (13). Finalmente se (13) reescribe el límite tomando en cuenta (9)-(13) quedando como (15) se evalúa el límite con esta nueva función quedando finalmente como (16), por lo tanto, en (17) se expresa el resultado final mediante la aplicación de la regla de L'Hopital.

Ejercicios: Resuelve los siguientes limites usando como guía el MCH de la figura 74
(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x}$ **(ii)** $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

REFERENCIAS

Aguilar, T. M. F. (2006). El mapa conceptual una herramienta para aprender y enseñar. *Plasticidad y restauración neurológica*, *5*(1), 62-72.

Apostol, M. T. (1999). *Calculus, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal (Vol. 1)*, México: Reverté Ediciones S. A. de c. V.

Cañas, A. J. y Novak, J. D. (2009). *Cómo iniciar a los estudiantes en la Elaboración de Mapas Conceptuales*. Página web. http://cmap.ihmc.us/docs/introaulasecundaria.html

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1–2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39* (1), 37- 42.

Granville, W. A. (2009). *Cálculo diferencial e integral*, México: Editorial Limusa

Leithold, L. (1998). *El Cálculo. Séptima Edición* (Fidencio Mata González, trad.). México: Oxford University Press-Harla México, S.A de C.V. (Obra original publicada en 1994).

Moreno, M. N. (2017). Una representación gráfica de la práctica de resolución de problemas en cálculo diferencial. *Investigación en la Escuela*, *92*, 60-75. Recuperado de: http://www.investigacionenlaescuela.es/articulos/R92/R92-5

Moreno, M. N., Angulo, V. R. G. y Reducindo, R. I. (2018). Mapas Conceptuales Híbridos para la enseñanza de la física y matemática en el aula. *Innovación e Investigación en Matemática Educativa*, *3*(1), 113-130.

Pérez, F. R. (2006). Mapas Conceptuales y Aprendizaje de Matemáticas. En Cañas, A. J. y Novak, J. D. (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Concept Mapping* (pp. 407-414). San José, Costa Rica: Sección de Impresión del SIEDIN.

Steward, J. (2012). *Cálculo de una variable trascendentes tempranas (séptima edición)*, México: Cengage Learning Editores, S. A. de C. V.