UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

FACULTAD DE CIENCIAS

Notas sobre el Formalismo Hamiltoniano de Teorías con Simetrías de Norma y sus Aplicaciones

Oscar Jasel Berra Montiel
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Facultad de Ciencias
email: jasel.berra@uaslp.mx

San Luis Potosí, S.L.P.
Marzo 2017

Información para el lector

El objetivo de las presentes notas es introducir al lector en el estudio de sistemas Hamiltonianos con simetrías de norma. En la actualidad, este tipo de sistemas se encuentran prácticamente en todas las áreas de la física moderna, así como forman una herramienta fundamental en el estudio de diversos problemas en física-matemática, tales como el estudio de aspectos modernos en teoría cuántica de campos, formulaciones no perturbativas, métodos de cuantización algebráicos, topología de los espacios de soluciones, cuantización en variedades con curvatura, geometría no conmutativa, teorías en el retículo, por mencionar algunas. Como parte del contenido del programa de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, las notas sirven como material bibliográfico totalmente autocontenido para los cursos optativos de Temas Selectos de álgebra y geométria I y II. Las notas también forman parte como material complementario para el curso de Física Teórica II o alguna optativa enfocada al área de Física Teórica perteneciente a la Licenciatura en Física, ya que el formalismo Hamiltoniano para este tipo de sistemas ráramente es considerado en los cursos de licenciatura. Finalmente, el presente material sirve como material de apoyo en la materia de Cuantización de Sistemas de Norma, perteneciente al programa en la Maestría en Matemáticas Aplicadas y Física Matemática.

Contents

Chapter 1

Introducción

...I feel that there will always be something missing from them [non-Hamiltonian methods] which we can only get by working from a Hamiltonian.

—P.A.M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics.

En la actualidad, la teoría de la Relatividad General y la Mecánica Cuántica se encuentran entre los mayores logros intelectuales del siglo XX. Cada una de estas teorías ha alterado profundamente los conceptos que subyacen en nuestro entendimiento del mundo físico que nos rodea. Sin embargo, a pesar de que ambas han sido increíblemente exitosas describiendo los fenómenos físicos con un sorprendente grado de exactitud, cada una en su propio dominio, estas nos ofrecen dos retratos muy distintos de la realidad. A primera vista, incluso uno podría sorprenderse de como la física ha sido capaz progresar ante tal conflicto. Desde luego, la razón se encuentra en el hecho “accidental” de que las constantes fundamentales de nuestro universo conspiran para hacer la longitud de Planck tan pequeña, mientras que la energía de Planck es inmensamente grande. Es debido a esto, que hemos podido usar una precisa imagen geométrica de la relalidad, la cual está dada por la Relatividad General, cuando tratamos con fenómenos de carácter astrofísico; mientras que el mundo atómico y subatómico son descritos por la Mecánica Cuántica. Aunque esta estrategia es apropiada en la práctica, resulta ser bastante insatisfactoria desde un punto de vista conceptual; la raíz de esto se debe a que a lo largo de la historia, nuestra experiencia en la física nos dice que estos dos retratos del universo deben ser aproximaciones que surgen como límites de una teoría más fundamental, la cual debe representar una síntesis de la Relatividad General y la Mecánica Cuántica, es decir, una teoría cuántica de la gravedad. Es esta teoría la que debemos invocar cuando afrontamos fenómenos como el big bang y la evolución de agujeros negros, donde los mundos de la Relatividad General y la Mecánica Cuántica inevitablemente coinciden.

La necesidad de una teoría cuántica de la gravedad fué advertida por primera vez por Einstein en 1916 en la Preussische Akademie Sitzungsberichte. El escribió:

> *Nevertheless, due to the inneratomic movement of electrons, atoms would have to radiate not only electromagnetic but also gravitational energy, if only in tiny amounts. As this is hardly true in Nature, it appears that quantum theory would have to modify not only Maxwellian electrodynamics but also the new theory of gravitation.*

Los primeros trabajos sobre el tema comenzaron a aparecer a mediados de los años treinta, principalmente por Bronstein, Rosenfeld y Pauli. El objetivo era lograr para gravedad lo que se había obtenido para el caso de las otras fuerzas fundamentales. En aquel tiempo, el proceso de cuantización se había llevado a cabo de manera exitosa para el caso del campo electromagnético, usando tanto el enfoque canónico como el covariante. En el tratamiento canónico, y usando el principio de incertidumbre de Heisenberg como guía, los campos eléctrico y magnético surgen de manera natural como estados cuánticos invariantes de norma. Mientras que en el enfoque covariante uno cuantiza los modos de oscilación del campo de Maxwell en el espacio-tiempo, sin necesidad de llevar a cabo una descomposicón $(3+1)$, de esta manera, los estados cuánticos surgen como elementos de un espacio de Fock. En el caso del campo electromagnético, ambos métodos son completamente equivalentes, no obstante, en el caso gravitacional la diferencia es profunda. Esto no es accidental, y la razón se encuentra profundamente arraigada en una de las características fundamentales de la teoría, el doble papel que juega la métrica del espacio-tiempo.

Para apreciar mejor este punto tomemos como ejemplo a Maxwell, la cual es una teoría de campo definida en un espacio-tiempo de Minkowski. En este caso, los campos dinámicos son representados mediante un tensor, $F_{\mu\nu}$, en el espacio de Minkowski; mientras que la geometría del espacio-tiempo provee la noción de causalidad, es decir, la arena sobre la cual los campos se propagan. Finalmente, las isometrías de la métrica nos permiten construir cantidades físicas tales como flujos de energía, momento y momento angular, los cuales están asociados a las ondas electromagnéticas.

Por el contrario, en el caso de Relatividad General y las teorías invariantes bajo difeomorfismos, no existe una geometría de fondo. La métrica del espacio-tiempo es una variable dinámica fundamental, que de manera semejante al caso de la métrica de Minkowski, determina la geometría del espacio-tiempo, proporciona los conos de luz y determina la propagación de todos los campos físicos (incluída la métrica misma). Por otro lado, es el análogo al potencial gravitacional Newtoniano, y por lo tanto funge como la entidad dinámica básica de la teoría. Este doble papel que juega la métrica equivale precisamente al principio de equivalencia, el cual yace en el corazón de la teoría de la Relatividad General. Esta característica, es la responsable de la poderosa economía conceptual de la teoría, así como de su elegancia y belleza estética; sin embargo también es la causante de su extrañeza, la cual trae consigo una serie de problemas técnicos y conceptuales. Un ejemplo de las dificultades que surgen al no tener una geometría de fondo, es el problema para definir una energía y un momento. Debido a que *a priori* no tenemos un espacio-tiempo, para poder introduccir los conceptos básicos de causalidad,tiempo y evolución, es necesario resolver primero las ecuaciones de movimiento y construir a partir de ellas un espacio-tiempo.

En relación a la teoría cuántica, los problemas llegan a ser significativamente más serios. Debido al principio de inertidumbre, la Mecánica Cuántica nos dice que las partículas no tienen trayectorias bien definidas, y la evolución temporal solo se manifiesta mediante amplitudes de probabilidad. De manera similar, en una teoría cuántica de la gravedad, el espacio-tiempo no estaría completamente identificado, haciendo que las nociones físicas de causalidad, tiempo y estados asintóticos, no esten bien definidos.

Este tipo de problemas son abordados tanto por métodos canónicos como covariantes, sin embargo, la postura de ambos es dramáticamente diferente. En el enfoque canónico, el cual es el tema central de esta tésis, tiene como objetivo llevar a cabo una formulación hamiltoniana bien definida, para luego emplearla como paso previo al proceso de cuantización. Las relaciones fundamentales de conmutación dan origen a las relaciones de incertidumbre, mientras que los operadores definidos en hipersuperficies capturan de alguna manera las nociones de causalidad. El énfasis en estos tratamientos canónicos es preservar el carácter geométrico de la Relatividad General, y por ende de las teorías generalmente covariantes, reteniendo la fusión que existe entre gravedad y geometría, tal y como Einstein la formuló.

La primera etapa del programa, basada en la formulación hamiltoniana, fué llevada a cabo en los años sesenta por Dirac, Bergmann, Arnowitt, Deser, Misner y otros [2, 3, 4, 5]. En esta formulación, la variable dinámica fundamental es la 3-métrica, la cual está definida en hipersuperficies espaciales. Esto tiene como consecuencia, que la formulación hamiltoniana de Relatividad General pueda ser interpretada como una teoría dinámica de geometrías tridimensionales, la cual fué bautizada años despúes por Wheeler como geometrodinámica. En una segunda etapa, el mismo Wheeler llevó a cabo un ambicioso programa en el cual los números cuánticos asociados a las partículas elementales surgirían mediante configuraciones topológicas no triviales del espacio-tiempo cuántico, haciendo que la física de partículas pudiera reformularse como una química geométrica. Sin embargo, la mayor parte del trabajo concerniente a la geometrodinámica permaneció de manera formal, incluso en la actualidad, existen muchos problemas los cuales permanecen sin resolver. Posteriormente, el programa se enfrentó a otro tipo de limitaciones, los conceptos y técnicas que habían sido tan exitosas en la electrodinámica cuántica parecían no funcionar. En particular, en el marco de la geometrodinámica cuántica es complicado entender como emergen los gravitones, como calcular matrices de dispersión y como los diagramas de Feynman, mediante procesos virtuales, dan lugar a correcciones radiativas. En palabras de Weinberg, el énfasis de la geometría en el enfoque canónico acrecentó la brecha entre la Relatividad General y la teoría de las partículas elementales [6].

En el enfoque covariante [4, 7, 8], a diferencia del canónico, el énfasis fué puesto sobre las técnicas de teorías de campo, más que en la geometría. El primer paso de este programa es dividir la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$, en dos partes, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{G}h_{\mu\nu}$, donde $\eta_{\mu\nu}$, es una métrica de fondo, a menudo tomada como plana, G es la constante de Newton, y $h_{\mu\nu}$ es una desviación de la métrica, la cual da lugar a un campo dinámico. Por lo tanto, el doble papel que jugaba la métrica ahora está dividido. La actitud general, hacia sacrificar la fusión entre gravedad y geometría, es que es un precio bajo que pagar si queremos usar la poderosa maquinaria de la teoría de pertubaciones; de hecho esta división hace que la mayoría de los problemas conceptuales discutidos anteriormente desaparezcan. A nivel cuántico, el campo $h_{\mu\nu}$ se propaga sobre el espacio-tiempo de fondo $\eta_{\mu\nu}$, el cual si se toma como plano, define operadores de Cassimir sobre el grupo el Poincaré, dando lugar a una partícula de espín dos con masa cero, llamada gravitón. De esta manera, la teoría cuántica de la gravedad es reducida a una teoría cuántica de campos sobre un espacio de Minkowski.

Consecuentemente, una segunda etapa en el programa de cuantización covariante surgió con gran entusiasmo, el lema era: elige una lagrangiana, perturba y expande. Este entusiasmo fué generado por el descubrimiento de que la teoría de Yang-Mills, acoplada a fermiones, es renormalizable, lo cual llevó al origen de la teoría de las interacciones electrodébiles; la física de partículas fué testigo del renacimiento de la teoría cuántica de campos. Como era de esperarse, este entusiasmo contagió el area de Relatividad General, sin embargo, años depués el formalismo covariante sufrió su primer gran problema. Gravedad pura no es renormalizable a dos lazos, mientras que gravedad acoplada con materia no es renormalizable incluso a un lazo. Esto significa, que la teoría cuántica requiere de un número infinito de parámetros indeterminados, y aunque uno aún puede usar ésta como una teoría efectiva, a nivel fundamental no tiene poder predictivo alguno. Desde entonces, se ha invertido mucho esfuerzo en la posibilidad de tener teorías más sofisticadas, como es el caso de supergravedad $N = 8$ (siendo N el número de supersimetrías presentes), donde la cancelación de estos infinitos ocurren a orden de dos lazos, incluso si la teoría está acoplada con materia. Sin embargo, existe la creencia de que a ordenes más altos, la teoría continúe siendo no-renormalizable.

A mediados de los ochenta, tanto el enfoque canónico, el cual era mayoritariamente perseguido por los relativistas, como el covariante por la física de partículas, recibieron un impulso inesperado, el cual llevó a una tercera etapta en el desarrollo de la gravedad cuántica. Por el lado covariante, esta teoría corresponde a la teoría de cuerdas, cuya base ideológica radica en reemplazar las partículas puntuales por objetos extendidos unidimensionales, llamados cuerdas. Bajo este esquema las partículas corresponden a los modos de excitación de las cuerdas, incorporando una partícula de espín dos, la cual correspone al gravitón. Sin embargo, a pesar de todas las propiedades fascinantes de la teoría, perturbativamente presenta serias limitaciones, un ejemplo es el caso bosónico, en donde las series divergen incontrolablemente, el cual continúa siendo un problema sin resolver. Recientemente, la teoría de cuerdas está enfocada a problemas muy interesantes como es el caso de la dualidad ADS/CFT, y el uso de dualidades entre diferentes aspectos de la misma teoría.

Por el lado relativista, esta tercera etapa comenzó con la siguiente observación: el programa de geometrodinámica presentado inicialmente por Dirac, Bergmann, Wheeler, entre otros, se simplifica considerablemente si en lugar de tomar a la 3-métrica como el objeto fundamental, consideramos a la conexión. De hecho, actualmente se sabe que en los cincuentas, Schrödinger y el mismo Einstein habían expresado a Relatividad General como una teoría de conexiones. Sin embargo, ellos usaron la conexión de Levi-Civita, lo cual hizo que la teoría llegara a ser demasiado complicada. Tal vez, la ventaja mas importante de usar conexiones en lugar de métricas, es que el espacio fase de Relatividad General se comporta de manera similar al de las teorías con campos de norma usuales. La brecha entre Relatividad General y la teoría de las partículas elementales a la cual se refería Weinberg, es removida sin sacrificar la escencia geométrica de Relatividad General [9].
En particular, mientras que existe una geometría de fondo en la teoría de las interacciones débiles y fuertes, en el caso de gravedad surgen nuevas propiedades. Entre estas encontramos que el mundo es relacional, sólo los eventos independientes de las coordenadas son significativos, esto es las teorías deben ser generalmente covariantes. De la misma forma, el campo gravitacional corresponde a la geometría del espacio-tiempo, esto es, la geometría es un aspecto puramente dinámico. Relatividad General no es una teoría de campos en un espacio-tiempo curvo, es una teoría de campos, los cuales evolucionan unos con respecto a otros [10].

Dada la importancia del estudio de este tipo de sistemas en prácticamente todas las áreas de la física y su relación directa con aspectos geométricos, topológicos y dinámicos en diversos problemas en matemáticas, el tema principal de las presentes notas consiste en estudiar la estructura hamiltoniana de teorías con simetrías de norma, poniendo énfasis en algunas teorías invariantes bajo difeomorfimos mediante el *Método de Dirac o Algoritmo de Dirac-Bergmann.* En esta propuesta, y considerando el espíritu de la covariancia general de la Relatividad General, se considera a todas las variables presentes en la acción, como variables dinámicas. De esta manera, uno trabaja con el espacio fase completo, lo cual permite conocer de manera explícita la estructura completa de las restricciones y las transformaciones de norma. Este tratamiento, también nos proporciona la posibilidad de relacionar la estructura canónica de las teorías invariantes de norma con algunos aspectos sobre diferentes esquemas de cuantización, tales como la construcción de integrales de trayectoria y métodos discretos. Cabe señalar, que este formalismo resulta como punto de partida para estudiar aspectos modernos en teoría cuántica de campos, tales como formulaciones no perturbativas, métodos de cuantización algebráicos, topología de los espacios de soluciones, cuantización en variedades con curvatura, geometría no conmutativa, teorías en el retículo, solo por mencionar algunas.

Chapter 2

El formalismo de Dirac-Bergmann

En la física, las simetrías observadas en la naturaleza juegan un papel central en la construcción de cualquier teoría que pretenda describir algún fenómeno físico. Si la dinámica de una teoría es descrita a partir de una función lagrangiana, entonces esta función debe reflejar tales simetrías. Sin embargo, esto no significa que todas las simetrías de una acción debieran ser observadas. Actualmente, todas las teorías que describen las interacciones fundamentales son teorías invariantes con respecto a grupos de simetría locales o versiones espontáneamente rotas de éstas. Para las teorías de Yang-Mills ésta simetría corresponde a las transformaciones de norma, para relatividad general y teoría de cuerdas son los difeomorfismos, y las teorías supersimétricas son invariantes bajo transformaciones locales supersimétricas. En este tipo de teorías, comunmente llamadas teorías de norma o de manera mas general sistemas singulares, las simetrías locales relacionan diferentes soluciones que provienen de las mismas condiciones iniciales y por lo tanto la solución general a las ecuaciones de movimiento contiene funciones arbitrarias. Por lo tanto, existe un conjunto continuo de aceleraciones correspondientes a las mismas posiciones y velocidades iniciales. Este conjunto esta definido por las llamadas restricciones lagrangianas [1]. De esta manera, todas las teorías de norma son sistemas con restricciones.

En la práctica, la presencia de restricciones significa que la formulación de una teoría presenta cierta redundancia. Sin embargo, para que una teoría sea determinista, no es posible obtener diferentes soluciones que provengan de las mismas condiciones iniciales. Por consiguiente, éstas soluciones deben ser consideradas como dos representaciones diferentes de la misma configuración del sistema físico. El número de soluciones físicamente independientes es menor al que uno esperaría, teniendo en cuenta el número de condiciones iniciales requeridas en un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden. De ésta mamera, deben existir restricciones

[1] Para ser más preciso, este conjunto esta definido por las identidades de Bianchi válidas *off-shell*, es decir, expresiones que no hacen uso de las ecuaciones de movimiento.

adicionales sobre las condiciones iniciales, las cuales no forman parte de las ecuaciones de movimiento sino de las restriciones. Es precisamente por ésto que surgen las restricciones, es decir, funcionales del espacio fase que no proporcionan ecuaciones para las derivadas temporales de las variables canónicas. De manera mas precisa, las restricciones implican condiciones que deben ser satisfechas por los valores iniciales, al mismo tiempo que muestran cómo deben ser identificadas las diferentes representaciones de la misma solución física.

Los primeros trabajos sobre el estudio de sistemas singulares tienen mas de cincuenta años. Dirac, en sus trabajos clásicos, estableció el formalismo para tratar dichos sistemas de forma autoconsistente [1]. Años mas tarde, Bergmann en una serie de ensayos, investigó la conexión entre restricciones e invariancias [12, 13, 14]. Después de la introducción de las variables de Grassman para describir fermiones [15], el formalismo se extendió para incluir campos con espín semientero [16, 17]. El desarrollo culminó con la aparición del elegante y poderoso formalismo BRST [18]. Este y otros resultados clásicos han tenido un papel fundamental en la cuantización de teorías de norma, tanto en el formalismo de integral de trayetoria [19, 20] , como en el formalismo canónico [21, 22].

En la literatura existen excelentes tratamientos sobre sistemas singulares, además de los ensayos clásicos de Dirac [23]. Algunos se enfocan en sistemas con un número finito de grados de libertad [24], otros en teorías de campo [25, 26, 27, 28, 29].

En lo sucesivo, presentaremos una aproximación puramente lagrangiana al problema de las restriciones [24], la cual nos permitirá probar un importante nexo entre simetrías y sistemas singulares. Más adelante, introduciremos el elegante formalismo hamiltoniano, donde demostraremos que las simetrías locales están íntimamente relacionadas con las restricciones. Aunque ambas formulaciones tienen sus méritos, la conexión entre la existencia de simetrías de norma y las restricciones de primera clase como generadores de estas simetrías, sólo es manifiesta en el formalismo hamiltoniano.

2.1 Sistemas lagrangianos singulares

El punto de partida para estudiar la dinámica de los sistemas singulares es el principio de Hamilton, que en su forma lagrangiana para un sistema con un número finito de variables dinámicas establece que: entre todas las trayectorias en el espacio de configuración, que a los tiempos t_1 y t_2 pasan por dos configuraciones dadas, aquella que clásicamente sigue el sistema es la que hace que la acción

$$S\left[q^i(t)\right] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q^i(t), \dot{q}^i(t)\right) dt, \tag{2.1}$$

tenga un valor extremo o estacionario, con q^i las coordenadas, $\dot{q}^i = dq^i/dt$ sus respectivas velocidades y $n = 1, \ldots, N$. En esta sección asumiremos que la función lagrangiana depende a lo más de primeras derivadas, sin embargo, es posible hacer una generalización para teorías con derivadas de más alto orden [30]. La condiciones bajo las cuales la acción tiene un valor estacionario son las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0. \tag{2.2}$$

Claramente, la ecuaciones de movimiento de una acción que dependa de las variables de configuración y de sus correspondientes velocidades, son ecuaciones diferenciales de segundo orden. Sin embargo, obtenemos un conjunto completo de ecuaciones diferenciales de segundo orden, en general acoplado, sólo si la matriz

$$W_{ij} := \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \tag{2.3}$$

la cual multiplica a la segunda derivada de q^i en la ecuación (2.2), es no-degenerada. Si esto ocurre, uno puede invertir W_{ij}, también conocida como matriz hessiana, y obtener explícitamente las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{q}^i = \left(W^{-1}\right)^{ij}\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial q^j}\right), \tag{2.4}$$

en lugar de obtenerlas de manera implícita [2]. Por otro lado, si W_{ij} es degenerado, las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.2), nos dicen que q^i y $\dot{q}^i$ son tales que el vector definido como

$$V_i\left(q^j, \dot{q}^k\right) := -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial q^i}, \tag{2.5}$$

el cual proviene del principio variacional, y que es igual a $W_{ij}\,\ddot{q}^j$, se encuentre en la imagen de $W_{ij} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, visto como un mapeo lineal entre espacios vectoriales. Si W_{ij} no es invertible, la imagen bajo el mapeo anterior tiene una co-dimensión del mismo tamaño que el correspondiente espacio nulo, y por lo tanto el mapeo no es suprayectivo. De esta manera, V_i, debe encontrarse en un subespacio de dimensión menor que N, el cual no es linealmente independiente, imponiendo restricciones no triviales entre las variables de configuración y sus valores iniciales.

Como la matriz hessiana W_{ij} es una matriz simétrica, tiene $M = N - \operatorname{rango} W$ vectores nulos Y^i_s, con $s = 1, \ldots, M$, tal que $Y^i_s W_{ij} = 0$. Multiplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.2) por la matriz Y^i_s obtenemos

$$\phi\left(q^i, \dot{q}^i\right) := Y^i_s\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} + \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) = Y^i_s W_{ij}\,\ddot{q}^j = 0. \tag{2.6}$$

[2]Formalmente, la función lagrangiana es una funcional definida en el espacio tangente al espacio de configuraciones, de manera que sea lineal y suficientemente diferenciable. Esta funcional tiene como rango un espacio de Banach, o de manera mas general un espacio de Sobolev, ya que en estos espacios el teorema de la función implícita es válido [31, 32]

Estas funcionales son las restricciones que deben ser impuestas sobre q^i y $\dot{q}^i$, en particular, sobre sus valores iniciales los cuales evolucionarán de acuerdo a las ecuaciones diferenciales de segundo orden. A este tipo de restricciones se le conoce como restricciones lagrangianas.En la discusión anterior hemos demostrado que las ecuaciones de movimiento y las restricciones lagrangianas están contenidas en las ecuaciones de Euler-Lagrange. En lo subsecuente probaremos una importante relación entre simetrías locales y sistemas singulares, la cual nos dice que toda teoría de norma es necesariamente singular.

2.2 Identidades de Bianchi generalizadas

Si una teoría posee una simetría local, es posible mapear soluciones en soluciones sin cambiar las condiciones iniciales. Por lo tanto esperaríamos que las teorías de norma sean sistemas singulares, esta propiedad se deriva de las llamadas identidades de Bianchi generalizadas [33, 34], las cuales derivaremos a continuación. Por simplicidad, en lugar de usar un sistema con un número finito de grados de libertad usaremos el formalismo de teoría de campos [3](más adelante veremos las sutilezas de como pasar de un sistema mecánico de dimensión finita a uno continuo de dimensión infinita). Sean las tranformaciones de punto definidas como

$$\begin{aligned} x' &= x'(x) \sim x + \delta x, \\ \varphi'(x') &= \varphi'(\varphi(x), x) \sim \varphi(x) + \delta\varphi(x), \end{aligned} \tag{2.7}$$

las cuales dejan las acción invariante

$$\int d^d x' \mathcal{L}(\varphi', \partial'\varphi', x') = \int d^d x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, x), \tag{2.8}$$

forman un grupo continuo de transformaciones, las cuales implican

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_\mu \delta x^\mu = \partial_\mu(\mathcal{L}\delta x^\mu) + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^a)}\bar{\delta}\varphi^a\right) + L_a\bar{\delta}\varphi^a, \tag{2.9}$$

[3]En una teoría de campo la dinámica es descrita por funciones $\varphi^a(x)$, definidas en el espacio-tiempo con valores en cierto espacio de Banach. Para pasar de la mecánica puntual a una teoría de campo podemos reemplazar lo íncides discretos por índices continuos:

$$q^i(t) \longrightarrow \varphi^a(x),$$

sumatorias por integrales:

$$\sum_i q^i q^i \longrightarrow \sum \int dx \varphi^a \varphi^a,$$

y las derivadas de funciones se convierten en derivadas funcionales:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} \longrightarrow \frac{\delta L}{\delta\varphi^a(x)}.$$

donde L_a son las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo φ^a y

$$\bar{\delta}\varphi^a = \delta\varphi^a - \partial_\mu\varphi^a\delta x^\mu \sim \varphi^{a'}(x) - \varphi^a(x), \tag{2.10}$$

es una diferencia infinitesimal entre las nuevas y las viejas transformaciones en un mismo punto. Debido a la invariancia de la acción se sigue que

$$\partial_\mu\left(\mathcal{L}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu\varphi^a})}\bar{\delta}\varphi^a - \lambda^\mu\right) + L_a\bar{\delta}\varphi^a = 0, \tag{2.11}$$

donde λ es una función continua. A la expresión anterior se le conoce como las identidades de Bianchi generalizadas, podemos notar que en ningún lado hemos usado las ecuaciones de movimiento, y por lo tanto las ecuaciones (2.11) son identidades *off-shell*. Asumamos ahora que la acción es invariante bajo transformaciones locales, entonces podemos parametrizar las transformaciones a través de funciones dependientes del espacio-tiempo

$$\delta_\epsilon x^\mu \;=\; \epsilon_\alpha A^{\alpha\mu}, \qquad \delta_\epsilon\varphi^a = \epsilon_\alpha B^{\alpha a} + \partial_\mu\epsilon_\alpha C^{\alpha a\mu}, \tag{2.12}$$

donde $\epsilon_\alpha(x)$ parametriza las transformaciones locales infinitesimales y B y C son los llamados descriptores o parámetros de norma [12], los cuales generalmente dependen de las coordenadas y sus derivadas. Sustituyendo esta expresión en las identidades de Bianchi generalizadas (2.11), obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & L_a\left(B^{\alpha a} - \partial_\mu\varphi^a A^{\alpha\mu} - \partial_\mu C^{\alpha a\mu}\right) - C^{\alpha a\mu}\partial_\mu V^a \\ & + C^{\alpha a\mu}\left(\partial_\mu W^{\rho\sigma}_{ab}\partial_\rho\partial_\sigma\varphi^b + W^{\rho\sigma}_{ab}\partial_\mu\partial_\rho\partial_\sigma\varphi^b\right), \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde W es la matriz hessiana. Ya que no hemos hecho uso de las ecuaciones de movimiento, podemos concluir que

$$C^{\alpha a(\mu}W^{\rho\sigma)}_{ab} = 0, \tag{2.14}$$

donde los paréntesis significan simetrización entre los índices. En particular si los parámetros $C^{\alpha a\mu}$ son distintos de cero, corresponden a los vectores nulos de la matriz Hessiana W, haciendo que el sistema sea singular. Por otro lado si $C = 0$, la ecuación (2.13) se reduce a

$$\left(B^{\alpha a} - A^{\alpha\rho} - A^{\alpha\rho}\partial_\rho\varphi^a\right)W^{(\mu\nu)}_{ab} = 0. \tag{2.15}$$

De esta manera concluímos de nuevo que el sistema es singular. Hemos probado un importante resultado, el cual nos dice que *todas las teorías de norma son necesariamente singulares.* Sin embargo, el razonamiento recíproco no es válido ya que existen sistemas singulares que no corresponden a una teoría de norma [26].

2.3 Formulación hamiltoniana para sistemas con retricciones

En la formulación hamiltoniana, al igual que en la formulación lagrangiana, es posible demostrar de donde surgen las restricciones. Usando la definición usual de los momentos canónicos

$$p_i\left(q^j, \dot{q}^j\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \tag{2.16}$$

obtenemos N variables independientes sólo si la matriz $W_{ij} = \partial p_i / \partial \dot{q}^j$, que es idénticamente igual a la matriz hessiana (2.3), es invertible de tal forma que podemos resolver al menos de manera local $\dot{q}^i$. De otra manera, el mapeo $(q^i, \dot{q}^i) \mapsto (q^i, p_i\left(q, \dot{q}\right))$, el cual para el caso de sistemas sin restricciones es una transformación uno a uno en el espacio fase, define una subvariedad de dimensión menor a la cual denotaremos como Γ_p. La imagen de esta tranformación puede ser caracterizada por las restricciones primarias $\phi_s\left(q^i, p_j\right) = 0$, es decir, un conjunto de funciones definidas en el espacio fase que representan a la subvariedad Γ_p. De hecho las funciones ϕ_s pueden ser consideradas como coordenadas transversales a la imagen de $(q^i, \dot{q}^i) \mapsto (q^i, p_i\left(q, \dot{q}\right))$. Localmente, el espacio fase completo dado por todas las $(q^i, \dot{q}^i)$ puede ser caracterizado por las coordenadas (q^i, p_j, ϕ_s), sin embargo, pudieran no existir expresiones globales. Afortunadamente en la mayoría de los casos de interés, las constricciones primarias surgen a partir de la acción, del mismo modo en que lo hacen los momentos canónicos. Por ejemplo, si una variable, digamos q, cuya primera derivada no aparece en la acción o aparece sólo a través de términos de frontera, entonces $p = \partial L / \partial \dot{q} = 0$, y corresponde inmediátamente a una restricción primaria.

Existen diferentes maneras de representar a la superficie definida por las restricciones primarias Γ_p. Sin embargo es necesario imponer condiciones en la elección de las funciones ψ_s, para que sean consistentes con el formalismo Hamiltoniano. A estas condiciones se les conoce con el nombre de *condiciones de regularidad*, las cuales pueden ser enunciadas, de manera alternativa, como:

1. Las funciones independientes ϕ_s, con $s = 1, \ldots, M$, pueden tomarse localmente como las primeras M coordenadas de un sistema coordenado regular en una vecindad de Γ_p.

2. Los gradientes $d\phi_1, \ldots, d\phi_M$, son localmente independientes en la subvariedad Γ_p, es decir, $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_M \neq 0$ en Γ_p.

Por ejemplo, si ϕ es una restricción admisible, ϕ^2 no lo es, ya que $d\left(\phi^2\right) = 2\phi d\phi = 0$ en Γ_p. Una vez que nuestras restricciones son regulares, podemos continuar con la formulación Hamiltoniana.

2.3.1 Las ecuaciones de Hamilton

Uno podría suponer que existen ciertos obstáculos para definir un Hamiltoniano en un sistema con restricciones debido a que la transformada de Legendre

$$H = \dot{q}^i p_i \left(q, \dot{q}\right) - L \left(q, \dot{q}\right), \tag{2.17}$$

implica relaciones entre las velocidades, $\dot{q}^i$, y los momentos, p_j. Si las relaciones (2.16) no pueden ser invertidas para reemplazar las $\dot{q}^i$ en términos de las p_j, sería imposible obtener una función Hamiltoniana, $H\left(q,p\right)$, definida en el espacio fase.

A pesar de la no invertibilidad en el caso con restricciones, la función Hamiltoniana es siempre una funcional bien definida de q^i y p_j. Para asegurar esto, debemos probar que el valor de H en la expresión (2.17) no cambia cuando variamos $\dot{q}^i$ mientras dejamos fijo el valor de p_j. Estas variaciones son posibles ya que existe un número menor de p_j independientes que de $\dot{q}^i$ en la presencia de restricciones primarias. Usando el mapeo de $\dot{q}^i$ a p_j, el espacio fase original de posiciones y velocidades es fibrado por subvariedades que consisten en todos los puntos que son mapeados a los mismos valores de $\left(q^i, p_j\right)$. Para que una función esté bien definida en $\left(q^i, p_j\right)$, debemos asegurarnos que es constante a lo largo de las fibras, es decir, que su variación dependa sólo de las variaciones de q^i y de p_j, pero no de $\dot{q}^i$.

Usando la definición de los momentos canónicos (2.16), los cuales implícitamente contienen la información sobre las restricciones primarias, la variación de la ecuación (2.17) implica que

$$\delta H = \dot{q}^i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i = \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i. \tag{2.18}$$

La última ecuación puede ponerse en términos de la variación de una función definida en el espacio fase de momentos

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j, \tag{2.19}$$

ya que depende sólo de las variaciones de q^i y de p_j, mientras que las variaciones con respecto a $\dot{q}^i$, han sido canceladas una vez que se usó la definición de los momentos. Por lo tanto H es una función bien definida en la superficie generada por las restricciones primarias. [4]

[4] El ejemplo de una función que no está bien definida en la superficie generada por las restricciones primarias es $\dot{q}^i$. Su valor no está determinado solamente especificando un punto de $\left(q^i, p_j\right)$ en la superficie de restricción Γ_p. De acuerdo con lo anterior, la variación a lo largo de $\dot{q}^i$ puede ser expresado en términos de q^i y de p_j sólo si $\dot{q}^i$ es una de las velocidades expresables en términos de los momentos, es decir, una de las velocidades que no den una restricción.

La transformada de Legendre nos determina una función, $H\left(q^i, p_j\right)$, definida en la superficie de restricciones primarias, Γ_p, cuya variación usando las ecuaciones (2.18) y (2.19) satisface

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q^i}+\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)\delta q^i+\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}-\dot{q}^i\right)\delta p_i=0, \tag{2.20}$$

para cualquier variación $\left(\delta q^i, \delta p_i\right)$ tangente a la superficie definida por las restricciones primarias. Escribiendo ésta ecuación de la forma

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q^i}+\frac{\partial L}{\partial q^i}\,,\,\frac{\partial H}{\partial p_i}-\dot{q}^i\right)\begin{pmatrix}\delta q^i\\ \delta p_j\end{pmatrix}=0, \tag{2.21}$$

podemos observar que el vector

$$\upsilon:=\left(\frac{\partial H}{\partial q^i}+\frac{\partial L}{\partial q^i}\,,\,\frac{\partial H}{\partial p_i}-\dot{q}^i\right),$$

debe ser normal a la superficie de restricción. Debido a que esta superficie es representada por las funciones $\phi_s=0$, con $s=1,\ldots,M$, una base para el espacio normal está dada por los gradientes

$$\nu_s:=\left(\frac{\partial \phi_s}{\partial q^i}\,,\,\frac{\partial \phi_s}{\partial p_j}\right),$$

de todas las restricciones primarias. De esta manera, hemos demostrado que $\delta=\sum_s \lambda^s\nu_s$, donde λ^s, son funciones definidas en el espacio fase, o escrito de otra forma

$$\frac{\partial H}{\partial q^i}+\frac{\partial L}{\partial q^i} = \lambda^s\frac{\partial \phi_s}{\partial q^i}, \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}-\dot{q}^i = \lambda^s\frac{\partial \phi_s}{\partial p_i}. \tag{2.23}$$

Finalmente hemos obtenido las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}-\lambda^s\frac{\partial \phi_s}{\partial p_i}, \tag{2.24}$$

$$\dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}+\lambda^s\frac{\partial \phi_s}{\partial q^i}. \tag{2.25}$$

Comparando las expresiones anteriores con las ecuaciones de Hamilton para sistemas sin restricciones [35], observamos que surgen nuevos términos debido a las restriciones. Sin embargo, escribiendo

$$\dot{q}^i = \frac{\partial\left(H-\lambda^s\phi_s\right)}{\partial p_i}+\frac{\partial \lambda^s}{\partial p_i}\phi_s, \tag{2.26}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial\left(H-\lambda^s\phi_s\right)}{\partial q^i}-\frac{\partial \lambda^s}{\partial q^i}\phi_s, \tag{2.27}$$

advertimos que las ecuaciones anteriores, módulo términos que son cero en la superficie de restricción definida por $\phi_s = 0$, pueden verse como las ecuaciones de Hamilton usuales para la función Hamiltoniana primaria, H_p, dada por

$$H_p = H - \lambda^s \phi_s. \tag{2.28}$$

De esta manera, podemos escribir las ecuaciones de Hamilton como

$$\dot{q}^i \approx \frac{\partial H_p}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i \approx -\frac{\partial H_p}{\partial q^i}, \tag{2.29}$$

donde el signo de la igualdad débil, $\approx$, denota una identidad módulo términos que son cero sobre la superficie de restricción Γ_p. Mientras que el valor de la Hamiltoniana primaria no cambia cuando se añaden retricciones primarias y es independiente de λ^s, la evolución que genera depende de las derivadas de ϕ_s. A diferencia de ϕ_s, sus derivadas pudieran no ser cero, y por lo tanto la evolución depende de las funciones λ^s. Debido a esto, conviene introducir el concepto de igualdad fuerte e igualdad débil.

Definición 2.3.1 *Una funcion F definida en una vecindad de Γ_p, es débilmente igual a cero si,*

$$F\,|_{\Gamma_p} = 0, \tag{2.30}$$

donde Γ_p es la subvariedad definida por las restricciones primarias. Por otro lado, se dice que F es fuertemente igual a cero si,

$$F\,|_{\Gamma_p} = 0, \quad y \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial q^i}, \frac{\partial F}{\partial p_i}\right)|_{\Gamma_p} = 0. \tag{2.31}$$

Teniendo en cuenta estas definiciones y del hecho que las restricciones satisfacen las condiciones de regularidad, podemos demostrar la siguiente propiedad [26]

Teorema 2.3.1 *Si $F(q,p)$ es una función (suave) débilmente igual a cero, entonces $F = f^m \phi_m$, para algunas funciones f^m.*

Prueba
Elijamos un conjunto independiente de restriciones, ϕ_m, tal que formen las primeras coordenadas de un sistema coordenado regular (ϕ_m, x) en una vecindad de la superficie de restricción Γ_p. Debido a que $F(0,x) = 0$, tenemos

$$F(\phi, x) = \int_0^1 \frac{d}{d\tau} F(\tau\phi, x)\, d\tau = \phi_m \int_0^1 F_{,m}(\tau\phi, x)\, d\tau, \tag{2.32}$$

por lo tanto

$$F = f^m \phi_m \quad \text{donde} \qquad f^m = \int_0^1 F_{,m}(\tau\phi, x)\, d\tau. \tag{2.33}$$

Esto prueba el teorema en una vecindad U de cualquier punto de Γ_p. Para extender el resultado de manera global, consideremos una cubierta de la superficie de restricción a través de conjuntos abiertos, U_i, en los cuales la prueba anterior es válida. Para completar la cubierta en todo el espacio fase, añadimos conjuntos abiertos, V_k, tales que no intersectan la superficie definida por las restricciones Γ_p, de tal forma que en V_k tenemos que $F = (F/\phi_m)\,\phi_m$. Por lo tanto en cada V_k la propiedad $F \approx 0$, implica $F = f^m \phi_m$. Finalmente hemos construido una cubierta del espacio fase por abiertos $O_\alpha = (U_i, V_k)$, tales que en cada O_α la función F es débilmente igual a cero. Sin embargo, no podemos garantizar que las funciones f^m sean iguales en la intersección de dos vecindades $O_\alpha \cap O_\beta$. Para esto, usaremos la propiedad de una partición finita de la identidad, es decir, definamos un conjunto de funciones suaves no negativas g_α, que cumplen las siguientes propiedades:

1. El $supp\, g_\alpha \subset O_\alpha$, donde $supp\, g_\alpha$ denota el soporte compacto de f_α, es decir, la cerradura del conjunto dado por $g_\alpha \neq 0$.
2. $\sum_\alpha g_\alpha = 1$ en todas partes.
3. Cada punto posee una vecindad en la cual la suma, $\sum_\alpha g_\alpha$, es una suma finita.

Definiendo las funciones $f^m = \sum_\alpha g_\alpha f^m_\alpha$, donde f^m_α denota las funciones f^m evaluadas en la vecindad O_α, finalmente obtenemos que $f^m \phi_m = \sum_\alpha g_\alpha f^m_\alpha \phi_m = \sum_\alpha f_\alpha F = F$. Esto prueba el teorema de manera global, ya que los coeficientes f^m están bien definidos y son regulares en todo punto del espacio fase.

Hemos visto que las restricciones ϕ_i y las funciones λ^i juegan un papel fundamental en las ecuaciones de Hamilton, sin embargo, la teoría matemática de las restricciones es descrita de una mejor manera en términos de estructuras de Poisson las cuales derivaremos en la siguiente sección.

2.4 Estructuras de Poisson

Para estudiar el comportamiento general de las teorías con restriciones, particularmente las teorías invariantes bajo difeomorfismos, el concepto de paréntesis de Poisson y el de estructura simpléctica es una herramienta muy útil. Al igual que en la mecánica clásica [35], definimos el paréntesis de Poisson entre dos funciones arbitrarias del espacio fase como

$$\{f\,(p,q)\,, g\,(p,q)\} := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right), \tag{2.34}$$

para un sistema con un número finito de grados de libertad (más adelante veremos la generalización para el caso de dimensión infinita). Y cumple las siguientes propiedades (siendo f, g, h funciones arbitrarias):

1. Antisimetría: $\{f, g\} = -\{f, g\}$.
2. Linealidad: $\{c_1 f + c_2 g, h\} = c_1 \{f, h\} + c_2 \{g, h\}$, con c_1 y c_2 constantes.
3. La regla de Leibiniz: $\{f, gh\} = \{f, g\} h + g \{f, h\}$.
4. La identidad de Jacobi: $\{\{g, h\}, f\} + \{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\}$=0.

Con la definición de paréntesis de Poisson, podemos reescribir las ecuaciones de movimiento (2.29) de una manera más compacta

$$\dot{q}^i \approx \left\{q^i, H_p\right\}, \qquad \dot{p}_i \approx \{p_i, H_p\}. \tag{2.35}$$

Viendo las variaciones $(\dot{q}^i, \dot{p}_i)$ como una campo vectorial, entonces, el *campo vectorial hamiltoniano* con componentes $\{\cdot\,, H_p\}$, genera el flujo dinámico de las variables del espacio fase.

El paréntesis de Poisson (2.34), proporciona una estructura geométrica al espacio fase similar a la noción de geometría riemanniana que surge del tensor métrico. Si expresamos la ecuación (2.34) como

$$\{f, g\} = \mathcal{P}^{ij} \left(\partial_i f\right) \left(\partial_j g\right), \tag{2.36}$$

lo cual siempre es posible debido a la linealidad del paréntesis de Poisson y a la regla de Leibiniz, es claro que la estructura del paréntesis es capturada por el bivector o 2-tensor contravariante $\mathcal{P}^{ij}$, llamado *tensor de Poisson*, que a diferencia del tensor métrico es antisimétrico. Mas aún, como consecuencia de la identidad de Jacobi, debe satisfacer

$$\epsilon_{ikl} \mathcal{P}^{ij} \partial_j \mathcal{P}^{kl} = 0. \tag{2.37}$$

Recíprocamente, cualquier 2-tensor antisimétrico que satisfaga (2.37), define un paréntesis de Poisson por medio de (2.36). La expresión (2.34), representa la forma local del paréntesis eligiendo como sistema coordenado en el espacio fase q^i y p_i, también llamadas coordenadas de Darboux [5], las cuales son preservadas bajo transformaciones canónicas.

La expresión (2.34) suministra al tensor de Poisson una propiedad adicional, la matriz $\mathcal{P}^{ij}$ es invertible, con inversa

$$\Omega_{ij} := \left(\mathcal{P}^{-1}\right)_{ij}. \tag{2.38}$$

Aunque la invertibilidad no es un requerimiento para un tensor de Poisson, tal y como discutiremos mas adelante, el caso no degenerado tiene ciertas propiedades

[5] Véase apéndice A

interesantes. Si la inversa Ω_{ij}, de $\mathcal{P}^{ij}$ existe, es un 2-tensor covariante antisimétrico llamado *forma simpléctica.*

Al igual que con los tensores métricos, uno esperaría que usáramos el mismo símbolo para denotar la matriz inversa del tensor de Poisson. No obstante, no lo haremos por las siguientes razones: un tensor de Poisson no degenerado define una proyección $\mathcal{P}^{\natural} : T^*M \to TM$, $\alpha_i \mapsto \mathcal{P}^{ij}\alpha_j$ del espacio cotangente al espacio tangente de una variedad M, subiendo índices contrayendo con $\mathcal{P}^{ij}$.[6] Este mapeo es similar a la inversa del tensor métrico, a excepción que el tensor de Poisson es antisimétrico. El mapeo inverso, $\Omega^{\flat} = \mathcal{P}^{\natural -1} : TM \to T^*M$, $v^i \mapsto (\mathcal{P})^{-1}_{ij} v^j = \Omega_{ij}v^j$, define una biyección bajando los índices. En particular, podemos obtener

$$\left(\mathcal{P}^{\natural -1}\right)_{ik}\left(\mathcal{P}^{\natural -1}\right)_{jl}\mathcal{P}^{kl} = \delta_i^l\left(\mathcal{P}^{\natural -1}\right)_{jl} = -\left(\mathcal{P}^{-1}\right)_{ij}, \tag{2.39}$$

el cual es el negativo de Ω_{ij}. Debido a esta antisimetría en la geometría de Poisson, existe cierta ambiguedad la cual no está presente en la geometría riemanniana, por esta razón no seguiremos la convención usual denotando con la misma letra un tensor y su inverso.

Si contraemos la identidad de Jacobi (2.37), con Ω_{mi}, debido a la relación entre los dos tensores, obtenemos

$$\mathcal{P}^{ij}\left(\partial_m\Omega_{nk} - \partial_n\Omega_{mk} + \partial_k\Omega_{mn}\right) = \mathcal{P}^{lk}\left(d\boldsymbol{\Omega}\right)_{mnk} = 0. \tag{2.40}$$

Por lo tanto, el inverso de un tensor de Poisson invertible es una 2-forma cerrada. También es no degenerada debido a la invertibilidad; cualquier 2-forma que satisfaga estas propiedades la llamaremos *forma simpléctica.* Una estructura de Poisson $(M, \mathcal{P})$ sobre una variedad M con un tensor de Poisson invertible es equivalente a una estructura simpléctica $(M, \boldsymbol{\Omega})$ [36, 37, 43].

2.5 Estructuras pre-simplécticas

Dado un tensor de Poisson, podemos asociar un campo vectorial Hamiltoniano X_f a una función arbitraria f definida en la variedad de Poisson [7]

$$X_f := \mathcal{P}^{\natural}df = -\mathcal{P}^{ij}\left(\partial_i f\right)\partial_j. \tag{2.41}$$

En términos del paréntesis de Poisson, podemos escribir a $X_f = \{\cdot\,, f\}$, como la acción del campo vectorial sobre una función definida en el espacio fase. El paréntesis de

[6] A este isomorfismo se le conoce como *isomorfismo musical*, el cual es denotado en ocasiones por $\natural : T^*M \to TM$, con inversa $\flat : TM \to T^*M$. Un mapeo análogo se usa en Relatividad General empleando el tensor métrico.

[7] En la geometría Riemanniana, esta construcción nos daría un vector normal a la superficie dada por $f = \text{constante}$.

Poisson, también puede ser expresado en términos de los campos vectoriales Hamiltonianos y la forma simpléctica:

$$\mathbf{\Omega}\left(X_f, X_g\right) = \Omega_{ij}\mathcal{P}^{ik}\mathcal{P}^{jl}\partial_k f\partial_l g = -\mathcal{P}^{ki}\partial_k f\partial_i g = -\left\{f, g\right\}. \tag{2.42}$$

Es posible interpretar el campo vectorial Hamiltoniano, como la dirección de cambio en el espacio fase generada por la función f; si $f = p$, entonces $X_p = \partial/\partial q$. Si f corresponde a una de las coordenadas canónicas, el cambio vectorial Hamiltoniano está definido a lo largo de su momento canónico. En este sentido, el campo vectorial Hamiltoniano generaliza la noción de momento para una función arbitraria del espacio fase. Integrando el campo vectorial X_f, obtenemos una familia uniparamétrica de difeomorfismos, es decir, un flujo Hamiltoniano $\Phi_t^{(f)}$ generado por f [38] . Así, el flujo dinámico de un sistema canónico es generado por la función Hamiltoniana definida en el espacio fase.

Si debilitamos el requerimiento de que el tensor de Poisson sea invertible, surge una diferencia entre la estructura simpléctica y la de Poisson. Un tensor de Poisson no invertible aún puede proporcionar una geometría de Poisson, pero no una formulación simpléctica equivalente. Una 2-forma cerrada no invertible se llama una *forma presimpléctica*, la cual proporciona una estructura presimpléctica al espacio fase. Sea Ω_{ij} una forma presimpléctica, cuyo espacio nulo $C \subset TM$, está compuesto por campos vectoriales v^i tales que $\Omega_{ij}v^j = 0$. Estos campos vectoriales definen un flujo sobre el espacio fase, el cual puede ser factorizado identificando los puntos en la órbita del flujo. El espacio fase resultante es simpléctico, de esta manera, una estructura geométrica reducida puede ser asociada con una estrucutra presimpléctica [39].

Si un tensor de Poisson $\mathcal{P}^{ij}$ es degenerado, existen funciones C^I llamadas *funciones de Casimir*[8],las cuales satisfacen $\left\{C^I, f\right\} = 0$ para cualquier función f [40]. Luego, las 1-formas dC^I se encuentran en el espacio nulo de $\mathcal{P}^{ij}$, es decir, $\mathcal{P}^{ij}\partial_j C^I = 0$. Teniendo esto en cuenta, es natural definir una distribución [9] $T \subset TM$, tal que $dC^I\left(v\right) = v^i\partial_i C^I = 0$, para todo $v^i \in T$ [38]. Cualquier campo vectorial v^i de la distribución es aniquilado por el espacio nulo de $\mathcal{P}^{ij}$, y por lo tanto se encuentra en su imagen, de este modo $v^i = \mathcal{P}^{ij}\alpha_j$ para algún covector α_j. Recíprocamente, cualquier $\mathcal{P}^{ij}\alpha_j$ satisface $\mathcal{P}^{ij}\alpha_j\partial_i C^I = 0$, y por lo tanto pertenece a T, luego $T = Im\mathcal{P}^\natural$.

[8] En el formalismo Hamiltoniano las funciones de Casimir corresponden a las restriciones, sin embargo, es en la formulación simpléctica donde uno puede visualizar las propieades geométricas de las restricciones.

[9] Una distribución de dimensión l sobre una variedad M de dimensión n, es un mapeo $\mathcal{D}$, que asigna a cada punto $p \in M$ un subespacio vectorial, $\mathcal{D}_p \subset T_pM$, de dimensión l. Un conjunto de k 1-formas $\left\{\alpha^1, \ldots, \alpha^k\right\}$ define una distribución de dimensión $(n-k)$ la cual está dada por $\mathcal{D} = \left\{v_p \in T_pM \mid \alpha_p^i\left(v_p\right) = 0,\ i = 1, \ldots, k\right\}$.

Debido a la identidad de Jacobi (2.37), la distribución T es integrable [10], y por lo tanto la variedad de Poisson es foliada [11] en subvariedades generadas por la distribución, con espacios tangentes aniquilados por las funciones de Casimir. Las superficies integrales de la distribución u hojas de la foliación son llamadas *hojas simplécticas*, ya que el tensor de Poisson restringido al espacio cotangente de las superficies es invertible [29, 41].

2.6 Significado geométrico de las restricciones

Consideremos una variedad simpléctica M, con una forma simpléctica Ω_{ij} y un tensor de Poisson $\mathcal{P}^{ij}$. Si restringimos la variedad M a una hipersuperficie $\mathcal{C}$, definida por las funciones de restricción $\phi_s = 0$, las cualidades simplécticas heredadas dependen de las propiedades del subconjunto $\mathcal{C}$. Estas propiedades están determinadas principalmente por los campos vectoriales Hamiltonianos generados por las restricciones [43].[12]

Llamaremos a una restricción ϕ_s de *primera clase*, con respecto a todas las restricciones, si el campo vectorial Hamiltoniano generado por la restricción es tangente a la superficie $\mathcal{C}$. Por otro lado, si el campo vectorial Hamiltoniano generado por la restricción ϕ_s, no es tangente en ninguna parte a la superficie $\mathcal{C}$, llamaremos a la restricción de *segunda clase*. Usando la definición de un campo vectorial Hamiltoniano (2.41), el enunciado anterior es equivalente a decir que ϕ_s es de primera clase si $\{\phi_s, \phi_t\}$ es cero débilmente; en otro caso ϕ_s es de segunda clase. (Debemos notar que no hemos impuesto ninguna condición sobre el paréntesis de Poisson en la superficie definida por las restricciones).[13]

Podemos equipar a la superficie generada por las restricciones con una forma presimpléctica $\overline{\boldsymbol{\Omega}}$ usando la imagen recíproca (o *pull back*) de la forma simpléctica $\boldsymbol{\Omega}$ de la variedad M [38]. Si $\imath : \mathcal{C} \to M$ denota el encaje de la superficie $\mathcal{C}$ en M,

[10] Una distribución es integrable si dados dos vectores $v^i = \mathcal{P}^{ij}\alpha_j$ y $w^i = \mathcal{P}^{ij}\beta_j$ en la distribución, el paréntesis de Lie, $[v,w]^i$, pertenece también a la distribución. Usando la identidad de Jacobi, un cálculo sencillo muestra que

$$[v,w]^i = \mathcal{P}^{il}\left(\mathcal{P}^{jk}\left(\alpha_k\partial_j\beta_l - \beta_k\partial_j\alpha_l\right) + \alpha_k\beta_j\partial_l\mathcal{P}^{jl}\right) =: \mathcal{P}^{il}\gamma_l, \tag{2.43}$$

el cual es un elemento de la distribución.

[11] En general, la foliación puede ser singular, las hojas o hipersuperficies generadas por la foliación pudieran no tener la misma dimensión.

[12] Asumimos que los campos vectoriales Hamiltonianos generados por las restricciones son distintos de cero en una vecindad de la superficie $\mathcal{C}$. Tales restricciones, llamadas regulares, proveen un buen sistema coordenado local que es transversal a la superficie definida por las restricciones.

[13] La terminología de restricciones de primera y segunda clase fué introducida por Anderson y Bergmann en 1951 [12], desarrollada mas tarde por Dirac [1], y finalmente fué usada para el caso de gravedad por el mismo Dirac [23].

la imagen recíproca de la forma simpléctica está dada por $\overline{\mathbf{\Omega}} = \imath^*\mathbf{\Omega}$ (no podemos dotar directamente a la superficie de una estructura de Poisson, ya que el tensor de Poisson es contravariante). Si una de las restricciones es de primera clase, digamos ϕ, la forma presimpléctica es degenerada, ya que su correspondiente campo vectorial Hamiltoniano , X^i_ϕ, es tangente a la superficie generada por las restricciones, y por lo tanto define un campo vectorial $\overline{X}^a$ en esta superficie simplemente por restricción. Para ver esto, usando la definición de campo vectorial Hamiltoniano (2.42), tenemos que $\overline{\Omega}_{ab}\overline{X}^b = \imath^*\left(\Omega_{ij}X^j_\phi\right) = \imath^*\left(\partial_i\phi\right) = 0$.

Sólo si las restricciones son de segunda clase, es posible dotar a la superficie generada por las restricciones, de una estructura simpléctica. En este caso, uno puede tomar como espacio fase el espacio fase reducido, en donde las restricciones han sido resueltas. Sin embargo, si existen restricciones de primera clase, el flujo del campo vectorial Hamiltoniano debe ser factorizado para obtener el *espacio fase reducido*, como un espacio cociente de la superficie generada por las restricciones con su respectiva estructura presimpléctica. En otras palabras, este flujo corresponde al flujo de norma generado por las restricciones, lo cual discutiremos mas adelante.

2.7 El algortimo de Dirac-Bergmann

Con la información obtenida acerca de la geometría de Poisson y de la teoría matemática de las resricciones definidas en superficies simplécticas, podemos regresar al análisis Hamiltoniano y a la dinámica de los sistemas con restricciones. Habíamos obtenido el Hamiltoniano primario, H_p (2.28), como la suma del Hamiltoniano canónico y las restricciones primarias ϕ_s, multiplicadas por ciertos parámetros λ^s. El papel que juegan las funciones λ^s, es el de multiplicadores de Lagrange, los cuales añaden las restricciones primarias al Hamiltoniano original asegurandose que estas sean implementadas. Es posible que estos parámetros permanezcan indeterminados, aún resolviendo las ecuaciones de movimiento, lo cual depende de la forma de las restricciones mismas. Por lo tanto, hacer una clasificación de estas se vuelve relevante.

2.7.1 Restricciones secundarias

Además de las restricciones primarias, existen ecuaciones que deben satisfaces ciertos valores iniciales. Esto siginifica, que las ecuaciones de movimiento deben preservar las restricciones, dando lugar a las *condiciones de consistencia* [1, 12]. Estas condiciones surgen debido a que la evolución temporal de las restricciones primarias, tal y como las restricciones mismas, deben ser cero en todo instante de tiempo[14],

$$0 = \dot{\phi}_s \approx \{\phi_s, H\} - \lambda^t \{\phi_s, \phi_t\} =: \{\phi_s, H\} - \lambda^t C_{st}. \tag{2.44}$$

La matriz definida como $C_{st} := \{\phi_s, \phi_t\}$, (la cual depende del espacio fase), determina la estrucura de las restricciones del sistema. De las condiciones de consistencia (2.44), distinguimos dos casos.

1. $\det C_{st} \neq 0$: en este caso no obtenemos nuevas restricciones, cumpliendose así las condiciones de consistencia (2.44). Los multiplicadores λ^t son completamente determinados, y la evolución de cualquier función del espacio fase, digamos $f(q,p)$, esta dada por

$$\dot{f} \approx \{f, H\} - \{f, \phi_s\} \left(C^{-1}\right)^{st} \{\phi_t, H\}. \tag{2.45}$$

   Por lo tanto, el flujo Hamiltoniano generado por las restriciones es enteramente establecido. En otras palabras, dadas las condiciones iniciales $(q,p) \in \Gamma_p$, donde Γ_p es la superficie generada por las restricciones, la evolución del sistema es determinado y permance en Γ_p.

2. $\det C_{st} = 0$: en este caso, no todos los multiplicadores λ^t pueden ser determinados a través de las condiciones de consistencia (2.44). Nuevas restricciones, llamadas *restricciones secundarias*, surgen de las ecuaciones de movimiento (2.44), a diferencia de las restricciones primarias, las cuales surgen de la definición de los momentos. Las restricciones secundarias toman entonces la siguiente forma, $w_r^s \{\phi_s, H\} = 0$, donde w_r^s es un vector nulo de la matriz definida por las resricciones primarias, $w_r^s C_{st} = 0$. Si el vector nulo w_r^s no es trivial, entonces la restrición primaria $\phi_r = 0$, se preserva durante la evolución sólo si $w_r^s \{\phi_s, H\} = 0$.

Al igual que las restricciones primarias, las restriciones secundarias implican condiciones de consistencia de la forma (2.44), las cuales pueden generar nuevas restricciones. El proceso continúa hasta que todas las condiciones de consistencia sean completamente satisfechas, es decir, asegurar que todas las restricciones se cumplan en todo instante de tiempo. Una vez terminado el algoritmo, el sistema estará completamente determinado.

2.7.2 El Hamiltoniano total

Una vez encontrado el conjunto completo de restricciones, la distinción entre restricciones primarias y secundarias es irrelevante. Por lo tanto, a partir de ahora denotaremos a todas las restricciones derivadas del algortimo de Dirac-Bergmann como

[14] Para un Lagrangiano no admisible, esta relación sería inconsistente. Por ejemplo, tomemos $L = \dot{q} - q$, con lo cual obtenemos que, $H = q$ y $\phi = p - 1$. En este caso las condiciones de consistencia resultarían, $1 \approx 0$. Sin embargo, tales lagrangianos inconsistentes no tienen puntos estacionarios y podemos excluirlos.

ϕ_μ, incluyendo las primarias y las secundarias. De las condiciones de consistencia (2.44) para todas las restricciones se tiene,

$$\dot{\phi}_\mu = \{\phi_\mu, H_T\} = \{\phi_\mu, H\} + \lambda^\nu \{\phi_\mu, \phi_\nu\} \approx 0, \tag{2.46}$$

con $\mu, \nu = 1, \ldots, J$, donde J es el número total de restricciones encontradas, y H_T, es el *Hamiltoniano total*. La ecuación (2.46), es un sistema de ecuaciones lineales para los multiplicadores λ^ν, cuya solución general se puede escribir como

$$\lambda^\nu = U^\nu + V^\nu, \tag{2.47}$$

con U^ν una solución particular de las ecuaciones inhomogeneas y V^ν la solución mas general del sistema homogeneo, $V^\nu \{\phi_\mu, \phi_\nu\} \approx 0$. Debido a que V^ν es la solución mas general, puede ser escrita como una cambinación lineal de soluciones independientes, $V^\nu = v^i V_i^\nu$ con $i = 1, \ldots, I$, siendo I el número de soluciones independientes del sistema homogéneo. Con lo anterior

$$\lambda^\nu = U^\nu + v^i V_i^\nu. \tag{2.48}$$

Debido a que las v_i son completamente arbitrarias, los multiplicadores λ^ν pueden separarse en un parte que se fija mediante las condiciones de consistencia y otra que permanece indeterminada. Usando la Hamiltoniana total, es posible escribir las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \{f, H_T\} = \left\{f, H + U^\nu \phi_\nu + v^i \phi_i\right\}, \\ &= \{f, H'\} + v^i \{f, \phi_i\}, \end{aligned} \tag{2.49}$$

donde $H' = H + U^\nu \phi_\nu$ y hemos definido $v^i V_i^\nu \phi^\nu = v^i \phi_i$. Estas ecuaciones contienen I funciones arbitrarias, y por construcción son equivalentes a las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (2.2) [26].

2.8 Restricciones de primera y segunda clase

Como se mencionó anteriormente, la diferencia entre las restriciones primarias y secundarias es un tanto irrelevante en el esquema Hamiltoniano. Sin embargo, tal y como lo vislumbramos en el enfoque presimpléctico, es fundamental clasificar las restricciones entre primera y segunda clase.

Definición 2.8.1 *Sea F una función definida en el espacio fase, se dice que es de primera clase si su paréntesis de Poisson con todas las restricciones es débilmente cero,*

$$\{F, \phi_\mu\} \approx 0, \tag{2.50}$$

de otra manera, se dice que F es de segunda clase.

Si F de primera clase, por el Teorema 2.3.1, $\{F, \phi_\mu\}$ es una combinación lineal de las restricciones, es decir, $\{F, \phi_\mu\} = f_\mu{}^\nu \phi_\nu$. De esta propiedad se infiere el siguiente resultado

Teorema 2.8.1 *El paréntesis de Poisson entre dos funciones de primera clase, es también de primera clase.*

Prueba Sean F y G dos funciones de primera clase, entonces, $\{F, \phi_\mu\} = f_\mu{}^\nu \phi_\nu$ y $\{G, \phi_\mu\} = g_\mu{}^\nu \phi_\nu$. Usando la identidad de Jacobi obtenemos

$$\begin{aligned} \{\{F, G\}, \phi_\mu\} &= \{\{F, \phi_\mu\}, G\} - \{\{G, \phi_\mu\}, F\}, \qquad (2.51) \\ &= \left\{f_\mu{}^\nu \phi_\nu, G\right\} - \left\{g_\mu{}^\nu \phi_\nu, F\right\}, \\ &= \left(f_\mu{}^\nu g_\nu{}^\alpha - g_\mu{}^\nu f_\nu{}^\alpha\right) \phi_\alpha + \left(\left\{f_\mu{}^\alpha, G\right\} - \left\{f_\mu{}^\alpha, G\right\}\right) \phi_\alpha \approx 0. \end{aligned}$$

Como una aplicación a este concepto, es sencillo demostrar que tanto H' como ϕ_i, los cuales fueron definidos en la sección anterior, son de primera clase [26]. Mas aún, las restricciones ϕ_i forman un conjunto completo de restricciones de primera clase, por lo que cualquier restricción de primera clase es una combinación lineal de las ϕ_i (con coeficientes que son funciones del espacio fase), módulo términos cuadráticos de las restricciones de segunda clase. Por lo tanto, el Hamiltoniano total (2.46), es la suma de una Hamiltoniano, H', de primera clase y restricciones de primera clase multiplicadas por coeficientes arbitrarios. Sin embargo, la descomposición de H_T en H' y ϕ^i no es única, ya que siempre es posible añadir una combinación lineal de restricciones sin afectar el valor del Hamiltoniano total.

2.8.1 Separación de las restricciones de primera y segunda clase

Una vez encontrado el conjunto completo de restricciones por medio del algortimo de Dirac-Bergann, las restricciones de primera clase no tienen que ser directamente alguna de las restricciones primarias o secundarias; en general serán combinaciones lineales de éstas. Para hallarlas es necesario usar los vectores nulos de la matriz cuyas entradas son todos los paréntesis de Poisson entre las restricciones, para finalmente contraerlos con las restricciones y así obtener las restricciones de primera clase correctas (i.e. todas las restricciones de primera clase independientes entre sí) [42, 44].

Sea W' la matriz $J \times J$ cuyas entradas están dadas por

$$W'_{\alpha\beta} = \{\phi_\alpha, \phi_\beta\}, \qquad (2.52)$$

donde ϕ_α son todas las restricciones primarias y secundarias encontradas, siendo $\alpha = 1, \ldots, J$.

Teorema 2.8.2 *Si* $\det W' \approx 0$*, entonces existen* $(J-R)$ *restriciones de primera clase, siendo* R *el rango de la matriz* W'*.*

Prueba
Ya que $\det W' \approx 0$, y suponiendo que rango $W' < J$, entonces existen $(J-R)$ vectores nulos, ω^i con $i = 1, \ldots, (J-R)$, tales que

$$\omega_i^{\alpha} \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} \approx 0, \tag{2.53}$$

debido a la linealidad, obtenemos

$$\{\omega_i^{\alpha}\phi_\alpha, \phi_\beta\} \approx 0, \tag{2.54}$$

con respecto a todas las restricciones, ya sean primarias o secundarias. De esta manera las restricciones definidas como $\gamma_i := \omega_i^{\alpha}\phi_\alpha$, forman un conjunto de $(J-R)$ restricciones de primera clase. En esta representación, las restricciones son completamente separadas en restricciones de primera clase, a las cuales denotaremos con la letra γ, y de segunda clase, denotadas por χ. Con lo anterior, el número de restricciones de segunda clase es igual al rango de la matriz W', la cual usando los paréntesis entre las restricciones toma la forma

$$\begin{aligned} W' &= \begin{array}{c} \\ \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_J(x) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phi_1(y) & \phi_2(y) & \cdots & \phi_J(y) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \{\phi_1, \phi_1\} & \{\phi_1, \phi_2\} & \cdots & \{\phi_1, \phi_J\} \\ \{\phi_2, \phi_1\} & \{\phi_2, \phi_2\} & \cdots & \{\phi_2, \phi_J\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\phi_J, \phi_1\} & \{\phi_J, \phi_2\} & \cdots & \{\phi_J, \phi_J\} \end{pmatrix} \end{array} \\ &\rightarrow \begin{array}{c} \\ \gamma_j(x) \\ \chi_\beta(x) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \gamma_i(y) & \chi_\alpha(y) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \end{array}, \end{aligned} \tag{2.55}$$

donde $D_{\alpha\beta}$ es una matriz $R \times R$, antisimétrica, par e invertible sobre la superficie de restricciones.

Ejemplo 2.8.1 (Mecánica clásica en una superficie) *Consideremos un sistema con coordenadas* q^1 *y* q^2*, con momentos* p_1*,* p_2*, cuya dinámica es descrita por el Hamiltoniano*

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + V\left(q^1, q^2\right) + \lambda f\left(q^1, q^2\right), \tag{2.56}$$

donde las dos funciones V *y* f*, respectivamente, toman el papel de un potencial y una restricción haciendo que el movimiento permanezca en la superficie* $f\left(q^1, q^2\right) = 0$*.*

Ya que el momento p_λ no aparece en el Hamiltoniano, inmediatamente tenemos una restricción primaria, $\phi_1 := p_\lambda = 0$. La cual implica una restricción secundaria, $\phi_1 := -\{p_\lambda, H\} = f\left(q^1, q^2\right) = 0$. Por condiciones de consistencia, esta restricción implica una retricción terciaria

$$\phi_3 := \{f, H\} = \frac{\partial f}{\partial q^1} p_1 + \frac{\partial f}{\partial q^2} p_2 = 0,$$

la cual al mismo tiempo conlleva a otra restricción

$$\begin{aligned}
\phi_4 := \{\phi_3, H\} \quad = \quad & \frac{\partial^2 f}{\partial \left(q^1\right)^2} p_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial q^1 \partial q^2} p_1 p_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \left(q^2\right)^2} p_2^2 \\
& -\frac{\partial f}{\partial q^1}\left(\frac{\partial V}{\partial q^1} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q^1}\right) - \frac{\partial f}{\partial q^2}\left(\frac{\partial V}{\partial q^2} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q^2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Las restricciones secundarias, requieren que todas las posiciones permanezcan en la superficie $f = 0$, y las terciarias aseguran que el momento sea tangente a esta superficie. (La restricción tericiaria puede ser escrita como $\phi_3 = \vec{N} \cdot \vec{p} = 0$, siendo $\vec{N} = \nabla f$ un vector normal a la superficie.) La última restricción es equivalente a una ecuación balanceada entre las componentes normales, $\vec{N} \cdot \vec{F}$, de la fuerza $\vec{F} = -\nabla V - \lambda \nabla f$, la cual se obtiene como la suma de una fuerza externa debido al potencial, una fuerza ejercida por la superficie, y una fuerza centrífuga dada en términos de los momentos y de derivadas de segundo orden de f. La expresión de la fuerza centrífuga para una superficie en general no es fácil de reconocer, sin embargo, si aplicamos el ejemplo a un círculo de radio R, $f\left(q^1, q^2\right) = \left(q^1\right)^2 + \left(q^2\right)^2 - R^2$, la fuerza centrífuga se reduce a $\vec{p}^2/R$, que es la forma usual para una partícula de masa igual a uno. (En teorías invariantes bajo difeomorfismos, en particular Relatividad General, las primeras derivadas de los vectores normales, tal y como se encuentra en este ejemplo, proveen una medida de la curvatura extrínseca de las superficies embebidas en el espacio [45].) La fuerza ejercida por la superficie $-\lambda \nabla f$, es determinada una vez que resolvamos las restricción $\phi_4 = 0$ para λ, lo cual siempre es posible, ya que $\vec{N}^2 = \left(\partial f / \partial q^1\right)^2 + \left(\partial f / \partial q^1\right)^2 \neq 0$, para una superficie regular. En este punto, observamos que algunas de las restricciones deben ser de segunda clase, ya que sólo hemos podido conocer el valor de un multiplicador de Lagrange.

Un cálculo sencillo, muestra que el álgebra de restricciones es de segunda clase. De hecho, $\{\phi_1, \phi_4\} = \vec{N}^2 = \{\phi_2, \phi_3\}$, mientras que cláramente, ϕ_2 tiene un paréntesis de Poisson cero con ϕ_2 y ϕ_3. Los paréntesis de Poisson, $\{\phi_2, \phi_4\}$ y $\{\phi_3, \phi_4\}$ son muy extensos, sin embargo la matriz formada por todas las restriciones, $\{\phi_i, \phi_j\}$, tiene como determinante $\vec{N}^4 \neq 0$, probando así que las restricciones son de segunda clase.

2.9 Transformaciones de norma

Como hemos visto en el análisis general de estructuras de Poisson, las restricciones de primera clase juegan un papel central debido a que la superficie de restricción no es simpléctica. Las restricciones generan un flujo Hamiltoniano tangente a la superficie de restricción, a través de una forma presimpléctica la cual es degenerada, y es obtenida mediante la imagen recíproca de la forma simpléctica definida en el espacio fase completo. La interpretación física de este resultado, nos dice que las restricciones de primera clase no sólo restrigen los valores iniciales, sino que también generan *tranformaciones de norma.* El mapeo infinitesimal

$$F(q,p) \mapsto F(q,p) + \delta_\epsilon F(q,p) := F(q,p) + \{F, \epsilon^a \gamma_a\}, \tag{2.57}$$

para una función del espacio fase F, el cual está definido por las restricciones de primera clase γ_a, mapea soluciones de las restricciones y de las ecuaciones de movimiento en otras soluciones; bajo este mapeo, $\delta_\epsilon \gamma_a \approx 0 \approx \delta_\epsilon H_T$.

Interpretar estas tranformaciones como transformaciones de norma, significa que no debemos considerar a las soluciones provenientes del mapeo del flujo Hamiltoniano generado por las restricciones de primera clase, como físicamente distintas. Sin embargo, no estamos aplicando simplemente una simetría para pasar de una solución conocida a otra nueva, como rotar una órbita en un potencial esféricamente simétrico, lo cual da lugar a una nueva solución. Las transformaciones de norma mapean soluciones matemáticamente distintas en otras, pero estas deben interpretarse meramente como diferentes representaciones de la misma solución física.

El flujo generado por el Hamiltoniano total, H_T, el cual contiene a las restricciones primarias y secundarias, nos proporciona la evolución de cualquier función del espacio fase f, mediante $\dot{f} = \{f, H_T\}$. En general, el cambio en el tiempo de una función f, depende entonces de un número de parámetros indeterminados λ^a, correspondientes a las restricciones de primera clase, a menos que $\{f, \gamma_a\} = 0$, para toda γ_a, restricción de primera clase. Si el paréntesis de Poisson de f con todas las restricciones de primera clase es cero, a este tipo de funciones se les conoce como *observables completas de Dirac.* Una función del espacio fase que cuyo paréntesis de Poisson con las restricciones de primera clase no es cero, mantiene cierta dependencia con algunos multiplicadores de Lagrange durante su evolución. Para tener una teoría bien definida y sin ambiguedades en las predicciones físicas, la única conclusión viable es que el flujo infinitesimal, generado por $\{f, \gamma_a\}$, sólo cambia la representación matemática pero no cambia la información física observable. El cambio de f es exclusivamente una transformación de norma sin afectar el estado físico del sistema.

Sin embargo, como veremos en los capítulos subsecuentes, existen sistemas cuyo Hamiltoniano total es una combinación lineal de restricciones de primera clase

[42, 44, 46, 47]. En estos casos, las restricciones juegan varios papeles: restringen a los valores iniciales de las funciones a permanecer en la superficie de restricción, generan las transformaciones de norma identificando soluciones físicamente equivalentes y proporcionan el Hamiltoniano total, es decir las restricciones generan las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, debido a la naturaleza de las restricciones, los multiplicadores de Lagrange permanecen indeterminados, por lo tanto, la noción absoluta de evolución no es única. Cualquier elección del Hamiltoniano total resultará en las ecuaciones de movimiento escritas en una norma particular, pero debido a que la teoría es invariante bajo las transformaciones de norma, todos los conjuntos de ecuaciones obtenidos de diferentes normas son equivalentes.

2.10 El paréntesis de Dirac

Si uno no soluciona explíctamente las restricciones, lo cual en algunas ocasiones puede resultar muy complicado, es posible trabajar con un sistema con restricciones de manera implícita, usando todas las restricciones sin resolverlas. En este caso, es necesario ser cuidadoso ya que el flujo Hamiltoniano generado por las funciones del espacio fase no debe abandonar las superficie de restricción. Esto estaría garantizado si todas las restricciones fueran resueltas de manera explícita, ya que todos los flujos automáticamente yacerían en el espacio fase reducido. Si las restricciones son de primera clase, su flujo Hamiltoniano es tangente a la superficie de restricción, lo cual no causa problema en este contexto. Sin embargo, las restricciones de segunda clase generan un flujo transversal a esta superficie, por lo tanto, si no son resultas, contribuirían con términos en el Hamiltoniano que harían que el flujo se alejara de la superficie de restricción.

En lugar de resolver todas las restricciones de segunda clase, uno puede modificar el paréntesis de Poisson de tal manera que el flujo Hamiltoniano generado por las restricciones, con respecto a la nueva estructura de Poisson, sea tangente a la superficie de restricción. Esto es posible introduciendo el *paréntesis de Dirac*

$$\{f,g\}_D := \{f,g\} - \sum_{ab} \{f,\chi_a\} \left(\{\chi_a,\chi_b\}\right)^{-1} \{\chi_b,g\} \,. \tag{2.58}$$

Donde χ_a denota a todas las restricciones de segunda clase, para las cuales la matriz inversa de $\{\chi_a,\chi_b\}$ siempre existe. Con este nuevo paréntesis de Poisson, el flujo generado por las restricciones de segunda clase no se aleja de la superficie de restricción, sino que es cero ya que

$$\{f,\chi_a\}_D = \{f,\chi_a\} - \sum_{bc} \{f,\chi_b\} \left(\{\chi_b,\chi_c\}\right)^{-1} \{\chi_c,\chi_a\} = 0. \tag{2.59}$$

El nuevo tensor de Poisson definido por el paréntesis de Dirac es degenerado, con las restricciones de segunda clase como funciones de Casimir. Además, cualquier función del espacio fase f, cuyo campo vectorial Hamiltoniano ya es tangente a la superficie generada por las restricciones de segunda clase, con el paréntesis de Poisson original, es decir, $X_f \chi_a = 0$, para todas las restricciones de segunda clase χ_a, tenemos que $\{f, \chi_a\} = \mathcal{P}^{ij} \partial_i f \partial_j \chi_a = -X_f^j \partial_j \chi_a = -X_f \chi_a = 0$. Por lo tanto, $\{f, g\} = \{f, g\}_D$ para cualquier otra función del espacio fase g. En resumen, el paréntesis de Dirac deja inalterada la estructura de Poisson para las funciones que generan flujos tangentes a la superficie de restricción; mientras remueve cualquier flujo externo producido por las restricciones de segunda clase. Aún, si las restricciones de segunda clase no pueden ser resueltas, el paréntesis de Dirac nos asegura que no tenemos flujos espurios que afecten las ecuaciones de movimiento.

Usando el paréntesis de Dirac, los flujos generados por las restricciones de primera clase no pueden ser removidos de forma similar, ya que la matriz $\{\gamma_a, \gamma_b\}$, no es invertible. Para obtener un espacio fase con una estructura simpléctica, los flujos generados por las restricciones de primera clase deben ser factorizados [20, 26, 19], más adelante veremos que esta factorizacion es sútil en el caso de teorías invariantes bajo difeomorfismos.

2.11 Teorías de campo

Tanto el formalismo Lagrangiano como el Hamiltoniano aplicado a teorías de campo, siguen la misma línea de los sistemas con un número finito de grados de libertad, hasta ahora discutidos. Uno puede describir tales teorías, mediante variables independientes $\varphi(x)$, etiquetadas no con un parámetro discreto sino con uno continuo. Aunque la mayoría de las construcciones siguen este razonamiento, existen ciertas dificultades, especialmente las relacionadas con derivadas de los campos. Por ejemplo, en lugar de tener relaciones de tipo $\partial q^i / \partial q^j = \delta^i_j$, para variables independientes; surgen derivadas funcionales $\delta\varphi(x)/\delta\varphi(y) = \delta(x, y)$, donde la nueva derivada es denotada por el símbolo variacional δ y $\delta(x, y)$ es la distribución delta de Dirac.

Sea $S[\varphi]$ una funcional definida en una variedad de dimensión n, cuya variación, (la parte lineal en φ) está dada por

$$\delta S = \int d^x A[\varphi(x)] \, \delta\varphi(x) \,, \tag{2.60}$$

entonces se dice que S, es *funcionalmente diferenciable* por φ, con *derivada funcional* $\delta S / \delta\varphi(x) = A[\varphi(x)]$ [48]. Formalmente, todas las reglas de diferenciación, tales como linealidad y la regla de la cadena, pueden ser extendidas a derivadas funcionales. Las derivadas funcionales de derivadas espaciales de una función, pueden calcularse mediante la fórmula de integración por partes, por ejemplo

$$\frac{\delta}{\delta\varphi\left(x\right)}\int d^{3}xN^{a}\left(y\right)p_{\varphi}\left(y\right)\partial_{a}\varphi\left(y\right)=-\partial_{a}\left(N^{a}\left(x\right)p_{\varphi\left(x\right)}\right),$$

donde hemos usado condiciones de frontera para eliminar algunos términos. Estas condiciones de frontera determinan si una funcional es diferenciable. Usar este conjunto de reglas es suficiente para definir sistemas con un número infinito de grados de libertad, sin embargo se requiere cierto cuidado en manejar las distribuciones.

Para evitar el uso explícito de las distribuciones, y trabajar con relaciones algebraicas bien definidas, uno puede *probar* (o *pesar*) las funcionales. En lugar de trabajar con combinaciones locales de los campos, es posible considerar integrales de la forma $\varphi\left[\mu\right]:=\int d^{n}x\sqrt{\mid\det g\mid}\mu\left(x\right)\varphi\left(x\right)$, sobre una variedad arbitraria con una métrica g_{ab}, para funciones arbitrarias $\mu\left(x\right)$ [15]. No se pierde ninguna información, ya que $\varphi\left(x\right)$, puede ser reconstruida siempre y cuando $\varphi\left[\mu\right]$ sea conocida para toda función de prueba $\mu\left(x\right)$. De esta manera, la derivada de los campos

$$\frac{\delta\varphi\left[\mu\right]}{\delta\varphi\left(x\right)}=\sqrt{\mid\det g\mid}\mu\left(x\right), \tag{2.61}$$

es libre de distribuciones delta. De la misma manera, el paréntesis de Poisson entre funcionales es una relación algebraica bien definida

$$\left\{f,g\right\}=\int d^{n}x\left(\frac{\delta f}{\delta\varphi\left(x\right)}\frac{\delta g}{\delta p_{\varphi}\left(x\right)}-\frac{\delta f}{\delta p_{\varphi}\left(x\right)}\frac{\delta g}{\delta\varphi\left(x\right)}\right), \tag{2.62}$$

para un campo escalar con sus respectivos momentos. De esta manera, en vez de

$$\left\{\varphi\left(x\right),p_{\varphi}\left(y\right)\right\}=\delta\left(x,y\right),$$

tenemos

$$\left\{\varphi\left[\mu\right],p_{\varphi}\left(y\right)\right\}=\sqrt{\mid\det g\mid}\mu\left(y\right),$$

una función y no una distribución.

En el contexto de las funciones de prueba, el peso de la densidad de los campos es fundamental, ya que determina los factores de la métrica $\sqrt{\mid\det g\mid}$, requeridos para tener integrales bien definidas [16]. Cualquier función $\widetilde{X}$ que se transforme como $\widetilde{X}'=\mid\det\left(\partial x^{\mu}/\partial x'^{\nu}\right)\mid\widetilde{X}$, aún si no es obtenida del determinante de la métrica, se

[15] Usualmente se toma como el espacio de funciones de prueba, las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto, C_0^∞. El espacio de las funciones de prueba es un espacio vectorial real, cuya topología esta definida a través del límite de sucesiones. Con esta topología, C_0^∞ es un espacio vectorial topológico completo y localmente convexo, aunque no es metrizable.

[16] La medida definida por $d^{n}x\sqrt{\mid g\mid}$, es invariante bajo el cambio de coordenadas $x^{\mu}\mapsto x'^{\mu}$, ya que $\sqrt{\mid\det g'\mid}=\mid\det\left(\partial x^{\mu}/\partial x'^{\nu}\right)\mid\sqrt{\mid\det g\mid}$.

llama *densidad escalar* (de peso uno), y cualquier tensor que tranforme con un factor de $|\det(\partial x^\mu/\partial x'^\nu)|$, se llama *densidad tensorial* (de peso uno).

Cuando pesamos una función, explícitamente incluímos la métrica junto con una función de prueba. Su momento canónicamente conjugado correspondiente, no obstante, se comporta de manera diferente ya que aparece junto con la función en el término simpléctico del Lagrangiano. Por ejemplo, $\int d^3x\dot{\varphi}p_\varphi$, y ningún otro campo, ni siquiera el tensor métrico, es permitido en este término, de otra manera, p_φ no sería el momento canónico de φ. Por lo tanto el momento canónico de una función debe ser una densidad. (Mas informarción sobre las propiedades de las densidades tensoriales pueden encontrarse en el Apéndice A.)

Ejemplo 2.11.1 (Electromagnetismo en el espacio de Minkowski)

La acción para la teoría de Maxwell en un espacio-tiempo con métrica $\eta_{\mu\nu}$ está dada por

$$S_{EM}[A_\mu] = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}(A)\, F_{\rho\sigma}(A)\, \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}, \tag{2.63}$$

donde $F_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Podemos observar que

$$\frac{\delta S_{EM}}{\delta \partial_\mu A_\nu} = -\left(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho\right)\eta^{\rho[\mu}\eta^{\nu]\sigma},$$

tomando $\mu = 0$,

$$\frac{\delta S_{EM}}{\delta \dot{A}_\nu} = -\left(\dot{A}_\sigma - \partial_\sigma A_0\right)\eta^{\nu\sigma}. \tag{2.64}$$

Si $\nu = 0$, el lado derecho de la ecuación anterior es cero idénticamente; es decir, la acción no depende de la derivada temporal de A_0, por lo que su momento canónico $\delta S_{EM}/\delta\dot{A}_0$, es una restricción primaria. Por consistencia, la restricción secundaria que esta implica es la ley de Gauss

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta S_{EM}}{\delta \dot{A}_0} = \frac{\delta S_{EM}}{\delta A_0} = -\partial_a\left(\partial_b A_0 - \dot{A}_b\right)\delta^{ab} = \partial_a E^a \approx 0,$$

donde el campo eléctrico $E^a = \delta^{ab}\left(\dot{A}_b - \partial_b A_0\right)$, proporciona el momento canónico de A_a: $\left\{A_a(x), E^b(y)\right\} = \delta_a^b(x,y)$. En esta etapa sólo los índices espaciales contribuyen, mientras que la métrica fija contiene la información sobre las densidades.

La restricción de Gauss no genera más restricciones, por lo tanto el sistema está completamente caracterizado. En nuestro espacio fase, uno puede eliminar la restricción primaria, dejando como variables canónicas a A_a, con momento E^b, sujetas a la restricción de Gauss $\partial_a E^a \approx 0$. La restricción de Gauss no depende de A_a, y por lo tanto es de primera clase. Si usamos las funciones de prueba, $G[\Lambda] = \int d^3x\Lambda(x)\,\partial_a E^a$, obtenemos un álgebra abeliana $\{G[\Lambda_1], G[\Lambda_2]\} = 0$. La restricción pesada genera transformaciones de norma dejando fijo a E^a, mientras que A_a se transforma como $\{A_a, G[\Lambda]\} = -\partial_a \Lambda$.

Si introducimos una condición para fijar la norma, por ejemplo la norma de Coulomb, $C := \delta^{ab}\partial_a A_b = 0$, junto con una función de prueba $C[K] = \int d^3x K(x) C(x)$, el sistema deja de ser de primera clase. De esta forma, el paréntesis

$$\{G[\Lambda], C[K]\} = \int d^3x d^3y \left(\partial_a \Lambda\right)(x) \left(-\delta^{ab}\partial_b K(y)\right) \delta(x, y) = \int d^3x K \delta^{ab}\partial_a \partial_b \Lambda,$$

el cual no es cero en la superficie de restricción. El sistema dado por la ley de Gauss junto con la condición de fijación de la norma es de segunda clase, para toda las funciones de prueba que cumplan $\delta^{ab}\partial_a\partial_b\Lambda \neq 0$. Para funciones armónicas, las cuales satisfacen $\delta^{ab}\partial_a\partial_b\Lambda = 0$, la fijación de la norma no es completa y no nos da un sistema de restricciones de segunda clase. Esto se debe a que la norma de Coulomb, fija la libertad de norma de la tranformación $A_a \mapsto A_a - \partial_a\Lambda$, sólo hasta alguna función armónica [27].

En general, fijar la norma requiere que los subespacios intersecten a cada una de las órbitas, generadas por las restriciones de primera clase, sólo una vez. Si esto es posible, lo cual es muy complicado de manera explícita, la libertad de norma desaparece. Ya que todos los flujos de norma son transversales a la superficie definida por la fijación de la norma, el conjunto de restricciones más las condiciones de fijación de la norma forman un sistema de segunda clase por construcción [27, 49].

Chapter 3

Análisis hamiltoniano de teorías tipo BF

Haciendo uso del formalismo aprendido en la sección anterior, en este capítulo desarrollaremos el análisis Hamiltoniano de una teoría tipo BF, la cual servirá de punto de partida para comprender como funciona el formalismo de Dirac en el caso de una teoría con simetrías no triviales, además de que este modelo presenta algunas de las características algebráicas encontradas en teorías invariantes bajo difeomorfismos como es el caso de Relatividad General. Debemos destacar, que en el análisis canónico que llevaremos a cabo tomaremos como variables dinámicas sólo aquellas variables en la acción que posean derivadas temporales, mientras que las variables restantes serán relegadas a multiplicadores de Lagrange, imponiendo las restricciones. Bajo esta disposición, la teoría tipo BF es una teoría invariante bajo difeomorfismos espaciales, sin embargo, ésta invariancia está rota dando lugar a tranformaciones de norma asociada a rotaciones un un álgebra de Lie [1].

Desafortunadamente, el tratamiento canónico rompe la simetría entre el espacio y el tiempo, lo cual no sucede a nivel Lagrangiano, esto sugiere que la formulación Hamiltoniana no es la adecuada para estudiar de manera covariante este tipo de sistemas. En teorías de campo tradicionales, (Maxwell, Yang-Mills, etc.) el formalismo Hamiltoniano y Lagrangiano producen como resultado las mismas simetrías de norma,

[1] En la literatura matemática, el término *difeomorfismo* se refiere a un mapeo de una variedad a otra, el cual es diferenciable, uno a uno, sobreyectiva y con inversa diferenciable. Sin embargo, en la literatura sobre Relatividad General, el término difeomorfismo es equivalente a la transformación del tensor métrico

$$\delta_{(\mathrm{difeo})} g_{\mu\nu} = -\nabla_\nu \xi_\mu - \nabla_\mu \xi_\nu,$$

donde ξ_μ corresponde al parámetro de norma. Podemos notar, que el lado derecho de esta expresión corresponde a la derivada de Lie del tensor métrico, el cual es un tensor que se transforma de manera covariante.

entonces, podemos preguntarnos por qué las teorías invariantes bajo difeomorfismos, entre ellas Relatividad General, se comportan de manera particular. Podría ser una propiedad particular de la simetría de norma, tal vez estas teorías son tales que las formulaciones hamiltoniana y lagrangiana conducen a diferentes resultados, o simplemente el procedimiento para analizarlas es incompleto. En los capítulos subsecuentes, haciendo uso de sistemas particulares, probaremos que la formulación canónica es de hecho coherente con los difeomorfismos cuando el formalismo de Dirac es aplicado de manera consistente, explicando así las posibles discrepancias.

3.1 Las teorías tipo BF

Actualmente, las teorías BF [55, 56, 57] definidas en un espacio o espacio-tiempo arbitrarios, han demostrado proveer de profundas relaciones entre las teorías de campo topológicas y las teorías de campo usuales [2]. Desde versiones no métricas de Relatividad General [58, 59, 60] hasta nuevas formulaciones de la teoría de Yang-Mills [61, 62, 63]. En la formulación de primer orden, la teoría de Yang-Mills puede ser expresada como una perturbación, alrededor de una constante de acoplamiento, de una teoría puramente topológica. En este contexto, ambas formulaciones poseen las mismas propiedades perturbativas [64, 65]. Sin embargo, a pesar de estos desarrollos, existen ciertos aspectos que no están completamente entendidos en el caso específico de cuatro dimensiones. Esto se debe, gran parte a las complicaciones técnicas que surgen en cuatro dimensiones en relación con escenarios de dimensión menor.

La razón principal para usar una versión modificada de una teoría BF yace en el análisis Hamiltoniano, ya que puede entenderse como una teoría invariante bajo difeomorfismos, cuya simetría se rompe a nivel de la acción; reproduciendo así el sector topológico de Yang-Mills. No obstante, ambas teorías comparten las mismas propiedades perturbativas alrededor del espacio moduli definido por las conexiones planas mediante un encajamiento topológico [47].

[2] En la literatura existen diferentes definiciones acerca de lo que es una teoría topológica:

- Una teoría topológica de tipo Schwarz, es una teoría de campos cuyas funciones de correlación son invariantes topológicos, es decir, la medida en la integral de trayectoria es explícitamente independiente de la métrica.
- Una teoría topológica de tipo Witten, es una teoría de campos, cuyo Lagrangiano aunque dependa de la métrica, proporciona una función de partición que equivale a un invariante topológico.
- Una teoría topológica es una teoría que carece de grados de libertad locales.

A lo largo del trabajo, nos referiremos a una teoría topológica como aquella que no tiene grados de libertad locales, aunque puede ser suceptible a grados de libertad globales, es decir, las soluciones a las ecuaciones de movimiento pueden depender de la topología del sistema.

3.2 Análisis hamiltoniano

Para efectuar el análisis hamiltoniano, nuestro punto de partida es la acción de la teoría BF modificada, la cual está dada por

$$S[A,B] = \int_M \mathrm{Tr}\left(iB \wedge F(A) + \frac{g^2}{4} B \wedge B\right), \tag{3.1}$$

donde $F^I_{\mu\nu} = \partial_\mu A^I_\nu - \partial_\nu A^I_\mu + f^{IJK} A^J_\mu A^K_\nu$, corresponde a las componentes de la curvatura asociada a la 1-forma de conexión $A^I_\mu dx^\mu$, evaluada en el álgebra de Lie $su(n)$; siendo f^{IJK} las constantes de estructura del álgebra, y $B^I_{\alpha\beta}$ un conjunto de $6(N^2-1)$ 2-formas evaluadas en $SU(N)$. Hemos tomado $\mu,\nu = 0,\ldots,3$ como los índices espacio-temporales, x^μ un sistema de coordenadas local de la variedad M, la cual tiene dimensión cuatro, y $I,J,K = 0,1,\ldots,N^2-1$, los índices internos los cuales pueden ser subidos y bajados mediante la métrica de Cartan-Killing asociada al álgebra de Lie.

Efectuando la variación de la acción (3.1), obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$F^I(A) = i\frac{g^2}{2}B^I, \qquad DB^I = 0, \tag{3.2}$$

donde F^I satisface las identidades de Bianchi $DF^I = 0$. Sustituyendo las ecuaciones de movimiento (3.2) en la acción (3.1) obtenemos la llamada acción topológica de Yang-Mills, conocida también como el invariante de Pontryagin. Para llevar a cabo el análisis hamiltoniano, debemos considerar que la variedad M, es topológicamente equivalente a $\Sigma \otimes R$, donde Σ corresponde a una superficie de Cauchy y R representa un parámetro de evolución (para mas información sobre variedades globalmente hiperbólicas véase el Apéndice A). De este modo, la descomposición $3+1$ de la acción toma la forma

$$S[A,B] = \frac{1}{2}\int_{\Sigma\times R} dtd^3x\epsilon^{0ijk}\left\{i\left(\dot{A}^I_k - D_k A^I_0\right)B^I_{ij} + B^I_{0i}\left(iF^I_{jk} + \frac{g^2}{2}B^I_{jk}\right)\right\}, \tag{3.3}$$

donde podemos identificar la correspondiente densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{ijk}\left\{i\left(\dot{A}^I_k - D_k A^I_0\right)B^I_{ij} + B^I_{0i}\left(iF^I_{jk} + \frac{g^2}{2}B^I_{jk}\right)\right\}, \tag{3.4}$$

para lo cual hemos definido $\epsilon^{0ijk} := \eta^{ijk}$, con $\eta^{123} = 1$. Para llevar a cabo el análisis Hamiltoniano, *consideraremos como variables dinámicas a las variables cuyas derivadas temporales aparecen a nivel de la acción*, relegando las variables restantes a multiplicadores de Lagrange. Como veremos en los siguientes capítulos, esta elección no es la mas adecuada si queremos conocer de manera explícita las simetrías de norma del sistema. El ejemplo de un análisis alternativo concerniente a teorías topológicas puede encontrarse en [42, 44].

De esta forma, los momentos Π^{iI}, canónicamente conjugados a la conexión o potencial A_i^I, están dados por

$$\Pi^{iI} := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}_i^I} = \frac{i}{2}\eta^{ijk}B_{jk}^I. \tag{3.5}$$

Usando la definición de los momentos en la acción (3.1), obtenemos que

$$S\left[A_i^I, \Pi^{iI}, B_{0i}^I, A_0^I\right] = \int_{\Sigma\times R} dtd^3x \left(\Pi^{iI}\dot{A}_i^I - A_0^I D_k \Pi^{kI} - \frac{i}{2}\eta^{ijk}B_{0i}^I F_{jk}^I + i\frac{g^2}{2}\Pi^{iI}B_{0i}^I\right). \tag{3.6}$$

De la expresión anterior podemos identificar los paréntesis fundamentales de Poisson para la teoría

$$\left\{A_i^I(x^0,\vec{x}), \Pi_J^j(x^0,\vec{y})\right\} = \delta_j^i \delta_J^I \delta^3(x,y), \tag{3.7}$$

y el Hamiltoniano canónico, el cual viene dado por

$$H_c = \dot{A}_i^I \Pi^{iI} - \mathcal{L} = \int d^3x \left(-A_0^I D_k \Pi^{kI} - iB_{0i}^I\left(\frac{1}{2}\eta^{ijk}F_{jk}^I - \frac{g^2}{2}\Pi^{iI}\right)\right). \tag{3.8}$$

Calculando la variación de la acción (3.6), donde hemos usado la expresión explícita de los momentos, con respecto a A_i^I y Π^{iI} obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \delta A_i^I &: \quad \eta^{ijk}D_j B_{0k}^I = 0, \\ \delta \Pi^{iI} &: \quad D_i A_0^I = \dot{A}_i^I - i\frac{g^2}{2}B_{0i}^I, \end{aligned} \tag{3.9}$$

mientras que la variación con respecto a A_0^I y B_{0i}^I, proporciona las siguientes restricciones primarias

$$\begin{aligned} \phi^I &:= D_k \Pi^{kI} \approx 0, \\ \phi^{iI} &:= \frac{g^2}{2}\Pi^{iI} - \frac{1}{2}\eta^{ijk}F_{jk}^I \approx 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Como podemos observar, el Hamiltoniano canónico (3.8) es una combinación lineal de las restricciones (3.10), donde A_0^I y B_{0i}^I corresponden a multiplicadores de Lagrange, los cuales imponen las restriciones.

El siguiente paso es identificar si nuestra teoría presenta resricciones secundarias. Para esto, calculamos la evolucion temporal de las restriciones (3.10); por condiciones de consistencia, percibimos que no hay mas restriciones

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^I &= \left\{\phi^I(x), H_c\right\} = f^{IJK}\left(A_0^J\phi^K - \phi^{iJ}B_{0i}^K\right) \approx 0, \\ \dot{\phi}^{iI} &= \left\{\phi^{iI}(x), H_c\right\} = f^{IJK}A_0^J\phi^{iK} \approx 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Una vez que hemos calculado todas las restricciones, necesitamos identificar cuales de ellas corresponden a restricciones de primera y segunda clase. Para realizar esta separación debemos calcular el parénteis de Poisson entre todas las restricciones,

$$\begin{aligned}
\left\{\phi^I(x), \phi^J(y)\right\} &= f^{IJK}\phi^K\delta^3(x,y), \\
\left\{\phi^I(x), \phi^{iJ}(y)\right\} &= f^{IJK}\phi^{iK}\delta^3(x,y), \\
\left\{\phi^{iI}(x), \phi^{jJ}(y)\right\} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

por lo tanto, podemos observar que las restricciones forman un conjunto de primera clase. No obstante, las $4(N^2-1)$ restricciones de primera clase, dadas por (3.10), no son independientes. Debido a la identidad de Bianchi $DF^I = 0$, tenemos

$$D_i\phi^{iI} = \phi^I. \tag{3.13}$$

En consecuencia, de las $3(N^2-1)$ restricciones de primera clase ϕ^{iI}, solamente identificamos $[3(N^2-1)-(N^2-1)] = 2(N^2-1)$ restricciones independientes. Con esta información, somos capaces de calcular los grados de libertad físicos de nuestro sistema[3] ; tenemos $6(N^2-1)$ variables dinámicas, $3(N^2-1)$ restricciones de primera clase independientes y la teoría carece de restricciones de segunda clase. Esto significa que la teoría no tiene grados de libertad locales por punto del espacio-tiempo, es decir, corresponde a una teoría topológica.

La identificación de las restricciones nos permite construir la acción extendida, la cual viene dada por

$$S_E\left[A_i^I, \Pi^{iI}, A_0^I, B_{0i}^I\right] = \int_M \left\{\dot{A}_i^I\Pi^{iI} + A_0^I D_i\Pi^{iI} + \frac{i}{2}\eta^{ijk}B_{0i}^I F_{jk}^I + g^2\Pi^{iI}B_{0i}^I\right\}, \tag{3.14}$$

de donde podemos identificar el Hamiltoniano extendido

$$H_E = -A_0^I D_i\Pi^{iI} - \frac{i}{2}B_{0i}^I\left(\eta^{ijk}F_{jk}^I - g^2\Pi^{iI}\right), \tag{3.15}$$

el cual es una combinación lineal de restricciones de primera clase. Las ecuaciones de movimiento obtenidas mediante el Hamiltoniano extendido, las cuales son físicamente

[3] Los grados de libertad, se definen como el número de variables físicas independientes necesarias y suficientes para describir la dinámica de un sistema. Si el sistema presenta restricciones, el número de grados de libertad está dado por

$$\begin{aligned}
GL &= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}\textit{Número total de}\\ \textit{variables canónicas}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\textit{Número de restricciones de}\\ \textit{segunda clase originales}\end{pmatrix}\right. \\
&\qquad \left. -2\times\begin{pmatrix}\textit{Número de restricciones}\\ \textit{de primera clase}\end{pmatrix}\right]
\end{aligned}$$

equivalentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange, son

$$\begin{aligned}
\delta A_0^I &: \ D_i\Pi^{iI} = 0, \\
\delta B_{0i}^I &: \ \frac{1}{2}\eta^{ijk}F_{jk}^I - \frac{g^2}{2}\Pi^{iI} = 0, \\
\delta A_i^I &: \ \eta^{ijk}D_jB_{0k}^I = 0, \\
\delta \Pi_i^I &: \ D_iA_0^I = \dot{A}_0^I - i\frac{g^2}{2}B_{0i}^I.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Una vez encontradas las acción extendida y el Hamiltoniano extendido, siguiendo con el análisis, se calcularán las transformaciones de norma, las cuales dejan covariantes las ecuaciones de movimiento. Para lo cual se usará el formalismo de Castellani [66], el cual permite definir el generador de estas transformaciones en términos de las restricciones de primera clase de la siguiente manera

$$G = \int_\Sigma \varepsilon^I\phi^I + \varepsilon_i^I\phi^{iI}, \tag{3.17}$$

de esta forma, las transformaciones de norma definidas en el espacio fase vienen dadas por

$$\begin{aligned}
\delta_0 A_i^I &= -D_i\varepsilon^I + \varepsilon_i^I, \\
\delta_0 \Pi^{iI} &= f^{IJK}\varepsilon^J\Pi^{iK} + \eta^{ijk}D_j\varepsilon_k^I, \\
\delta_0 A_0^I &= 0, \\
\delta_0 B_{0i}^I &= 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Por otro lado, a nivel Lagrangiano la teoría BF es invariante bajo difeomorfismos [60], y aparentemente esta simetría no está presente en (3.18). No obstante, redefiniendo los parámetros de norma

$$\begin{aligned}
\varepsilon^I &= -\xi^\mu A_\mu^I, \\
\varepsilon_i^I &= \xi^\mu F_{\mu i}^I,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

las tranformaciones de norma se expresan como

$$\begin{aligned}
A_i^I &\to A_i^I + \mathcal{L}_\xi A_i^I, \\
\Pi_I^i &\to \Pi_I^i + \mathcal{L}_\xi \Pi_I^i.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Así, los difeomorfismos corresponden a una simetría interna de la teoría en el espacio fase. Sin embargo, esta simetría no corresponde a la obtenida de manera covariante a nivel lagrangiano [60], puesto que los difeomorfismos sólo actúan sobre las componentes dinámicas de la acción, es decir la parte espacial de la conexión; mientras que los demás campos presentes en la acción permanecen ausentes. Como veremos en el capítulo siguiente, para que podamos empatar las transformaciones de norma tanto a nivel lagrangiano como hamiltoniano, será necesario extender el álgebra de restricciones, para de esta manera tomar en cuenta todas las variables que aparezcan a nivel de la acción.

Chapter 4

El formalismo de Dirac aplicado a las teorías de Maxwell y Yang-Mills como teorías tipo BF

En este capítulo, y como punto de partida para estudiar una teoría invariante bajo difeomorfismos, llevaremos a cabo el análisis de Dirac de la teoría de Maxwell y Yang-Mills expresadas como una teoría tipo BF con restricciones. El lagrangiano propuesto, pese a que se compone de dos teorías topológicas, preserva a nivel clásico las ecuaciones de movimiento así como los mismos grados de libertad y las mismas simetrías de norma. La importancia de esta formulación está motivada en el estudio de diferentes enfoques clásicos y cuánticos de Relatividad General y de teorías invariantes bajo difeomorfismos relacionadas, particularmente, las formulaciones de gravedad como una teoría BF con restricciones. Se puede decir, que las recientes propuestas no perturbativas de gravedad cuántica, tal y como gravedad cuántica de lazos (LQG) [10, 68, 73] y los modelos de espuma espinoriales (*spin foam models*) [74, 75, 76, 77], en cierto sentido, tuvieron su origen en este tipo de formalismo inspirados por el trabajo de Plebański [58].

Como es bien conocido, a mediados de los años setenta, Plebański escribió las ecuaciones de movimiento de Relatividad General en cuatro dimensiones, de tal manera que las variables fundamentales que describen el campo gravitacional están expresadas mediante una 2-forma, una conexión y algunos multiplicadores de Lagrange. La geometría del espacio-tiempo, es entonces construida a partir de estos bloques fundamentales, haciendo que la acción de Plebański básicamente sea una teoría tipo BF suplementada con algunas restricciones sobre los campos. Con el fin de de obtener una formulación en términos de tétradas, las 2-formas denotadas comunmente como B, son eliminadas resolviendo las restricciones e insertando la solución en la acción de Plebański, obteniendo así la formulación autodual de Relatividad General [**?**, **?**].

Siguiendo la misma idea usada por Plebański, llevaremos a cabo un análisis hamiltoniano estricto de la teoría de Maxwell y Yang-Mills expresadas como una teoría BF usando variables auxiliares. Esta acción comparte muchas semejanzas con la acción de Plebański ya que es una expresión lineal en los campos, lo cual permite exponer el contenido geométrico del espacio de soluciones, y está dada en términos de 2-formas y de conexiones. Recientemente, expresiones análogas han sido usadas para estudiar acoplamientos mínimos de gravedad con materia en el marco de teorías invariantes bajo difeomorfismos [81]. Este capítulo está basado en [79], donde se lleva a cabo un análisis exhaustivo del álgebra de restricciones, así como el estudio del modelo de Martellini [64], el cual proporciona información sobre el contenido topológico de teorías de norma no abelianas.

4.1 Maxwell expresada como una teoría BF

En esta sección llevaremos a cabo un análisis de Dirac estricto de la teoría de Maxwell expresada como una teoría BF. Como hemos mencionado en los capítulos anteriores y a fin de exponer la estructura de norma completa de la teoría, consideraremos como variables dinámicas a todos los campos presentes en la acción y no sólo a aquellos con derivadas temporales, tal y como hicimos con la acción de Holst en el capítulo precedente. La acción que estudiaremos está dada por

$$S[A, B] = \int_M *B \wedge B - 2B \wedge *F, \tag{4.1}$$

donde $F = \frac{1}{2}F_{\ \mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, con $F_{\ \mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, el tensor electromagnético, $B = \frac{1}{2}B_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge dx^\beta$ es una 2-forma definida en la variedad M de dimensión cuatro, y el símbolo $*$ corresponde al operador de dualidad definido como $*B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}B^{\mu\nu}$ ($\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{-g}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$). Para nuestro análisis, consideraremos a M una variedad de Minkowski no dinámica. De esta manera, la acción (4.1) toma la siguiente forma

$$S[A, B] = \int_M \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{2}B^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu). \tag{4.2}$$

Haciendo la variación de la acción (4.2), obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta} &= (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha), \\ \partial_\alpha B^{\alpha\nu} &= 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

que esencialmente, corresponden a las ecuaciones de Maxwell. La primera ecuación de (4.3) recobra la definición del tensor de campo electromagnético, mientras que la segunda concuerda con las ecuaciones de Maxwell. Sustituyendo las ecuaciones de movimiento (4.1) en la acción (4.2) obtenemos

$$S[A] = -\int_M \frac{1}{4} B_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} dx^4, \tag{4.4}$$

lo cual coincide con la acción usual para el campo electromagnético [80]. Es importante señalar, que el papel que juegan las variables dinámicas de acuerdo a las acciones (4.2) y (4.4) es muy diferente. En la expresión (4.2), A_μ y $B_{\mu\nu}$ son ambas variables dinámicas, mientras que en (4.4), sólo A_μ lo es, entretanto $B_{\mu\nu}$ es meramente una etiqueta.

De este modo, la teoría de Maxwell (4.4) y la acción (4.2) dan lugar a las mismas ecuaciones de movimiento, sin embargo, podemos preguntarnos si ambas acciones exhiben las mismas simetrías. En otras palabras, ¿la acción (4.2) presenta los dos grados de libertad y las simetrías de norma que caracteriza a la teoría de Maxwell?. La respuesta a esta cuestión es afirmativa, y para probarla desarrollaremos un análisis de Dirac estricto [79]. Cabe mencionar que ésta pregunta no es trivial, ya que en la literatura existen ejemplos en el que dos acciones diferentes, dando lugar a las mismas ecuaciones de movimiento, no representan el mismo sistema dinámico [44, 81]. Inclusive, como vimos en el capítulo anterior, la acción de Relatividad General con el parámetro de Immirzi da lugar a la misma teoría clásica, no obstante, éste parámetro proporciona un número continuo de distintas versiones cuánticas. Por lo tanto, para responder esta interrogante es necesario llevar a cabo un análisis Hamiltoniano.

4.1.1 Descomposición de la acción

Antes de proceder con el análisis, resulta interesante observar que la acción (4.2) está compuesta por dos términos

$$S_1[B] = \int_M \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \tag{4.5}$$

y

$$S_2[A, B] = \int_M \frac{1}{2} B^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \tag{4.6}$$

donde ambas S_1 y S_2, corresponden a acciones topológicas, es decir, carecen de grados de libertad locales. De hecho, podemos ver inmediatamente que $S_1[B]$ es topológica, ya que no contiene ninguna derivada temporal de las variables dinámicas. Por otro lado, para probar que $S_2[A, B]$ carece de grados de libertad locales, llevaremos a cabo el siguiente análisis hamiltoniano. La descomposición $3 + 1$ de la acción (4.6) viene dada por

$$S_2[A, B] = \int \int_\Sigma \left[B^{0i} (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) + \frac{1}{2} B^{ij} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \right] dx^3 dt, \tag{4.7}$$

donde podemos identificar la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = B^{0i}(\partial_0 A_i - \partial_i A_0) + \frac{1}{2}B^{ij}(\partial_i A_j - \partial_j A_i). \tag{4.8}$$

Para continuar con el método de Dirac estricto, necesitamos definir los momentos $(\Pi^\alpha, \Pi_{\nu\beta})$, canónicamente conjugados a las variables $(A_\alpha, B^{\nu\beta})$

$$\Pi^\alpha = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{A}_\alpha}, \qquad \Pi_{\nu\beta} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{B}^{\nu\beta}}. \tag{4.9}$$

El siguiente paso para ver si una teoría es singular, es mediante la matriz Hessiana, (definida en el capítulo 2) cuyas componentes están dadas por

$$\frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\alpha)\delta(\delta_\mu A_\rho)}, \quad \frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu B^{\alpha\beta})\delta(\partial_\mu A_\rho)}, \quad \frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu B^{\alpha\beta})\delta(\partial_\mu B^{\rho\gamma})}, \tag{4.10}$$

haciendo uso de (4.8), estos elementos son idénticamente igual a cero, por lo tanto el rango de la matriz Hessiana es igual a cero. De esta manera, esperamos 10 restricciones primarias, las cuales surgen a nivel Lagrangiano. De la definición de los momentos (4.9), identificamos las siguientes 10 restriciones primarias

$$\begin{aligned} \phi^0 &:= \Pi^0 \approx 0, \\ \phi^i &:= \Pi^i - B^{0i} \approx 0, \\ \phi_{0i} &:= \Pi_{0i} \approx 0, \\ \phi_{ij} &:= \Pi_{ij} \approx 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

con $i, j, k = 1, 2, 3$. El Hamiltoniano canónico del sistema, por definición está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \dot{A}_\mu \Pi^\mu + \dot{B}^{0i}\Pi_{0i} + \dot{B}^{ij}\Pi_{ij} - \mathcal{L} \\ &= -A_0\partial_i\Pi^i - \frac{1}{2}B^{ij}F_{ij}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde $F_{ij} \equiv (\partial_i A_j - \partial_j A_i)$. Teniendo en cuenta las restricciones primarias, podemos construir el Hamiltoniano primario

$$H_P = H_c + \int dx^3 \left[\lambda_0\phi^0 + \lambda_i\phi^i + \lambda^{0i}\phi_{0i} + \lambda^{ij}\phi_{ij}\right], \tag{4.13}$$

siendo $\lambda_0, \lambda_i, \lambda^{0i}, \lambda^{ij}$ los correspondientes multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones primarias (4.11). Antes de calcular las relaciones de consistencia, definimos el paréntesis de Poisson fundamental de nuestras variables dinámicas como

$$\begin{aligned} \{A_\alpha(x), \Pi^\mu(y)\} &= \delta^\mu_\alpha\delta^3(x-y), \\ \{B^{\mu\nu}(x), \Pi_{\alpha\beta}(y)\} &= \frac{1}{2}\left(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta_\alpha\nu\right)\delta^3(x-y). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Con el objetivo de que las ecuaciones de movimiento sean consistentes, es decir, que las soluciones permanezcan en la subvariedad definida por las restricciones, debemos calcular la evolución temporal de las restricciones primarias. Para esto, definiremos como $W = \{\phi^\sigma, \phi^\rho\}$, una matriz de 10×10, formada por el paréntesis de Poisson entre todas las restricciones primarias, y cuyas componentes vienen dadas por

$$\begin{aligned}
\left\{\phi^0(x), \phi^0(y)\right\} &= 0, \qquad \left\{\phi^0(x), \phi^i(y)\right\} = 0 \\
\{\phi^0(x), \phi_{0i}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^0(x), \phi^{ij}(y)\} = 0, \\
\{\phi^i(x), \phi^j(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^i(x), \phi_{0j}(y)\} = -\frac{1}{2}\delta^i_j \delta^3(x-y), \\
\{\phi^i(x), \phi_{lj}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi_{0i}(x), \phi_{0j}(y)\} = 0, \\
\{\phi_{0i}(x), \phi_{lj}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi_{ij}(x), \phi_{kl}(y)\} = 0,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

podemos ver que rango $W = 6$ y por lo tanto su nulidad es igual a 4. Esto significa que de la evolución temporal de las restricciones primarias esperamos 4 restricciones secundarias. Empleando los vectores nulos, las condiciones de consistencia dan lugar a las siguientes restricciones secundarias

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}^0 &= \{\phi^0, H_p\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \psi := \partial_i \Pi^i \approx 0, \\
\dot{\phi}_{ij} &= \{\phi_{ij}, H_p\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{ij} := \frac{1}{2} F_{ij} \approx 0;
\end{aligned} \tag{4.16}$$

por otro lado, el rango nos permite fijar el valor de los siguientes multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}^i &= \{\phi^i, H_p\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^{0i} = -\partial_j B^{ij}, \\
\dot{\phi}_{0i} &= \{\phi_{0i}, H_p\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Debido a que la teoría presenta restriciones secundarias, es necesario calcular su evolución temporal con el fin de saber si el sistema contiene restricciones terciarias. Las condiciones de consistencia de las restricciones secundarias muestran que no se producen mas restricciones [79].

Una vez obtenidas todas las restricciones de la teoría, se procede a separarlas usando la clasificación fundamental entre ellas: restricciones de primera clase (generadoras de las tranformaciones de norma) y de segunda clase (cuyo flujo hamiltoniano es transversal a la superficie de restricción permitiendonos construir el paréntesis de Dirac). Para realizar esta separación debemos calcular el paréntesis de Poisson entre todas las restricciones, primarias y secundarias

$$
\begin{aligned}
\{\phi^0(x), \phi^0(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^0(x), \phi^i(y)\} = 0 \\
\{\phi^0(x), \phi_{0i}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^0(x), \phi^{ij}(y)\} = 0, \\
\{\phi^0(x), \psi(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^0(x), \psi(y)\} = 0, \\
\{\phi^0(x), \psi_{ij}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^0(x), \psi_{ij}(y)\} = 0, \\
\{\phi^i(x), \phi^j(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^i(x), \phi_{0j}(y)\} = -\delta^i_j \delta^3(x-y), \\
\{\phi^i(x), \phi_{lj}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^i(x), \psi(y)\} = 0, \\
\{\phi^i(x), \psi_{kl}(y)\} &= -\frac{1}{2}\left[\delta^i_l \partial_k \delta^3(x-y) - \delta^i_k \partial_l \delta^3(x-y)\right], \\
\{\phi_{0i}(x), \phi_{0j}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi_{0i}(x), \phi_{lj}(y)\} = 0, \\
\{\phi_{0i}(x), \psi(y)\} &= 0, \qquad \{\phi_{0i}(x), \psi_{kl}(y)\} = 0, \\
\{\phi_{ij}(x), \phi_{kl}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi_{ij}(x), \psi(y)\} = 0, \\
\{\phi_{ij}(x), \psi_{kl}(y)\} &= 0, \qquad \{\psi(x), \psi(y)\} = 0, \\
\{\psi(x), \psi(y)\} &= 0, \qquad \{\psi(x), \psi_{ij}(y)\} = 0, \\
\{\psi_{ij}(x), \psi_{kl}(y)\} &= 0. \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

La matriz de 14×14, W', cuyas componentes están dadas por los paréntesis (4.18), tiene rango 6 y nulidad 8. Lo cual implica que el sistema tiene 8 restricciones de primera clase y 6 de segunda. Al contraer los vectores nulos de la matriz W' con las restricciones, podemos identificar las siguientes 8 restricciones de primera clase

$$
\begin{aligned}
\gamma^0 &= \Pi^0 \approx 0, \\
\gamma_{ij} &= \Pi_{ij} \approx 0, \\
\gamma &= \partial_i \Pi^i \approx 0, \\
\gamma'_{ij} &= \frac{1}{2} F_{ij} + \frac{1}{2}\left[\partial_i \Pi_{0j} - \partial_j \Pi_{0i}\right] \approx 0, \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

donde podemos identificar a la tercera ecuación, como la restricción de Gauss para nuestra teoría. Por otro lado, el rango de W' nos permite determinar las siguientes 6 restricciones de segunda clase

$$
\begin{aligned}
\chi_{0i} &= \Pi_{0i} \approx 0, \\
\chi^i &= \Pi^i - B^{0i} \approx 0. \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

Una vez que todas las restricciones han sido clasificadas, podemos observar que no todas las restricciones de primera clase (4.19) son independientes. Para esto, analicemos la siguiente relación

$$
\Upsilon^i \equiv \eta^{ijk} \gamma'_{jk} = \frac{1}{2} \eta^{ijk} F_{jk} + \eta^{ijk} \partial_j \Pi_{0k}, \qquad (4.21)
$$

donde $\partial_k \Upsilon^k = 0$, debido a la identidad de Bianchi, $\eta^{ijk}\partial_i F_{jk} = 0$. Esto significa que debido a que se tiene una condición adicional sobre las restricciones, el número de restricciones independientes de primera clase es $(8-1) = 7$. Finalmente podemos llevar a cabo el conteo de grados de libertad de la acción $S_2[A, B]$: tenemos 20 variables canónicas, 7 restricciones de primera clase independientes y 6 restricciones de segunda clase [1]. Por lo tanto, el sistema definido por (4.6) no tiene grados de libertad locales por punto del espacio tiempo, es decir, corresponde a una teoría topológica.

De esta modo, hemos probado que las acciones (4.5) y (4.6) corresponden a teorías topológicas. No obstante, el acoplamiento dado por una combinación lineal entre ambas, expresado en la acción (4.2), presenta grados de libertad, lo cual mostraremos en el siguiente apartado.

4.1.2 Análisis hamiltoniano de Maxwell como teoría BF

En esta sección desarrollaremos el análisis de Dirac estricto para la acción completa dada por (4.2), la cual corresponde a la teoría de Maxwell expresada como una teoría BF. Haciendo la descomposición $3+1$ de (4.2), obtenemos

$$S[A] = \int\int_\Sigma \left[\frac{1}{2}B_{0i}B^{0i} + \frac{1}{4}B_{ij}B^{ij} - B^{0i}(\dot{A}_i - \partial_i A_0) - \frac{1}{2}B^{ij}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)\right] dx^3 dt, \tag{4.22}$$

de donde podemos identificar la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}B_{0i}B^{0i} + \frac{1}{4}B_{ij}B^{ij} - B^{0i}(\dot{A}_i - \partial_i A_0) - \frac{1}{2}B^{ij}(\partial_i A_j - \partial_j A_i). \tag{4.23}$$

Para continuar con el método de Dirac, es necesario definir los momentos $(\Pi^\alpha, \Pi^{\alpha\beta})$ canonicamente conjugados a las variables dinámicas $(A_\alpha, B_{\alpha\beta})$

$$\Pi^\alpha = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{A}_\alpha}, \qquad \Pi^{\alpha\beta} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{B}_{\alpha\beta}}. \tag{4.24}$$

Por otro lado, las componentes de la matriz hessiana vienen dadas por

$$\frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\alpha)\partial(\partial_\mu A_\rho)}, \quad \frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu B_{\alpha\beta})\partial(\partial_\mu A_\rho)}, \quad \frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu B_{\alpha\beta})\partial(\partial_\mu B_{\rho\gamma})}, \tag{4.25}$$

[1] Los grados de libertad, se definen como el número de variables físicas independientes necesarias y suficientes para describir la dinámica de un sistema. Si el sistema presenta restricciones, el número de grados de libertad está dado por

$$\begin{aligned} GL \;=\; & \frac{1}{2}\Bigg[\begin{pmatrix}\textit{Número total de}\\ \textit{variables canónicas}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\textit{Número de restricciones de}\\ \textit{segunda clase originales}\end{pmatrix} \\ & -2\times\begin{pmatrix}\textit{Número de restricciones}\\ \textit{de primera clase}\end{pmatrix}\Bigg]\end{aligned}$$

las cuales son idénticamente igual a cero, por lo tanto el rango de la matriz Hessiana es cero. Esto significa que esperamos 10 restricciones primarias, las cuales surgen de la definición de los momentos (4.24)

$$\begin{aligned} \phi^0 &:= \Pi^0 \approx 0, \\ \phi^i &:= \Pi^i + B^{0i} \approx 0, \\ \phi^{0i} &:= \Pi^{0i} \approx 0, \\ \phi^{ij} &:= \Pi^{ij} \approx 0. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Por definición, el hamiltoniano canónico del sistema tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \dot{A}_\mu \Pi^\mu + \dot{B}_{0i}\Pi^{0i} + \dot{B}_{ij}\Pi^{ij} - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}\Pi_i \Pi^i - \frac{1}{4}B_{ij}B^{ij} - A_0 \partial_i \Pi^i + \frac{1}{2}B^{ij}(\partial_i A_j - \partial_j A_i). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Teniendo en cuenta las restricciones primarias, el Hamiltoniano primario viene dado por

$$H_P = H_c + \int dx^3 \left[\lambda_0 \phi^0 + \lambda_i \phi^i + \lambda_{0i}\phi^{0i} + \lambda_{ij}\phi^{ij} \right], \tag{4.28}$$

siendo $\lambda_0, \lambda_i, \lambda_{0i}, \lambda_{ij}$ los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones primarias (4.27). Para esta teoría, definimos el paréntesis de Poisson fundamental como

$$\begin{aligned} \{A_\alpha(x), \Pi^\mu(y)\} &= \delta^\mu_\alpha \delta^3(x-y), \\ \{B_{\mu\nu}(x), \Pi^{\alpha\beta}(y)\} &= \frac{1}{2}\left(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\beta_\mu \delta^\alpha_\nu\right)\delta^3(x-y). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Para calcular las condiciones de consistencia, definimos como W, la matriz de 10×10 cuyas entradas son los paréntesis de Poisson entre las restricciones primarias (4.27)

$$\begin{aligned} \{\phi^0(x), \phi^0(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^0(x), \phi^i(y)\} = 0, \\ \{\phi^0(x), \phi^{0i}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^0(x), \phi^{ij}(y)\} = 0, \\ \{\phi^i(x), \phi^j(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^i(x), \phi^{0j}(y)\} = \eta^{00}\eta^{ij}\delta^3(x,y), \\ \{\phi^{\alpha\beta}(x), \phi^{\mu\sigma}(y)\} &= 0, \end{aligned} \tag{4.30}$$

podemos observar que rango $W = 6$ y por lo tanto tiene nulidad igual a 4. Por lo tanto, usando los vectores nulos de W, las condiciones de consistencia dan lugar a 4 restricciones secundarias

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^0 &= \{\phi^0, \mathcal{H}_P\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \psi := \partial_i \Pi^i \approx 0, \\ \dot{\phi}^{ik} &= \{\phi^{ik}, \mathcal{H}_P\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \psi^{ik} := B^{ik} - (\partial^i A^k - \partial^k A^i) \approx 0, \end{aligned} \tag{4.31}$$

mientras que el rango de W nos permite fijar el valor de los siguientes multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^i &= \{\phi^i, \mathcal{H}_P\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^i = 0, \\ \dot{\phi}^{0i} &= \{\phi^{0i}, \mathcal{H}_P\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^{0i} = \partial_j B^{ij}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Debido a que la teoría no presenta restricciones terciarias, así como también a la naturaleza abeliana del álgebra (4.30), podemos identificar las siguientes 2 restricciones de primera clase

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \Pi^0 \approx 0, \\ \gamma &= \partial_i \Pi^i \approx 0, \end{aligned} \tag{4.33}$$

además de 12 restricciones de segunda clase

$$\begin{aligned} \chi^i &:= \Pi^i + B^{0i} \approx 0, \\ \chi^{0i} &= \Pi^{0i} \approx 0, \\ \chi^{ij} &= \Pi^{ij} \approx 0, \\ \chi'^{ik} &= B^{ik} - (\partial^i A^k - \partial^k A^i) \approx 0. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Una vez que hemos separado las restricciones, en restricciones de primera y segunda clase, podemos llevar a cabo el conteo de grados de libertad: Tenemos 20 variables dinámicas en el espacio fase, 2 restricciones de primera clase y 12 restricciones de segunda clase. Por lo tanto la teoría BF, dada por (4.2), presenta 2 grados de libertad por punto del espacio-tiempo, el mismo número de grados de libertad que la teoría de Maxwell. En otras palabras, la acción S_1, rompe la estructura topológica de S_2 dando como resultado la manifestación de grados de libertad. Usando las restricciones de primera clase (4.33), podemos ver que las transformaciones de norma definidas por la acción (4.2) son: $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \epsilon$, las cuales corresponden a las bien conocidas transformaciones de norma de Maxwell [27, 30].

De esta manera, a nivel clásico, la teoría BF que hemos estudiado describe el campo electromagnético. Más aún, si consideramos las restriccions de segunda clase (4.34) como igualdades fuertes, recuperamos los resultados estandar para la acción de Maxwell, Ejemplo 2.11.1. Es importante señalar, usando este sencillo ejemplo, que el acoplamiento de dos teorías topológicas, en general, no resulta en una teoría topológica, cuestión que había sido formulada anteriormente en la literatura [82]

4.1.3 Cuantización covariante

Usando las restricciones de primera clase (4.33) y de segunda clase (4.34), podemos construir la acción extendida (empleando toda la información dada por las restricciones y los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones de segunda clase)

$$\begin{aligned} S_E[A_\alpha, \pi^\alpha, B_{\mu\nu}, \Pi^{\mu\nu}, \lambda_0, \lambda, \beta_i, \beta_{0i}, \beta_{ij}.\beta'_{ij}] &= \int dx^3 dt \Big[\dot{A}_\alpha \pi^\alpha + \dot{B}_{\mu\nu} \Pi^{\mu\nu} - H_E - \lambda_0 \gamma^0 \\ &- \lambda\gamma - \beta_i \chi^i - \beta_{0j} \chi^{ij} - \beta_{ij} \chi^{ij} - \beta'_{ij} \chi'^{ij} \Big], \end{aligned} \tag{4.35}$$

de donde podemos identificar el hamiltoniano extendido

$$H_E = \frac{1}{2}\Pi_i\Pi^i - \frac{1}{4}B_{ij}B^{ij} - A_0\partial_i\Pi^i + \frac{1}{2}B^{ij}F_{ij} + 2B_i^j\partial_j\Pi^{0i} + 2\partial_i\Pi_i\Pi^{ij}, \tag{4.36}$$

siendo λ_0, λ y β_i, β_{0i}, β_{ij}, β'_{ij} los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricions de primera y segunda clase respectivamente.

Una vez identificados la acción extendida y el hamiltoniano extendido, podemos llevar a cabo la cuantización de la acción (4.2), por medio del formalismo de integral de trayectoria. Debido a la presencia de restricciones de primera y segunda clase, es necesario usar el método de Senjanovic [83], el cual es una generalización del método de Fadeev-Popov para teorías de norma.

Usando la definición de las restriciones de primera (4.33) y segunda clase (4.34), y debido a que el hamiltoniano extendido (4.36) no es una combinación lineal de las restricciones, (a pesar de provenir de una teoría BF) se realiza el proceso de fijación de la norma mediante las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \partial_i A_i \approx 0, \\ \theta^2 &= \partial_i\Pi^i + \Delta A_0 \approx 0, \end{aligned} \tag{4.37}$$

donde $\Delta = \partial_i\partial_i$. La primera relación es la bien conocida norma de Coulomb (Ejemplo 2.11.1), mientras que la segunda se obtiene evolucionando θ^1 mediante el hamiltoniano extendido (4.36). De este modo, la función de partición viene dada por

$$Z = \int d\mu \exp\left\{ i \int d^4x \left[\Pi^\mu \dot{A}_\mu + \Pi^{\mu\nu}\dot{B}_{\mu\nu} - H_E \right] \right\}, \tag{4.38}$$

donde, debido a la presencia de retricciones de segunda clase, la medida de integración está definida como

$$\begin{aligned} d\mu(A_\mu, \Pi^\mu, B_{\mu\nu}, \Pi^{\mu\nu}) &= \prod \delta(\theta)\delta(\gamma)\,|\det \|\{\theta,\gamma\}\||\times \prod \delta(\chi)|\det\|\{\chi,\chi\}\||^{1/2} \\ &\times\; DA_\mu D\Pi^\mu DB_{\mu\nu}D\Pi^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Ya que, $\det\|\{\gamma,\theta\}\| = \det^2(\Delta\delta(x-y))$, y debido a que el álgebra entre las restricciones de segunda clase no depende de los campos, podemos integrar sobre $B_{\mu\nu}$, Π^μ y $\Pi^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} Z &= \int DA_\mu \det\left[\frac{i}{2}\delta_{ij}\delta(x-y)\right]^{-\frac{1}{2}} \det\left[\Delta\delta(x-y)\right]|\det\|\{\chi,\chi\}\||^{1/2}\delta(\partial_iA_i) \\ &\times\; \exp i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]. \end{aligned} \tag{4.40}$$

finalmente, usando la norma de Coulomb obtenemos

$$Z = \int DA_\mu \exp i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\xi(\partial_iA_i)^2\right], \tag{4.41}$$

siendo ξ un parámetro real. Podemos observar, que la expresión (4.41) corresponde a la acción cuántica efectiva de la teoría electromagnética [30], por lo tanto la acción (4.2) equivale tanto clásica como cuánticamente a la teoría de Maxwell. Para completar nuestro análisis, en la siguiente sección generalizaremos los resultados anteriores en el caso de grupos no abelianos. Es decir, expresaremos a Yang-Mills también como una teoría BF.

4.2 Yang-Mills como una teoría BF

Es posible extender resultados de la sección anterior a teorías no abelianas definidas sobre un grupo de Lie compacto. En este caso, la acción análoga a (4.2), para la teoría de Yang-Mills es

$$S[A,B] = \int_M *B^I \wedge B^I - 2B^I \wedge *F^I, \tag{4.42}$$

donde F^I corresponde a la curvatura asociada a la 1-forma de conexión A^I, evaluada en el álgebra de Lie $SU(N)$, con constantes de estructura f^{IJK}. Escrito en términos de sus componentes, la acción (4.42) toma la forma

$$S[B,A] = \int_M \frac{1}{4} B^I_{\mu\nu} B^{\mu\nu I} - \frac{1}{2} B^{\mu\nu I} \left(\partial_\mu A^I_\nu - \partial_\nu A^I_\mu + f^{IJK} A_\mu A_\nu \right). \tag{4.43}$$

La cual tiene por ecuaciones de movimiento

$$B^I_{\mu\nu} = F^I_{\mu\nu}, \qquad D_\mu B^{\mu\nu I} = 0, \tag{4.44}$$

estas expresiones, corresponden a las ecuaciones de movimiento asociadas a la teoría de Yang-Mills [80]. De la misma manera que en el caso electromagnético, si sustituimos (4.44) en la acción (4.43), recuperamos el lagrangiano de Yang-Mills

$$S[A] = -\int_M \frac{1}{4} F^I_{\alpha\beta} F_I^{\alpha\beta} d^4x, \tag{4.45}$$

donde $F^I_{\alpha\beta} = \partial_\mu A^I_\nu - \partial_\nu A^I_\mu + f^I{}_{JK} A^J_\mu A^K_\nu$, es el tensor de curvatura evaluado en el álgebra de Lie.

4.2.1 Descomposición de la acción

Análogamente al caso electromagnético, podemos observar que la acción (4.43) está compuesta de dos términos

$$S_1[B] = \int_M \frac{1}{4} B^I_{\mu\nu} B_I^{\mu\nu}, \tag{4.46}$$

y

$$S_2[A,B] = \int_M \frac{1}{2} B_I^{\mu\nu} \left(\partial_\mu A_\nu^I - \partial_\nu A_\mu^I + f^I_{JK} A_\mu^J A_\nu^K \right), \tag{4.47}$$

es decir, dos acciones topológicas. El término $S_1[B]$ no depende de derivadas temporales, por consiguiente no tiene grados de libertad locales. En lo sucesivo, procederemos a probar que $S_2[A,B]$, es también un término topológico. A primera vista, uno podría suponer que el cálculo es trivial debido a la semejanza con Maxwell; sin embargo las teorías topológicas son suceptibles a grados de libertad locales asociados a topologías no triviales, tanto de la variedad como del haz fibrado en el cual son definidas [82, 103]. Por lo tanto es necesario llevar a cabo un análisis hamiltoniano debido a la estructura no abeliana del álgebra.

Haciendo la descomposición $3+1$ de $S_2[A,B]$ obtenemos

$$S_2[A,B] = \int \int_\Sigma \left[B^{0iI} (\dot{A}_i^I - \partial_i A_0^I + f^{IJK} A_0^J A_i^K) + \frac{1}{2} B^{ijI} F_{ij}^I \right], \tag{4.48}$$

de donde podemos identificar la siguiente densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = B^{0iI} (\partial_0 A_i^I - \partial_i A_0^I + f^{IJK} A_0^J A_i^K) + \frac{1}{2} B^{ijI} F_{ij}^I. \tag{4.49}$$

Para continuar con el método de Dirac estricto, definimos los momentos $(\Pi^{\alpha I}, \Pi^{\alpha\beta I})$ canónicamente conjugados a las variables dinámicas $(A_\alpha^I, B_{\alpha\beta}^I)$

$$\Pi^{\alpha I} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{A}_\alpha^I}, \qquad \Pi^{\alpha\beta I} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{B}_{\alpha\beta}^I}. \tag{4.50}$$

El siguiente paso para ver si una teoría es singular es mediante la matriz hessiana, cuyas componentes vienen dadas por

$$\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\alpha^I) \partial(\partial_\mu A_\rho^J)}, \quad \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu B_{\alpha\beta}^I) \partial(\partial_\mu A_\rho^J)}, \quad \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu B_{\alpha\beta}^I) \partial(\partial_\mu B_{\rho\gamma}^J)}, \tag{4.51}$$

las cuales son idénticamente igual a cero, porlo tanto, el rango de la matriz Hessiana es cero. Esto significa que esperamos $10(N^2-1)$ restricciones primarias, las cuales surgen de la definición de los momentos (4.65)

$$\begin{aligned} \phi^{0I} &: \Pi^{0I} \approx 0, \\ \phi^{iI} &: \Pi^{iI} - B^{0iI} \approx 0, \\ \phi_I^{0i} &: \Pi_I^{0i} \approx 0, \\ \phi_I^{ij} &: \Pi_I^{ij} \approx 0, \end{aligned} \tag{4.52}$$

Por definición, el hamiltoniano canónico del sistema tiene la forma

$$\begin{aligned} H_c &= \dot{A}_\mu^I \Pi_I^\mu + \dot{B}_{0i}^I \Pi_I^{0i} + \dot{B}_{ij}^I \Pi_I^{ij} - \mathcal{L} \\ &= -A_0^I D_i \Pi_I^{0i} - \frac{1}{2} B_I^{ij} F_{ij}^I, \end{aligned} \tag{4.53}$$

de este modo, teniendo en cuenta las restriciones primarias, el hamiltoniano primario se define como

$$H_P = H_c + \int d^3x \left[\lambda_0^I \phi_I^0 + \lambda_i^I \phi_I^i + \lambda_{0i}^I \phi_I^{0i} + \lambda_{ij}^I \phi_I^{ij} \right], \tag{4.54}$$

donde $\lambda_0^I, \lambda_i^I, \lambda_{0i}^I, \lambda_{ij}^I$ corresponden a los multiplicadores de Lagrange asociados a las restriciones primarias (4.67). Para esta teoría, el paréntesis fundamental de Poisson está dado por

$$\begin{aligned} \{A_\alpha^I(x), \Pi^{\mu I}(y)\} &= \delta_\alpha^\mu \delta^{IJ} \delta^3(x,y), \\ \{B_{\alpha\beta}^I(x), \Pi^{\mu\nu I}(y)\} &= \frac{1}{2}\left(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu\right) \delta^3(x,y). \end{aligned} \tag{4.55}$$

Para calcular las condiciones de consistencia, definimos como W, la matriz de $10(N^2-1) \times 10(N^2-1)$ cuyas entradas son los paréntesis de Poisson entre las restricciones primarias (4.67)

$$\begin{aligned} \{\phi_I^0(x), \phi_J^0(y)\} &= 0, \qquad \{\phi_I^0(x), \phi_J^i(y)\} = 0, \\ \{\phi_I^0(x), \phi_J^{0i}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi_I^0(x), \phi_J^{ij}(y)\} = 0, \\ \{\phi_I^i(x), \phi_J^j(y)\} &= 0, \qquad \{\phi_I^i(x), \phi_J^{0j}(y)\} = \frac{1}{2}\delta i_j \delta_{IJ} \delta^3(x,y), \\ \{\phi_I^i(x), \phi_J^{jk}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi_I^{ij}(x), \phi_J^{kl}(y)\} = 0, \end{aligned} \tag{4.56}$$

donde rango $W = 6(N^2-1)$ y por lo tanto con nulidad igual a $4(N^2-1)$. De este modo, usando los vectores nulos de W, las condiciones de consistencia dan lugar a $4(N^2-1)$ restricciones secundarias

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_I^0 = \{\phi_I^0, H_P\} \approx 0 \;\;&\Rightarrow\;\; \psi_I := D_i \Pi_I^i \approx 0, \\ \dot{\phi}_I^{ij} = \{\phi_I^{ij}, H_P\} \approx 0 \;\;&\Rightarrow\;\; \psi_{ij}^I := \frac{1}{2} F_{ij}^I \approx 0, \end{aligned} \tag{4.57}$$

mientras que el rango de W nos permite fijar el valor de los siguientes multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \dot{\phi^{0iI}} = \{\phi^{0iI}, H_P\} \approx 0 \;\;&\Rightarrow\;\; \lambda_i^I = 0, \\ \dot{\phi^{ijI}} = \{\phi^{ijI}, H_P\} \approx 0 \;\;&\Rightarrow\;\; \lambda_{0i}^I = 2 D_j B_I^{ij} + 2 f_I{}^{JK} A_0^J \Pi^{iK}. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Debido a que la teoría no presenta restricciones terciarias, una vez con todas las restricciones a la mano procederemos a separarlas en restricciones de primera y segunda clase. Para esto, siguiendo el algoritmo de Dirac, debemos calcular el paréntesis de

Poisson entre todas las restricciones, primarias y secundarias

$$
\begin{aligned}
\{\phi^{0P}(x), \phi^{0I}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^{0P}(x), \phi^{iI}(y)\} = 0, \\
\{\phi^{0P}(x), \phi^{0iI}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^{0P}(x), \phi^{ijI}(y)\} = 0, \\
\{\phi^{lP}(x), \phi^{iI}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^{lP}(x), \phi^{0iI}(y)\} = \frac{1}{2}\delta^i_l \delta^{PI}\delta^3(x-y), \\
\{\phi^{lP}(x), \phi^{ijI}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^{lmP}(x), \phi^{ijI}(y)\} = 0, \\
\{\phi^{0P}(x), \psi^{I}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^{lP}(x), \psi^{I}(y)\} = f^{PIK}\Pi^{lK}\delta^3(x-y), \\
\{\phi^{0lP}(x), \psi^{I}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^{lmP}(x), \psi^{I}(y)\} = 0, \\
\{\psi^{lmP}(x), \psi^{I}(y)\} &= 0, \qquad \{\psi^{P}(x), \psi^{I}(y)\} = f^{PIK}D_i\Pi^{iK} \\
\{\phi^{0P}(x), \psi^{ijI}(y)\} &= 0, \qquad , \{\psi^{lmP}(x), \psi^{ijI}(y)\} = 0 \\
\{\phi^{lP}(x), \psi^{ijI}(y)\} &= \frac{1}{2}\left(-\delta^l_j\delta^{PI}\partial_i + \delta^l_i\delta^{PI}\partial_j + f^{PIK}(\delta^l_iA^K_j - \delta^l_jA^K_i)\right)\delta^3(x,y), \\
\{\phi^{lmP}(x), \psi^{ijI}(y)\} &= 0,
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

La matriz W' de $14(N^2-1) \times 14(N^2-1)$, cuyas componentes están dadas por los paréntesis (4.75) tiene rango $6(N^2-1)$ y nulidad $8(N^2-1)$. Lo cual implica, según el algoritmo de Dirac estricto, que el sistema tiene $8(N^2-1)$ restricciones de primera clase

$$
\begin{aligned}
\gamma^0_I &= \Pi^0_I \approx 0, \\
\gamma^{ij}_I &= \Pi^{ij}_I \approx 0, \\
\gamma^I &= D_i\Pi^{iI} + 2f^I{}_{JK}B^J_{0i}\Pi^{0iK}, \\
\psi^I_{ij} &= \frac{1}{2}F^I_{ij} + \frac{1}{2}[D_i\Pi^0{}_j{}^I - D_j\Pi^0{}_i{}^I],
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

donde podemos observar como se generalizan las restriciones (4.19), para el caso de grupos de norma no abelianos. Por otro lado, el rango de W' nos permite determinar las siguientes $6(N^2-1)$ restricciones de segunda clase

$$
\begin{aligned}
\chi^{0i}_I &= \Pi^{0i}_I \approx 0, \\
\chi^i_I &= \Pi^i_I - B^{0i}_I \approx 0.
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

No obstante, podemos observar que no todas las restriciones de primera clase (4.76) son independientes, esto es debido a la siguiente relación

$$
\Upsilon^I_i \equiv \eta_i{}^{jk}\psi^I_{jk} = \frac{1}{2}\eta_i{}^{jk}F^I_{jk} + 2\eta_i{}^{jk}D_j\Pi^0{}_k{}^I, \tag{4.62}
$$

donde $D_i\Upsilon^{iI} - \eta_k{}^{ij}f^I{}_{JK}F^J_{ij}\Pi^{0kK} = 0$, debido a la identidad de Bianchi para el caso no abeliano, $\eta^{ijk}D_iF^I_{jk} = 0$. Esto significa que debido a que se tiene una condición adicional sobre las restriciones, el número de restricciones de primera clase independientes es $[8-1](N^2-1) = 7(N^2-1)$. Finalmente podemos realizar el conteo de grados de libertad de la acción $S_2[A,B]$ (4.47): tenemos $20(N^2-1)$ variables dinámicas en el espacio fase, $7(N^2-1)$ restricciones de primera clase independientes y $6(N^2-1)$ restricciones de segunda clase. Por lo tanto es sistema definido por $S_2[A,B]$ carece de grados de libertad locales por punto del espacio-tiempo, es decir, corresponde a una teoría topológica.

Analogamente al caso electromagnético, las acciones (4.46) y (4.47) corresponden a teorías topológicas. Sin embargo, su acoplamiento rompe la estructura topológica dando lugar a grados de libertad, más aún, resultando en la teoría de Yang-Mills.

4.2.2 Análisis hamiltoniano de Yang-Mills como una teoría tipo BF

En esta sección desarrollaremos el análisis de Dirac estricto para la acción evaluada en un álgebra de Lie no abeliana (4.43), la cual corresponde a la teoría de Yang-Mills expresada como una teoría BF. Haciendo la descomposición 3+1 de (4.43), obtenemos

$$S[A,B] = \int_M \left[\frac{1}{2}B^I_{0i}B^{0iI} + \frac{1}{4}B^I_{ij}B^{ijI} - B^{0iI}(\dot{A}^I_i - \partial_i A^I_0 + f^{ijk}A^J_0 A^K_i) - \frac{1}{2}B^{ijI}F^I_{ij}\right] d^3x dt, \tag{4.63}$$

de donde podemos identificar la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}B^I_{0i}B^{0iI} + \frac{1}{4}B^I_{ij}B^{ijI} - B^{0iI}(\dot{A}^I_i - \partial_i A^I_0 + f^{IJK}A^J_0 A^K_i) - \frac{1}{2}B^{ijI}F^I_{ij}. \tag{4.64}$$

Para continuar con el análisis hamiltoniano, es necesario definir los momentos $(\Pi^{\alpha I}, \Pi^{\alpha\beta I})$ canónicamente conjugados a las variables $(A^I_\alpha, B^I_{\alpha\beta})$

$$\Pi^{\alpha I} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{A}^I_\alpha}, \qquad \Pi^{\alpha\beta I} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{B}^I_{\alpha\beta}}. \tag{4.65}$$

Por otro lado, las componentes de la matriz hessiana vienen dadas por

$$\frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta\dot{A}^I_\alpha\partial\dot{A}^J_\rho}, \quad \frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta\dot{B}^I_{\alpha\beta}\delta\dot{A}^J_\rho}, \quad \frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta\dot{B}^I_{\alpha\beta}\delta\dot{B}^J_{\rho\gamma}}, \tag{4.66}$$

las cuales son idénticamente igual a cero, por lo tanto el rango de la matriz hessiana es cero. Esto significa que esperamos $10(N^2-1)$ restricciones primarias

$$\begin{aligned}
\phi^{0I} &:= \Pi^{0I} \approx 0, \\
\phi^{iI} &:= \Pi^{iI} + B^{0iI} \approx 0, \\
\phi^{0iI} &:= \Pi^{0iI} \approx 0, \\
\phi^{ijI} &:= \Pi^{ijI} \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Por definición, el hamiltoniano canónico del sistema tiene la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c &= \dot{A}^I_\mu \Pi^{\mu I} + \dot{B}^I_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu I} - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}\Pi^{iI}\Pi^I_i - \frac{1}{4}B^I_{ij}B^{ijI} - A^I_0 D_i \Pi^{iI} + \frac{1}{2}B^{ijI}F^I_{ij}.\end{aligned} \tag{4.68}$$

Teniendo en cuenta las restricciones primarias, el hamiltoniano primario viene dado por

$$H_P = H_c + \int d^3x \left[\lambda^I_0 \phi^{0I} + \lambda^I_i \phi^{iI} + \lambda^I_{0i}\phi^{0iI} + \lambda^I_{ij}\phi^{ijI}\right], \tag{4.69}$$

donde $\lambda^I_0, \lambda^I_i, \lambda^I_{0i}, \lambda^I_{ij}$ son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones primarias (4.67). Para esta teoría definimos los paréntesis de Poisson fundamentales como

$$\begin{aligned}\{A^I_\alpha(x), \Pi^{\mu J}(y)\} &= \delta^\mu_\alpha \delta^{IJ}\delta^3(x-y), \\ \{B^I_{\alpha\beta}(x), \Pi^{\mu\nu J}(y)\} &= \frac{1}{2}\left(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha\right)\delta^{IJ}\delta^3(x-y).\end{aligned} \tag{4.70}$$

Dentro del marco del algoritmo de Dirac, necesitamos conocer la evolución de las restricciones primarias, estas relaciones dan lugar a las condiciones de consistencia. Para esto, definimos como W, la matriz de $10(N^2-1)\times 10(N^2-1)$, cuyas entradas son los paréntesis de Poisson entre las restricciones primarias (4.67)

$$\begin{aligned}\{\phi^{0P}(x), \phi^{0I}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^{0P}(x), \phi^{iI}(y)\} = 0, \\ \{\phi^{0P}(x), \phi^{0iI}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^{0P}(x), \phi^{ijI}(y)\} = 0, \\ \{\phi^{lP}(x), \phi^{iI}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^{lP}(x), \phi^{0iI}(y)\} = -\frac{1}{2}\delta^l_i\delta^{PI}\delta^3(x-y), \\ \{\phi^{lP}(x), \phi^{ijI}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^{0lP}(x), \phi^{0iI}(y)\} = 0, \\ \{\phi^{0lP}(x), \phi^{ijI}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^{lmP}(x), \phi^{ijI}(y)\} = 0,\end{aligned} \tag{4.71}$$

analizando la matriz W, podemos observar que rango $W = 6(N^2-1)$ y por lo tanto su nulidad es $4(N^2-1)$. Por lo tanto, usando los vectores nulos de W, las condiciones de consistencia dan lugar a $4(N^2-1)$ restricciones secundarias

$$\begin{aligned}\dot{\phi}^{0I} &= \{\phi^{0I}, H_P\} \approx 0 \;\;\Rightarrow\;\; \psi^I := D_i\Pi^{iI} \approx 0, \\ \dot{\phi}^{ijI} &= \{\phi^{ijI}, H_P\} \approx 0 \;\;\Rightarrow\;\; \psi^{ijI} := B^{ijI} - F^{ijI} \approx 0,\end{aligned} \tag{4.72}$$

mientras que el rango de W nos permite fijar el valor de los siguientes multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned}\dot{\phi}^{0iI} &= \{\phi^{0iI}, H_P\} \approx 0 \;\;\Rightarrow\;\; \lambda^I_i = 0, \\ \dot{\phi}^{ijI} &= \{\phi^{ijI}, H_P\} \approx 0 \;\;\Rightarrow\;\; \lambda^I_{0i} = 2D_jB^{jiI} - 2f^{IJK}A^J_0\Pi^{iK}.\end{aligned} \tag{4.73}$$

Las demás condiciones de consistencia, no dan origen a más restriciones, en vez de eso, obtenemos el valor de los multiplicadores de Lagrange restantes [79],

$$\dot{\psi}^{lmP} = \{\psi^{lmP}, H_P\} \approx 0 \;\; \Rightarrow \;\; \alpha^P_{lm} = 0, \quad \lambda^P_{lm} = D_l \Pi^{mP} - D_m \Pi^{lP} - f^{PKI} F^K_{lm} A^I_0. \tag{4.74}$$

Una vez con todas las restricciones de la teoría a la mano, procederemos a separarlas en restricciones de primera y segunda clase. Para esto, siguiendo el algoritmo de Dirac, debemos calcular el paréntesis de Poisson entre todas las restricciones, primarias y secundarias

$$\begin{array}{rcl}
\{\phi^{0P}(x), \phi^{0I}(y)\} & = & 0, \qquad \{\phi^{0P}(x), \phi^{iI}(y)\} = 0, \\
\{\phi^{0P}(x), \phi^{0iI}(y)\} & = & 0, \qquad \{\phi^{0P}(x), \phi^{ijI}(y)\} = 0, \\
\{\phi^{lP}(x), \phi^{iI}(y)\} & = & 0, \qquad \{\phi^{lP}(x), \phi^{0iI}(y)\} = -\dfrac{1}{2}\delta^i_l \delta^{PI} \delta^3(x,y), \\
\{\phi^{lP}(x), \phi^{ijI}(y)\} & = & 0, \qquad \{\phi^{lmP}(x), \phi^{ijI}(y)\} = 0, \\
\{\phi^{0P}(x), \psi^{I}(y)\} & = & 0, \qquad \{\psi^{P}(x), \psi^{ijI}(y)\} = -f^{PIM} F^M_{ij}, \\
\{\phi^{0lP}(x), \psi^{I}(y)\} & = & 0, \qquad \{\phi^{lmP}(x), \psi^{I}(y)\} = 0, \\
\{\phi^{0lP}(x), \psi^{ijI}(y)\} & = & 0, \qquad \{\psi^{P}(x), \psi^{I}(y)\} = f^{PIK} \psi^K = 0, \\
\{\phi^{0P}(x), \psi^{ijI}(y)\} & = & 0, \qquad , \{\phi^{lP}(x), \psi^{I}(y)\} = f^{PIK} \Pi^{lK} \delta^3(x,y) \\
\{\psi^{lmP}(x), \phi^{0I}(y)\} & = & 0, \qquad \{\psi^{lmP}(x), \phi^{ijI}(y)\} = (\delta^i_l \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_l) \delta^{PI} \delta^3(x,y), \\
\{\phi^{lP}(x), \psi^{ijI}(y)\} & = & \left(\delta^l_j \delta^{PI} \partial_i - \delta^l_i \delta^{PI} \partial_j + f^{IPK} (\delta^l_i A^K_j + \delta^l_j A^K_i)\right) \delta^3(x,y),
\end{array} \tag{4.75}$$

La matriz W' de $14(N^2-1) \times 14(N^2-1)$, definida a través de los paréntesis entre todas las restricciones, y cuyas componentes están dadas por (4.75), tiene rango $12(N^2-1)$ y nulidad $2(N^2-1)$. Lo cual implica, de acuerdo al método de Dirac estricto, que el sistema tiene $2(N^2-1)$ restricciones de primera clase y $12(N^2-1)$ de segunda. Al contraer los vectores nulos de matriz W' con las restricciones, podemos identificar las restricciones de primera clase

$$\begin{aligned}
\gamma^{0I} &= \Pi^{0I} \approx 0, \\
\gamma^{I} &= D_i \Pi^{iI} + 2 f^{IJK} B^J_{0i} \Pi^{0iK} + f^{IJK} B^J_{ij} \Pi^{ijK} \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.76}$$

análogamente, el rango nos permite determinar las restricciones de segunda clase

$$\begin{aligned}
\chi^{iI} &= \Pi^{iI} + B^{0iI} \approx 0, \\
\chi^{0iI} &= \Pi^{0iI} \approx 0, \\
\chi^{ijI} &= \Pi^{ijI} \approx 0, \\
\phi^{ijI} &= (B^{ijI} - F^{ijI}) \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Finalmente podemos llevar a cabo el conteo de grados de libertad de la acción (4.43): tenemos $20(N^2-1)$ variables canónicas en el espacio fase, $2(N^2-1)$ restricciones de primera clase y $12(N^2-1)$ restricciones de segunda clase. Por lo tanto, el Lagrangiano de Yang-Mills expresado como una teoría BF tiene $2(N^2-1)$ grados de libertad por punto del espacio-tiempo, los cuales corresponden a los grados de libertad de la teoría de Yang-Mills [30].

Debido a la naturaleza no abeliana del álgebra de Lie $SU(N)$, es necesario verificar que las nuevas restriciones definidas en (4.76) y (4.77) forman un álgebra cerrada, pues de lo contrario tendríamos inconsistencias en el análisis hamiltoniano. El álgebra entre las restricciones de primera y segunda clase viene dada por

$$
\begin{aligned}
\{\gamma^{0P}(x),\gamma^{0I}(y)\} &= 0, \qquad \{\chi^{lP}(x),\gamma^{I}(y)\} = f^{PIK}\chi^{lK} = 0,\\
\{\gamma^{0P}(x),\chi^{iI}(y)\} &= 0, \qquad \{\chi^{0lP}(x),\gamma^{I}(y)\} = f^{PIK}\chi^{0lP} = 0,\\
\{\gamma^{0P}(x),\chi^{0iI}(y)\} &= 0, \qquad \{\chi^{lmP}(x),\gamma^{I}(y)\} = f^{PIK}\chi^{lmK} = 0,\\
\{\gamma^{0P}(x),\chi^{ijI}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^{lmP}(x),\gamma^{I}(y)\} = f^{PIK}\phi^{lmK} = 0,\\
\{\gamma^{0P}(x),\phi^{ijI}(y)\} &= 0, \qquad \{\gamma^{P}(x),\gamma^{I}(y)\} = f^{PIK}\gamma^{K} = 0,\\
\{\gamma^{0P}(x),\gamma^{I}(y)\} &= 0, \qquad \{\chi^{lP}(x),\chi^{iI}(y)\} = 0,\\
\{\chi^{lmP}(x),\chi^{ijI}(y)\} &= 0, \qquad \{\chi^{lP}(x),\chi^{0iI}(y)\} = -\frac{1}{2}\delta^{i}_{l}\delta^{PI}\delta^{3}(x,y)\\
\{\chi^{lP}(x),\chi^{ijI}(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^{lmP}(x),\phi^{ijI}(y)\} = 0.,\\
\{\chi^{lP}(x),\phi^{ijI}(y)\} &= 0, \qquad \{\chi^{0lP}(x),\phi^{ijI}(y)\} = 0,\\
\{\chi^{0lP}(x),\chi^{0iI}(y)\} &= 0, \qquad \{\chi^{lmP}(x),\phi^{ijI}(y)\} = -\frac{1}{2}\left(\delta^{l}_{i}\delta^{m}_{j}-\delta^{l}_{j}\delta^{m}_{i}\right)\delta^{PI}\delta^{3}(x,y),\\
\{\chi^{lP}(x),\phi^{ijI}(y)\} &= \left(\delta^{l}_{j}\delta^{PI}\partial_i-\delta^{l}_{i}\delta^{PI}\partial_j+f^{PIK}(\delta^{l}_{j}A^{K}_{i}-\delta^{l}_{i}A^{K}_{j}\right)\delta^{3}(x,y)
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

donde podemos apreciar que las restricciones forman un álgebra cerrada. Más aún, las restricciones de primera clase (4.76) forman un álgebra de Lie donde las constantes de estructura son funciones constantes. En algunas teorías invariantes bajo difeomorfismos definidas en cuatro dimensiones, entre ellas Relatividad General y Husain-Kuchar, esta característica del álgebra no se cumple, lo cual da lugar a problemas en el ámbito de la cuantización, incluso en el formalismo BRST [85].

4.2.3 Ecuaciones de movimiento y transformaciones de norma

Una vez que ya se tienen todas las restriciones de primera y segunda clase que presenta la teoría, esta información se usará para encontrar la evolución dinámica del sistema vía las ecuaciones de movimiento de Hamilton, así como de las transformaciones de norma. Haciendo uso del hamiltoniano canónico (4.68), los multiplicadores de Lagrange (4.73) y las restricciones de segunda clase (4.77), definimos a la acción extendida como,

$$
\begin{aligned}
S_E[A^I_\mu, \Pi^{\mu I}, B^I_{\mu\nu}, \Pi^{\mu\nu I}, \lambda^I_0, \lambda^I, u^I_i, u^I_{0i}, u^I_{ij}, v^I_{ij}] = \int d^4x(\dot{A}^I_\mu \Pi^{\mu I} + \dot{B}^I_{\mu\nu}\Pi^{\mu\nu I} - \frac{1}{2}\Pi^{iI}\Pi^I_i \\
+\frac{1}{4}B^I_{ij}B^{ijI} + A^I_0 D_i \Pi^{iI} - \frac{1}{2}B^I_{ij}F^I_{ij} - 2D_i B^{ijI}\Pi^{0jI} + 2f^{PKI}\Pi^{lK}A^I_0\Pi^{0lK} - 2D_l\Pi^{mP}\Pi^{lmP} \\
+f^{PKI}F^K_{lm}A^I_0\Pi^{lmP} - \lambda^I_0\gamma^{0I} - \lambda^I\gamma^I - u^I_i\chi^{iI} - u^I_{0i}\chi^{0iI} - u^I_{ij}\chi^{ijI} - v^I_{ij}\phi^{ijI}). \qquad (4.79)
\end{aligned}
$$

de donde podemos identificar el hamiltoniano extendido,

$$
H_E = H' + \lambda^I_0\gamma^{0I} + \lambda^I\gamma^I, \qquad (4.80)
$$

donde H' es una función de primera clase, y está dado por

$$
\begin{aligned}
H' = \frac{1}{2}\Pi^{iI}\Pi^I_i + \frac{1}{4}B^I_{ij}B^{ijI} + A^I_0 D_i\Pi^{iI} - \frac{1}{2}B^I_{ij}F^I_{ij} - 2D_iB^{ijI}\Pi^{0jI} + 2f^{PKI}\Pi^{lK}A^I_0\Pi^{0lK} \\
-2D_l\Pi^{mP}\Pi^{lmP} + f^{PKI}F^K_{lm}A^I_0\Pi^{lmP}. \qquad (4.81)
\end{aligned}
$$

Realizando la variación de la acción extendida con respecto a todas las variables dinámicas, obtenemos las ecuaciones de movimiento que representan la evolución completa del sistema

$$
\begin{aligned}
\delta A^P_0 &: \dot{\Pi}^{0P} = D_l\Pi^{lP} + 2f^{JKP}\left(\Pi^{lK}\Pi^{0J} + F^K_{lm}\Pi^{lmJ}\right), \\
\delta\Pi^{0P} &: \dot{A}^P_0 = \lambda^P_0, \\
\delta A^P_l &: \dot{\Pi}^{lP} = f^{IPK}A^I_0\Pi^{lK} + D_iB^P_{il} - 2f^{KPJ}B^{ljJ}\Pi^{0jK} - 2f^{IPK}\Pi^{jK}\Pi^{ljI} - 2D_i\left(f^{KPI}A^I_0\Pi^{ilK}\right) \\
&\quad + f^{IPK}\Pi^{lK}\lambda^I + 2D_iv^{ilP}, \\
\delta\Pi^{lP} &: \dot{A}^P_l = \Pi^{lP} - D_lA^P_0 - 2f^{KPI}A^I_0\Pi^{0lK} + u^{lP}, \\
\delta B^P_{0l} &: \dot{\Pi}^{0lP} = f^{PIK}\Pi^{0lK}\lambda^I - \frac{1}{2}u^{lP}, \\
\delta B^P_{lm} &: \dot{\Pi}^{lmP} = 2D_l\Pi^{0mP} + f^{PIK}\Pi^{lmK}\lambda^I - \frac{1}{2}u^P_{lm}, \\
\delta\Pi^{0lP} &: \dot{B}^P_{0l} = D_iB^{ilP} - f^{PKI}\Pi^{lK}A^I_0 + \frac{1}{2}u^P_{0l}, \\
\delta\Pi^{lmP} &: \dot{B}^P_{lm} = 2D_l\Pi^{mP} - f^{PKI}F^K_{lm}A^I_0 + f^{IJP}\lambda^IB^J_{lm} + u^P_{lm}, \\
\delta\lambda^I_0 &: \gamma^{0I} = 0, \\
\delta\lambda^I &: \gamma^I = 0, \\
\delta u^I_i &: \chi^I_i = 0, \\
\delta u^I_{0i} &: \chi^I_{0i} = 0, \\
\delta u^I_{ij} &: \chi^I_{ij} = 0, \\
\delta v^I_i &: \phi^I_i = 0. \qquad (4.82)
\end{aligned}
$$

Estas ecuaciones son totalmente equivalentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange, y al igual que en el formalismo hamiltoniano, expresan a un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden (4.44), mediante un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. La presencia de las funciones arbitrarias λ^I y λ_0^I, las cuales corresponden a los multiplicadores de Lagrange asociados a las restriciones de primera clase (4.76), surgen debido que las ecuaciones de movimiento (4.44) son invariantes bajo ciertas transformaciones. Estas transformaciones, conocidas como de norma, son una simetría de las soluciones a las ecuaciones de movimiento. Por lo tanto la funciones arbitrarias λ, parametrizan las soluciones físicamente equivalentes del sistema.

Con el propósito de conocer estas simetrías, las cuales dejan covariantes a las ecuaciones de movimiento, usaremos el formalismo propuesto por Castellani [66]. Este procedimiento se basa en la conjetura de Dirac [1], la cual nos dice que las restricciones de primera clase son suficientes para derivar las transformaciones de norma. Definimos el generador de las transformaciones de norma, mediante las restriciones de primera clase, de la siguiente manera

$$G = \int_\Sigma \left[D_0 \epsilon_0^I \gamma^{0I} + \epsilon^I \gamma^I \right] d^3x, \tag{4.83}$$

donde los parámetros de norma ϵ_0^I y ϵ^I, corresponden a funciones infinitamente diferenciables, con soporte compacto, y están definidas en el espacio dual de las distribuciones. De esta manera, las tranformaciones de norma que dejan covariantes a las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned}
\delta_0 A_0^P &= D_0 \epsilon_0^P, \\
\delta_0 A_i^P &= -D_i \epsilon^P, \\
\delta_0 \Pi^{0P} &= -f^{PKI} \epsilon_0^K \Pi^{0I}, \\
\delta_0 \Pi^{iP} &= f^{PIK} \Pi^{iK} \epsilon^I, \\
\delta_0 B_{0i}^P &= f^{PIJ} \epsilon^I B_{0i}^J, \\
\delta_0 \Pi^{0i} &= f^{PIK} \epsilon^I \Pi^{0iK}, \\
\delta_0 B_{ij}^P &= f^{PIJ} \epsilon^I B_{ij}^J, \\
\delta_0 \Pi^{ijP} &= f^{PIK} \epsilon^I \Pi^{ijK}.
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Si redefinimos los parámetros de norma de manera adecuada, $\epsilon_0^I = \epsilon^I$, obtenemos

$$\begin{aligned}
A_\mu'^I &\to A_\mu^I - D_\mu \epsilon^I, \\
B_{\mu\nu}'^I &\to B_{\mu\nu}^I - f^I{}_{JK} \epsilon^J B_{\mu\nu}^K,
\end{aligned} \tag{4.85}$$

donde la primera relación, corresponde a las transformaciones de norma usuales para la teoría de Yang-Mills [30, 80], mientras que la segunda describe la transformación del tensor de curvatura evaluado en un álgebra de Lie compacta.

De esta manera, a nivel cásico, la teoría BF (4.43) describe el campo de Yang-Mills. Más aún, si consideramos las restricciones de segunda clase (4.77) como igualdades fuertes, recuperamos los resultados estándar de la literatura [80]. Análogamente al caso abeliano, mediante el método de Senjanovic y bajo un esquema apropiado de fijación de la norma [62, 86], es posible calcular su correspondiente acción cuántica efectiva, la cual equivale a la acción cuántica para el campo de Yang-Mills [62, 79].

Para finalizar este capítulo, cabe mencionar, que existen en la liteatura modelos alternativos para estudiar la teoría de Yang-Mills como una teoría de primer orden [62]. Sin embargo, estos resultados se enfocan más en extrapolar el contenido topológico mediante la introducción de observables no locales, como la presencia de monopolos en el vacío. Un estudio sobre las relaciones entre esta clase de teorías BF puede hallarse en [79].

Chapter 5

Gravedad en tres dimensiones: Análisis de Dirac y simetrías de norma

¿Porque estudiar gravedad en tres dimensiones?. Cuando uno comienza a estudiar mecánica cuántica, en la práctica se hacen uso de modelos de juguete; estos ejemplos no solo proveen de útiles modelos para explicar la construcción canónica del espacio de estados cuánticos del sistema, si no que juegan un papel importante en el desarrollo del entendimiento de la mecánica cuántica misma.

Respecto a la Relatividad General, el equivalente a un átomo de hidrógeno para una teoría cuántica de la gravedad estaría dado por un agujero negro. Explicar la radiación de Hawking, fenómeno que podría consisderarse como una de las observaciones clave, posiblemente sería uno de los mayores pasos hacia una teoría cuántica de la gravedad; de la misma forma en que la estabilidad y la discretización de los estados de energía en el átomo fueron la piedra angular para el desarrollo de la mecánica cuántica.

Actualmente, contamos con algunos modelos semiclásicos o perturbativos que describen la radiación de Hawking como un efecto cuántico que ocurre en el horizonte de sucesos, en un espacio-tiempo específico. Con relación a la mecánica cuántica, estos modelos son análogos al modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno, ya que proporcionan una idea intuitiva en el entendimiento de algunas propiedades físicas del sistema, no obstante, estos ejemplos no están basados en una teoría que podría considerarse fundamental [67].

Sin embargo, este capítulo no es acerca del átomo de hidrógeno, si no acerca del oscilador armónico. Al igual que el oscilador armónico en la mecánica cuántica, gravedad en tres dimensiones es un muy buen modelo para estudiar algunas de las principales características de gravedad cuántica. Esto se debe, a que la teoría comparte muchas de las propiedades típicas de gravedad, las cuales no están presentes en otras teorías de campo, como por ejemplo en la electrodinámica cuántica. Algunas de estas propiedades son por ejemplo, el hecho de que no existe una estructura de fondo como el espacio de Minkowski, lo cual conduce a que no se hallen partículas ni otras configuraciones de campos que sean útiles como punto de partida para una teoría de perturbación. Más aún, si uno introduce artificialmente un fondo y describe gravedad como una perturbación alrededor de una métrica fija, la teoría cuántica resultante no es renormalizable. Mientras que estas propiedades pueden ser relegadas a meras dificultades técnicas, existe una razón más profunda concerniente a la fijación de la norma. Los métodos covariantes aplicados a las teorías de norma requieren que la teoría mantenga una simetría de Poincaré de manera explícita, no obstante, en Relatividad General no existe una simetría de Poincaré global [11].

Por otro lado, Relatividad General en tres dimensiones poseé un conjunto completo de soluciones tanto a nivel clásico como cuántico, logrando de esta manera, enfrentar algunos de los principales problemas conceptuales que surgen en cuatro dimensiones.

A continuación desarrollaremos un análisis de Dirac estricto para la teoría de gravedad en tres dimensiones con constante cosmológica. Esta teoría, al igual que Relatividad General en cuatro dimensiones, se caracteriza por tener como grupo de norma a los difeomorfismos, sin embargo, carece de grados de libertad locales, es decir la teoría es topológica. Este capítulo está basado en [87], donde se lleva a cabo un análisis del álgebra de restricciones tanto a nivel continuo como discreto.

5.1 El formalismo de triadas y tétradas

Una tétrada (o triada en el caso de tres dimensiones) es un objeto que provee, de manera alternativa, una forma de especificar geometrías de manera equivalente a la métrica. Igualmente, el transporte paralelo, las derivadas covariantes y los tensores de curvatura pueden ser formulados mediante una generalización de los símbolos de Christoffel, algunas veces de manera más conveniente, gracias a la notación de las tétradas en términos de uno formas diferenciables.

Definimos una *tétrada* en el espacio-tiempo como un conjunto de cuatro campos vectoriales e^a_I, donde $I = 0, 1, 2, 3$, tal que provee en cada punto del espacio tangente una base ortonormal

$$g_{ab}e^a_I e^b_J = \eta_{IJ}, \tag{5.1}$$

siendo η_{IJ} la métrica de Minkowski. Podemos pensar al índice I, simplemente como un índice que distingue campos vectoriales, sin embargo, podemos darle otra interpretación mas útil si vemos a e^a_I como un doble campo vectorial: un campo vectorial en el espacio tangente al espacio-tiempo que toma valores en el espacio de Minkowski. A este tipo de variedades con copias de espacios vectoriales adheridas a cada punto se le conocen como haces vectoriales (para una definición mas precisa, vease el Apéndice

A). Los haces vectoriales son comunmente usados en la física de partículas elementales, donde el espacio interno corresponde a diferentes representaciones de los grupos de norma de las interacciones fundamentales.

Usando la métrica de Minkowski, podemos contraer los índices internos de la tétrada

$$\eta^{IJ} e^a_I e_{bJ} = \delta^a_b, \tag{5.2}$$

donde $e_{bJ} := g_{bc} e^c_J$. Estas relaciones de ortogonalidad las hemos obtenido usando la métrica del espacio-tiempo; sin embargo, es posible usar también la métrica interna del espacio de Minkowski, es decir

$$e^I_a = \eta^{IJ} e^b_J g_{ab}. \tag{5.3}$$

Estas relaciones muestran de hecho que e^I_a es el inverso de e^a_I, de la misma forma que g^{ab} es el inverso de g_{ab}. A e^I_a se le llama comunmente *co-tétrada*. En términos de espacios vectoriales, sea T_pM el espacio tangente a una variedad M, y sea M_p el espacio interno de Minkowski en cada punto p. La tétrada proporciona una isometría $e^a_I(p) : M_p \to T_pM$, con $v^I \mapsto e^a_I(p) v^I$ con mapeo inverso $e^I_a(p) : T_pM \to M_p$. Sin cambiar la geometría, podemos reemplazar todos los índices del espacio tangente por índices internos y viceversa, mediante la contracción con las tétradas y las co-tétradas: para un campo tensorial $T^{a_1 \ldots a_n}{}_{b_1 \ldots b_n}$, definimos $T^{I_1 \ldots I_m}{}_{J_1 \ldots J_m} = e^{I_1}_{a_1} \cdots e^{I_n}_{a_n} e^{b_1}_{J_1} \cdots e^{b_m}_{J_m} T^{a_1 \ldots a_n}{}_{b_1 \ldots b_n}$.

La ecuación (5.3), proporciona a la tétrada de una interpretación adicional: ésta contiene toda la información encontrada en la métrica, ya que ésta última puede ser totalmente reconstruida mediante la tétrada. Por lo tanto, la tétrada puede ser tomada como el ingrediente fundamental para describir la geometría, teniendo a la métrica como un concepto derivado. No obstante, la tétrada tiene un número mayor de componentes independientes; esta diferencia se esclarece debido a que podemos aplicar una transformación de Lorentz, $e^a_I \to \Lambda_I{}^J e^a_J$, sin cambiar la métrica g^{ab} [1].Es decir, las transformaciones de Lorentz dotan a la tétrada de nuevos grados de libertad, a los cuales llamaremos grados de libertad internos para distinguirlos de aquellos que surgen de la geometría del espacio-tiempo.

Sobre el haz vectorial podemos definir una conexión ω^{IJ}_μ, es decir, una 1-forma con valores en un álgebra de Lorentz, la cual nos sirve para determinar derivadas sobre las fibras

$$D_\mu v^I = \partial_\mu v^I + \omega^I_{\mu J} v^J. \tag{5.4}$$

[1] Usando la definición de una tranformación de Lorentz:

$$\eta^{IJ} \Lambda_I{}^J \Lambda_J{}^L e^a_K e^b_L = (\Lambda^T \eta \Lambda)^{KL} e^a_K e^b_L = \eta^{KL} e^a_K e^b_L = g^{ab}.$$

Al igual que la conexión de Levi-Civita (o de Christoffel) $\Gamma(g)$, que es compatible con la métrica, i.e. $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$, requerimos que la conexión $\omega^I_{\mu J}$, sea compatible con la tétrada, i.e. $D_\mu e^I_\nu = 0$. A esta conexión se le conoce como la conexión de espín, y tiene como propiedad que

$$\omega^I_{\mu J} = e^I_\nu \nabla_\mu e^\nu_J. \tag{5.5}$$

Dada una conexión podemos definir su curvatura mediante

$$R^{IJ} = d\omega^{IJ} + \omega^I{}_K \wedge \omega^{KJ}, \tag{5.6}$$

si ahora hacemos uso la conexión de espín en términos de las tétradas (5.5), podemos expresar a la curvatura como

$$R^{IJ}_{\mu\nu}(\omega(e)) = e^{I\rho} e^{J\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}(e), \tag{5.7}$$

donde $R_{\mu\nu\rho\sigma}(e)$ corresponde al tensor de Riemann construido mediante las tétradas [67]. Esta relación también conocida como la segunda ecuación estructural de Cartan, nos permite ver que Relatividad General es una teoría de norma cuyo grupo local interno corresponde al grupo de Lorentz, siendo el tensor de Riemann el análogo al tensor electromagnético de la conexión de espín.

5.2 Análisis de Dirac

En esta sección llevaremos a cabo el anális de Dirac estricto de la formulación a primer orden de gravedad en tres dimensiones con constante cosmológica. La acción para la teoría [50, 88, 11], está dada por

$$S\left[e, A\right] = \int_{\mathcal{M}} e_I \wedge F^I + \frac{\Lambda}{3} \epsilon_{IJK} e^I \wedge e^J \wedge e^K, \tag{5.8}$$

donde $F^I\left[A\right] = dA^I + \epsilon^I{}_{JK} A^J \wedge A^K$, es la curvatura asociada a la 1-forma de conexión $A^I = A^I_\alpha dx^\alpha$, evaluada en el álgebra de Lie $su(2)$, la cual define una derivada covariante actuando en el grupo interno. Por otro lado, $e^I = e^I_\mu dx^\mu$ es una 1-forma evaluada en $su(2)$, la cual tiene propiedades de una tríada, y Λ corresponde a la constante cosmológica. $\mathcal{M}$, es una variedad de dimension tres tal que $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$, siendo Σ una superficie de Cauchy (la cual puede tomarse como compacta y sin frontera) y $\mathbb{R}$ representa un parámetro de evolución. En el análisis subsecuente, las letras mayúsculas denotarán las componentes en el espacio interno, entretanto las letras griegas índices de espacio-tiempo, las cuales toman valores $0, 1, 2$. El grupo interno posee una métrica invariante bajo $su(2)$, denotada por δ_{IJ}, al igual que un elemento de volumen dado por el tensor de Levi-Civita ϵ_{IJK}.

Las ecuaciones de movimiento que surgen de la variación de la acción están dadas por

$$\begin{aligned} De &= 0, \\ F + \Lambda e \wedge e &= 0, \end{aligned} \tag{5.9}$$

donde podemos observar, que las ecuaciones de Einstein en tres dimensiones, particularmente en el caso en que la constante cosmológica Λ es cero, implican un espacio-tiempo localmente plano, es decir, no es posible encontrar ondas gravitacionales ni fuerzas asociadas a las propiedades geométricas de la variedad. El espacio-tiempo localmente luce como el espacio de Minkowski, (a menos que nos encontremos en la vecindad de una singularidad) y por lo tanto las observables de carácter local como la curvatura no existen. Las soluciones no triviales a las ecuaciones de movimiento surgen a partir de topologías no triviales, particularmente si el espacio no es simplemente conexo. Un ejemplo de esto, es el transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva cerrada no contraíble; esta acción en general produce un vector rotado, siendo el ángulo de rotación uno de los grados de libertad globales asociados a la teoría en tres dimensiones [11, 89].

Realizando la descomposición $2+1$ de la acción (5.8) tenemos que

$$S\left[e, A\right] = \int_{R\times\Sigma} \eta^{ij}\left[e_{0I}F^{I}_{ij} - 2e_{iI}F^{I}_{0j} + \Lambda\epsilon_{IJK}e^{I}_{0}e^{J}_{i}e^{K}_{j}\right], \tag{5.10}$$

donde $\eta^{ij} = \epsilon^{0ij}$. De esta forma, la densidad lagrangiana viene dada por

$$\mathcal{L} = \eta^{ij}\left[e_{0I}F^{I}_{ij} - 2e_{iI}F^{I}_{0j} + \Lambda\epsilon_{IJK}e^{I}_{0}e^{J}_{i}e^{K}_{j}\right]. \tag{5.11}$$

Para continuar con el algoritmo de Dirac estricto, necesitamos definir los momentos $(p^{\alpha}_{A}, \pi^{\alpha}_{A})$, canónicamente conjugados a las variables dinámicas $(e^{A}_{\alpha}, A^{A}_{\alpha})$

$$p^{\alpha}_{A} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{e}^{A}_{\alpha}}, \qquad \pi^{\alpha}_{A} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{A}^{A}_{\alpha}}. \tag{5.12}$$

El siguiente paso para ver si una teoría es singular, es mediante la matriz Hessiana y cuyas componentes están dadas por

$$\frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A^{A}_{\alpha})\delta(\partial_\mu A^{B}_{\beta})}, \quad \frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu e^{A}_{\alpha})\delta(\partial_\mu A^{B}_{\beta})}, \quad \frac{\delta^2\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu e^{A}_{\alpha})\delta(\partial_\mu e^{B}\beta)}, \tag{5.13}$$

haciendo uso de (5.11), estos elementos son idénticamente igual a cero, por lo tanto el rango de la matriz hessiana es cero. Esto significa que esperamos 18 restricciones primarias, las cuales surgen a nivel Lagrangiano debido a la definición de los momentos

$$\begin{aligned} \phi^{0}_{A} &:= p^{0}_{A} \approx 0, \\ \phi^{a}_{A} &:= p^{a}_{A} \approx 0, \\ \psi^{0}_{A} &:= \pi^{0}_{a} \approx 0, \\ \psi^{a}_{A} &:= \pi^{a}_{A} - 2\eta^{ab}e^{A}_{b} \approx 0. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Por definición y despreciando términos en la frontera, el hamiltoniano canónico del sistema tiene la forma

$$H_{\mathrm{c}} = -\int_{\Sigma} dx^3 \eta^{ij} \left[-e_{0I} F^I_{ij} - \Lambda \epsilon^{IJK} e^I_0 e^J_i e^K_j \right] - A^I_0 D_i \pi^i_0. \tag{5.15}$$

Teniendo en cuenta las restricciones primarias, construimos el hamiltoniano primario

$$H_{\mathrm{P}} = H_{\mathrm{c}} + \int_{\Sigma} dx^3 \left[\lambda^I_0 \phi^0_I + \lambda^I_i \phi^i_I + \rho^I_0 \psi^0_I + \rho^I_i \psi^i_I \right], \tag{5.16}$$

donde λ^I_0, λ^I_i, ρ^I_0 y ρ^I_i corresponden a los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones primarias (5.14). Para esta teoría definimos los paréntesis de Poisson fundamentales como

$$\begin{aligned} \{e^A_\alpha(x^0, x), p^\mu_I(y^0, y)\} &= \delta^\mu_\alpha \delta^A_I \delta^3(x, y), \\ \{A^A_\alpha(x^0, x), \pi^\mu_I(y^0, y)\} &= \delta^\mu_\alpha \delta^A_I \delta^3(x, y). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Para determinar las condiciones de consistencia, definimos como W, a la matriz de 18×18 cuyas entradas vienen dadas por los paréntesis de Poisson entre las restriciones primarias (5.14)

$$\begin{aligned}
\{\phi^0_A(x), \phi^0_I(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^a_A(x), \phi^0_I(y)\} = 0 \\
\{\phi^0_A(x), \phi^i_I(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^a_A(x), \phi^i_I(y)\} = 0, \\
\{\phi^0_A(x), \psi^0_I(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^a_A(x), \psi^0_I(y)\} = 0, \\
\{\phi^0_A(x), \psi^i_I(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^a_A(x), \psi^i_I(y)\} = -2\eta^{ai}\delta_{AI}\delta(x, y), \\
\{\psi^0_A(x), \phi^0_I(y)\} &= 0, \qquad \{\psi^a_A(x), \phi^0_I(y)\} = 0 \\
\{\psi^0_A(x), \phi^i_I(y)\} &= 0, \qquad \{\psi^a_A(x), \phi^i_I(y)\} = -2\eta^{ai}\delta_{AI}\delta(x, y), \\
\{\psi^0_A(x), \psi^0_I(y)\} &= 0, \qquad \{\psi^a_A(x), \psi^0_I(y)\} = 0, \\
\{\psi^0_A(x), \psi^i_I(y)\} &= 0, \qquad \{\psi^a_A(x), \psi^i_I(y)\} = 0,
\end{aligned} \tag{5.18}$$

donde podemos observar que el rango $W = 12$, y por lo tanto W tiene nulidad 6. De esta manera, usando los vectores nulos de W, las condiciones de consistencia dan lugar a 6 restricciones secundarias

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^0_A &= \{\phi^0_A, H_P\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad D^A := \eta^{ab} F^A_{ab} + \Lambda \eta^{ab} \epsilon^A{}_{BC} e^B_a e^B_c \approx 0, \\ \dot{\psi}^0_A &= \{\psi^0_A, H_P\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad G_A := D_a \pi^a_A \approx 0, \end{aligned} \tag{5.19}$$

mientras que el rango de W nos permite fijar el valor de los siguientes multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^a_A &= \{\phi^a_A, H_P\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{aA} = -\Lambda \epsilon_{ABC} e^B_0 e^C_a, \\ \dot{\psi}^a_A &= \{\psi^a_A, H_P\} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^A_a = -D_a e^A_0 + 2\epsilon^A{}_{BC} A^B_a e^C_0 - \frac{1}{2} \epsilon^A{}_{BC} A^B_0 \pi_{aC}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Debido a que la teoría no presenta restricciones terciarias [87], una vez con todas las restricciones a la mano procederemos a separarlas en restricciones de primera y segunda clase. Para esto, siguiendo el algoritmo de Dirac estricto, debemos calcular el paréntesis de Poisson entre todas las restricciones, primarias (5.14) y secundarias (5.19)

$$\begin{aligned}
\{\phi^0_A(x), G_I(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^a_A(x), G_I(y)\} = 0 \\
\{\phi^0_A(x), D^I(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^a_A(x), D^I(y)\} = 2\Lambda\eta^{ai}\delta^I_A, \\
\{\psi^0_A(x), G_I(y)\} &= 0, \qquad \{\psi^a_A(x), G_I(y)\} = \epsilon_{AI}{}^K\pi^a_K(y)\delta(x,y) \\
\{\psi^0_A(x), D^I(y)\} &= 0, \qquad \{\psi^a_A(x), D^I(y)\} = 2\eta^{ai}\left[\delta^I_A\partial_i(y) + \epsilon_A{}^I{}_K A^K_i(y)\right]\delta(x,y), \\
\{D^A(x), D^I(y)\} &= 0, \qquad \{G_A(x), D^I(y)\} = \epsilon_A{}^I{}_C D^C = 0 \\
\{G_A(x), G_I(y)\} &= \epsilon_{AI}{}^C G_C = 0.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

La matriz W' de 24×24, cuyas componentes están dadas por los paréntesis (5.18) y (5.21), tiene rango 18 y nulidad 6. Al contraer los vectores nulos de la matriz W' con las restricciones, podemos identificar las restricciones de primera clase

$$\begin{aligned}
\phi^0_A &:= p^0_A, \\
\psi^0_A &:= \pi^0_A, \\
G_A &:= D_a\pi^a_A + \epsilon_{AB}{}^C e^B_a p^a_C, \\
D^A &:= \eta^{ab}F^A_{ab} - \Lambda\eta^{ab}\epsilon^A{}_{BC}e^B_a e^C_b + \Lambda\epsilon^A_B{}^C e^B_a\pi^a_C + D_a p^{aA},
\end{aligned} \tag{5.22}$$

análogamente, el rango nos permite identificar las restricciones de segunda clase

$$\begin{aligned}
\phi^a_A &:= p^a_A, \\
\psi^a_A &:= \pi^a_A - \eta^{ab}e^A_b.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Una vez separadas las restricciones de primera y segunda clase, podemos llevar a cabo el conteo de grados de libertad de la teoría dada por la acción (5.8): tenemos 18 variables canónicas en el espacio fase, 12 restriciones de primera clase independientes y 12 restricciones de segunda clase. Por lo tanto, gravedad en tres dimensiones con constante cosmológica carece de grados de libertad locales por punto del espacio tiempo, es decir, corresponde a una teoría topológica.

Para continuar con el formalismo de Dirac estricto, es necesario verificar que las nuevas restricciones definidas en (5.22) y (5.23) forman un álgebra cerrada. De esta manera, el álgebra entre las restricciones de primera y segunda clase, definida en el espacio fase completo, viene dada por

$$\begin{aligned}
\{\phi^0_A(x),\phi^0_I(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^a_A(x),\phi^i_I(y)\} = 0,\\
\{\phi^0_A(x),\phi^i_I(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^a_A(x),\psi^0_I(y)\} = 0,\\
\{\phi^0_A(x),\psi^0_I(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^a_A(x),\psi^i_I(y)\} = -2\eta^{ai}\delta_{AI}\delta(x,y),\\
\{\phi^0_A(x),\psi^i_I(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^a_A(x),G_I(y)\} = \epsilon_{AI}{}^{K}\phi^a_K,\\
\{\phi^0_A(x),G_I(y)\} &= 0, \qquad \{\phi^a_A(x),D^I(y)\} = 0,\\
\{\phi^0_A(x),D^I(y)\} &= 0, \qquad \{\psi^a_A(x),\psi^i_I(y)\} = 0,\\
\{\psi^0_A(x),\psi^0_I(y)\} &= 0, \qquad \{\psi^a_A(x),G_I(y)\} = \epsilon_{AI}{}^{K}\psi^a_K,\\
\{\psi^0_A(x),\psi^i_I(y)\} &= 0, \qquad \{\psi^a_A(x),D^I(y)\} = \epsilon_{A}{}^{I}{}_{K}\phi^a_K,\\
\{\psi^0_A(x),G_I(y)\} &= 0, \qquad \{G_A(x),G_I(y)\} = \epsilon_{AI}{}^{C}G_C,\\
\{\psi^0_A(x),D^I(y)\} &= 0, \qquad \{G_A(x),D^I(y)\} = \epsilon_{A}{}^{I}{}_{C}D^C,\\
\{D^A(x),D^I(y)\} &= 0,
\end{aligned} \tag{5.24}$$

de donde podemos apreciar que las restriciones forman un álgebra cerrada. Observamos también, que a diferencia de Relatividad General en cuatro dimeniones y la teoría de Husain-Kuchar, las relaciones (5.24) forman efectivamente un álgebra de Lie, ya que sus constantes de estructura corresponden a funciones constantes. Esta propiedad del álgebra hace que gravedad en tres dimensiones sea completamente resoluble tanto a nivel clásico como a nivel cuántico [88].

5.3 Transformaciones de norma

Una vez que ya se tienen todas las restricciones de primera y segunda clase que presenta la teoría, esta información se usará para encontrar las transformaciones de norma, así como la evolución dinámica del sistema. Haciendo uso del hamiltoniano canónico (5.15), los multiplicadores de Lagrange (5.20) y las restriciones de segunda clase (5.23), obtenemos la acción extendida, la cual viene dada por

$$\begin{aligned}
S_E[e^A_\alpha,p^\alpha_A,A^A_\alpha,\pi^\alpha_A,\lambda^A_0,\lambda^A_\alpha,\rho^A_\alpha,\gamma^A,\xi^A] &= \int[\dot{e}^A_\alpha p^\alpha_A + \dot{A}^A_\alpha\pi^\alpha_A - H' - \lambda^A_\alpha\phi^\alpha_A - \rho^A_\alpha\psi^\alpha_A\\
&- \gamma^A G_A - \xi_A D^A]d^4x,
\end{aligned} \tag{5.25}$$

donde H' está formado por una combinación lineal de resricciones de primera clase

$$H' = -A^A_0 G_A - e_{0A}D^A \tag{5.26}$$

siendo λ^A_α , ρ^A_α , γ^A , ξ_A los multiplicadores de Lagrange asociados a las restriciones de primera (5.22) y segunda clase (5.23). De la expresión dada por la acción extendida (5.25), obtenemos que el hamiltoniano extendido, el cual es el generador de la evolución dinámica del sistema y es una función de primera clase, está dado por

$$H_{\rm E} = H - \lambda_0^A \phi_A^0 - \rho_0^A \psi_A^0 - \gamma^A G_A - \xi_A D^A. \tag{5.27}$$

Debido a que la dinámica de la teoría viene dada por una función que depende exclusivamente de las restriciones de primera clase (5.22), se dice que el sistema es totalmente restringido. Es decir, la evolución es generada por las tansformaciones de norma. Con el propósito de conocer esta simetría de norma, usaremos el formalismo propuesto por Castellani [66].

Definimos el generador de las transformaciones de norma a partir de las restricciones de primera clase, de la siguiente manera

$$G = \int_\Sigma \left[D_0 \varepsilon_0^A \phi_A^0 + D_0 \eta_0^A \psi_I^0 + \varepsilon^A G_A + \eta_A D^A \right] d^3x, \tag{5.28}$$

donde los parámetros ε_0^A, ε^A, ζ_0^A y ζ_A, corresponden a funciones infinitamente diferenciables , con soporte compacto y están definidos en el espacio dual a las distribuciones. De esta manera, las transformaciones de norma de la teoría, aplicadas a todas las variables del espacio fase son

$$\begin{aligned}
\delta_0 e_0^A &= D_0 \varepsilon_0^A, \\
\delta_0 e_a^A &= \epsilon^A{}_{IJ} \varepsilon^I e_a^J - D_a \eta^A, \\
\delta_0 A_0^A &= D_0 \eta_0^A, \\
\delta_0 A_a^A &= -D_a \varepsilon^A + \Lambda \epsilon^{AI}{}_J e_a^J.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

De donde podemos observar, que las transformaciones de norma generadas por la subálgebra formada por las restricciones de Gauss G_A y por F_A, corresponden a las transformaciones generadas por el álgebra de Poincare $ISO(2,1)$ [88]. Sin embargo, a nivel Lagrangiano la acción (5.8) es invariante bajo difeomorfismos [11]. El formalismo de Dirac estricto nos permite recuperar esta simetría a nivel hamiltoniano, mediante la redefinición de los parámetros de norma: $-\varepsilon_0^I = \varepsilon^I = -v^\alpha A_\alpha^I$, $-\eta_0^I = \eta^I = -v^\alpha e_\alpha^I$. Tomando en consideración lo anterior, las transformaciones de norma toman la forma

$$\begin{aligned}
e'^A_\alpha &\longrightarrow e_\alpha^A + \mathcal{L}_v e_\alpha^A + (v \times De)_\alpha^A \,, \\
A'^A_\alpha &\longrightarrow A_\alpha^A + \mathcal{L}_v A_\alpha^A + [v \cdot (F + \Lambda e \wedge e)]_\alpha^A \,,
\end{aligned} \tag{5.30}$$

donde los productos punto y cruz, son los usuales y actúan en los índices de espacio-tiempo. Los términos que acompañan a los difeomorfismos, corresponden a las ecuaciones de movimiento de la teoría (5.9). Debemos señalar, que las transformaciones (5.30) son válidas siempre y cuando se cumplan las ecuaciones de movimiento (*on-shell*), a diferencia de las teorías de norma usuales (Maxwell, Yang-Mills) donde el término que acompaña a la transformacion de norma siempre es cero. Esta discrepancia con las teorías de norma, de hecho es esperada; en las teorías de campo usuales, las ecuaciones de movimiento son exactamente invariantes bajo transformaciones de norma, mientras que las ecuaciones de Einstein, transforman módulo una combinación de las mismas ecuaciones de movimiento [90]. Por lo tanto resulta natural esperar una transformación de norma que proporcione una invariancia *on-shell*.

Chapter 6

Conclusiones

En estas notas hemos aplicado de manera consistente el algoritmo de Dirac-Bergmann a diversas teorías de norma, poniendo particular énfasis al caso de teorías invariantes bajo difeomorfismos. Una formulación hamiltoniana completa significa llevar a cabo todos los pasos en el algoritmo de Dirac: (i) se definen los momentos canónicos para todas las variables dando lugar a las restricciones primarias, (ii) se halla el hamiltoniano, (iii) se considera la evolución temporal de las restricciones hasta que (iv) el álgebra de Dirac forme un álgebra cerrada (al menos on-shell), (v) las restricciones son clasificadas como restricciones de primera y segunda clase, (vi) se construye el paréntesis de Dirac o se resuleven las restricciones de segunda clase (via reducción hamiltoniana), (vii) de acuerdo con la conjetura de Dirac, se construye el generador de las transformaciones de norma mediante las restricciones de primera clase, (viii) se derivan las transformaciones de norma para todos los campos de manera consistente. El formalismo de Dirac-Bergmann no solo nos permite estudiar la dinámica y las simetrías de una teoría, las cuales pudieran pasar inadvertidas usando otros formalismos, si no que al mismo tiempo nos restringe de encontrar propiedades atribuídas a una teoría, las cuales pudieran no existir. En particular, nos referimos a la invariancia de norma, la cual debe ser derivable de las restricciones de la teoría sin ambigüedades.

Appendix A

Elementos de geometría diferencial

A.1 La derivada de Lie

Dado un campo vectorial v en una variedad M, es posible derivar campos tensoriales a lo largo de la direccón de v. A diferencia de la derivada covariante, la definición de la derivada de Lie no requiere ninguna estructura extra, tal como una conexión o una métrica. Para un escalar f, la derivada de Lie es equivalente a la acción de un campo vectorial como una derivación: $\mathcal{L}_v f = vf = v^a \partial_a f$. Una vez que hayamos definido la derivada de Lie para un campo vectorial, en la dirección de otro campo vectorial, la definición puede ser extendida a cualquier campo tensorial usando la regla de Leibniz.

El conmutador de dos campos vectoriales, $\mathcal{L}_v w = [v, w]$ con $[v, w]^a = v^b \partial_b w^a - w^b \partial_b v^a$, satisface los requerimientos para ser una derivación, y por lo tanto puede ser usado como una definición adecuada de la derivada de Lie: $\mathcal{L}(fw^a) = f\mathcal{L}_v w^a + (vf) w^a$, para una función f. Para obtener la derivada de Lie de 1-formas, digamos ω_a, usamos la regla de Leibniz y la naturaleza escalar de $\omega_a w^a$, siendo w^a, un campo vectorial arbitrario. De esta manera

$$(\mathcal{L}_v \omega_a) w^a + \omega_a [v, w]^a = (\mathcal{L}_v \omega_a) w^a + \omega_a v^b \partial_b w^a - \omega_a w^b \partial_b v^a,$$

por otro lado

$$\mathcal{L}_v (\omega_a w^a) = v^a \partial_a \left(\omega_b w^b\right) = v^a (\partial_a \omega_b) w^b + \omega_b v^a \partial_a w^b,$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}_v \omega_a = v^b \partial_b \omega_a + \omega_b \partial_a v^b, \tag{A.1}$$

ya que w^a es un campo vectorial arbitrario. Sin embargo, el concepto de derivada de Lie surge de una manera mas general cuando es aplicado a campos tensoriales. Sea v^a un campo vectorial, a lo largo del cual la derivada será definida, y consideremos una familia uniparamétrica de difeomorfismos $\Phi_t^{(v)} : M \to M$, la cual es definida mediante integración. Este mapeo satisface $\Phi_t^{(v)} \circ \Phi_s^{(v)} = \Phi_{t+s}^{(v)}$, asimismo $\Phi_0^{(v)}$ es la identidad y $d\Phi_t^{(v)}/dt\,|_p$, en cada punto $p \in M$, es igual al campo vectorial v evaluado en el punto p, es decir, $v\,(p)$. Donde la derivada se interpreta como la acción del campo vectorial sobre alguna función f

$$\frac{d\Phi_t^{(v)}}{dt}|_p f = \frac{df\left(\Phi_t^{(v)}\,(p)\right)}{dt}|_{t=0}. \tag{A.2}$$

La familia uniparamétrica de difeomorfismos puede hallarse integrando un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, usando un sistema coordenado. El mapeo Φ_t define una *imagen recíproca* (o *pull-back*) sobre funciones y tensores covariantes, mientras que define un *jacobiano* (o *push-forward*) en tensores cotravariantes [38]. La imagen recíproca sobre funciones se define simplemente por $\Phi_t^* f\,(p) = f\,(\Phi_t\,(p))$. Sobre campos vectoriales w, el jacobiano $\Phi_{t*}w$, se define como la acción de los difeomorfismos sobre las curvas integrales generadas por el campo vectorial w, y después obtener el campo vectorial generado por las curvas integrales nuevas. La imagen recíproca de un vector contravariante ω_a, se definde como $(\Phi_t^*\omega_a)\,w^a = \omega_a\,(\Phi_{t*}w^a)$, para cualquier vector w^a. [1]

Usando el jacobiano con Φ_t, o la imagen recíproca con $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$, la familia uniparamétrica de difeomorfismos puede usarse para definir, de manera general, la derivada de Lie a lo largo de un campo vectorial v, cuyas curvas integrales esten dadas por Φ_t. Sea T un tensor arbitrario, Φ_t define un mapeo, el cual será denotado por $\Phi_t T$, tal que

$$\mathcal{L}_v T = \frac{d\Phi_t^{(v)} T}{dt}, \tag{A.3}$$

proporciona las identidades de la derivada de Lie para escalares y campos vectoriales, las cuales fueron mencionadas anteriormente.

A.2 Tensores con densidad

Para una métrical espacial h_{ab}, su determinante es una función pero no un escalar, esto se debe a que su valor cambia bajo una transformación de coordenadas. Sin embargo, la combinación $\sqrt{\det h}\,d^3x$ es un tensor, mientras que $\sqrt{\det h}$ no lo es. De esta manera, podemos introducir un nuevo tipo de objetos covariantes, llamados *tensores con densidad*, los cuales pueden ser entendidos como tensores multiplicados por alguna potencia del determinante de la métrica. Esta definición es independiente

[1] La diferencia entre la imagen recíproca y el jacobiano, es mas clara si uno considera mapeos mas generales de una variedad M a una variedad N. De esta manera, el jacobiano de un tensor contravariante en M, es un tensor del mismo tipo en N, mientras que la imagen recíproca de un tensor en N es un tensor del mismo tipo en M. A menos que el mapeo considerado de M a N sea invertible, no es posible mapear un tensor covariante de M a N, ni uno contravariante de N a M.

de la dimensión y de la signatura de alguna variedad Riemanniana, es decir, pueden ser objetos definidos en el espacio o en el espacio-tiempo, o incluso en una variedad de dimensión arbitraria con cualquier signatura.

Un tensor con densidad $\pi^{a_1,\ldots,a_k}{}_{b_1,\ldots,b_l}$, de peso $n \in \mathbb{R}$, es un objeto definido en una variedad diferenciable, cuya transformación bajo un cambio de coordenadas $x^a \mapsto x'^{a'}$, está dada por

$$\pi'^{a'_1\ldots a'_k}{}_{b'_1\ldots b'_l} = |\det\left(\frac{\partial x^c}{\partial x'^{c'}}\right)|^n \pi^{a_1\ldots a_k}{}_{b_1\ldots b_l} \frac{\partial x'^{a'_1}}{\partial x^{a_1}} \cdots \frac{\partial x'^{a'_k}}{\partial x^{a_k}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial x'^{b'_1}} \cdots \frac{\partial x^{b_l}}{\partial x'^{b'_l}}. \tag{A.4}$$

En particular, un tensor con densidad de peso cero es un tensor, y $\sqrt{|\det g|}$ es un escalar con densidad de peso uno. Podemos observar, que el peso de un densidad es una propiedad aditiva bajo la multiplicación tensorial. Cualquier tensor con densidad de peso n, puede ser transformado a un tensor, simplemente multiplicandolo por $|\det g|^{-n/2}$. Un ejemplo de un tensor con densidad, son los objetos $\epsilon^{a_1\cdots a_D}$, definidos de tal forma que son antisimétricos en todos los índices y $\epsilon^{1\ldots D} = 1$, en cualquier sistema de coordenadas. Uno puede observar que $\epsilon^{a_1\cdots a_D}$, es una densidad tensorial de peso 1, mientras que $\epsilon_{a_1\ldots a_D}$, es una densidad tensorial de peso -1. En particular, $\epsilon_{a_1\ldots a_D}$ no puede obtenerse bajando lo índices de $\epsilon^{a_1\cdots a_D}$, ya que esta operación no cambia el peso de los tensores.

Los tensores con densidad $\epsilon^{a_1\cdots a_D}$ y $\epsilon_{a_1\ldots a_D}$, toman los mismos valores constantes en cualquier sistema de coordenadas, de esta manera, es rasonable que sus derivadas covariantes sean cero $\nabla_a \epsilon_{a_1\ldots a_D} = 0 = \nabla_a \epsilon^{a_1\cdots a_D}$, esto implica que $\nabla_a \det g = 0$, ya que el tensor métrico es covariantemente constante.

Sea $\pi^{a_1,\ldots,a_k}{}_{b_1,\ldots,b_l}$, una densidad tensorial de peso n, $|\det g|^{-n/2}\pi^{a_1,\ldots,a_k}{}_{b_1,\ldots,b_l}$ es un tensor con densidad de peso cero, es decir un tensor, por lo tanto su derivada covariante está dada por

$$\begin{aligned}
\nabla_a \pi^{a_1,\ldots,a_k}{}_{b_1,\ldots,b_l} &= |\det g|^{n/2} \nabla_a \left(|\det g|^{-n/2} \pi^{a_1,\ldots,a_k}{}_{b_1,\ldots,b_l}\right) \\
&= \partial_a \pi^{a_1,\ldots,a_k}{}_{b_1,\ldots,b_l} + \Gamma^{a_1}_{ac} \pi^{ca_2,\ldots,a_k}{}_{b_1,\ldots,b_l} + \ldots + \Gamma^{a_k}_{ac} \pi^{a_1,\ldots,a_{k-1}c}{}_{b_1,\ldots,b_l} \\
&\quad -\Gamma^c_{ab_1} \pi^{a_1,\ldots,a_k}{}_{cb_2,\ldots,b_l} - \ldots - \Gamma^c_{ab_l} \pi^{a_1,\ldots,a_k}{}_{b_1,\ldots,b_{l-1}c} - n\Gamma^b_{ba} \pi^{a_1,\ldots,a_k}{}_{b_1,\ldots,b_l},
\end{aligned}$$

donde el último término surge de la derivada parcial $\partial_a \log\det g = 2\Gamma^b_{ba}$. Las derivadas de Lie de $\epsilon^{a_1\cdots a_D}$ y de $\epsilon_{a_1\ldots a_D}$ son cero, no obstante, la derivada de Lie de la métrica en general no es cero, de tal manera que

$$\mathcal{L}_v \det g = 2\det g \nabla_a v^a, \tag{A.5}$$

por lo tanto, la derivada de Lie de un tensor con densidad de peso n, $\pi^{a_1,\ldots,a_k}{}_{b_1,\ldots,b_l}$, es

$$\mathcal{L}_v \pi^{a_1,\ldots,a_k}{}_{b_1,\ldots,b_l} = |\det g|^{n/2} \mathcal{L}_v \left(|\det g|^{-n/2} \pi^{a_1,\ldots,a_k}{}_{b_1,\ldots,b_l}\right) + n\pi^{a_1,\ldots,a_k}{}_{b_1,\ldots,b_l} \nabla_a v^a, \tag{A.6}$$

donde en el lado derecho, la derivada de Lie actúa sobre un tensor sin peso.

Las densidades tensoriales surgen de manera natural en formlaciones canónicas de teorías de campo, donde la métrica del espacio-tiempo es considerada como uno de los campos físicos. En los términos de la forma $\int d^3x\dot{\varphi}p_\varphi$, que aparecen en la transformada de Legendre, uno no puede insertar la raiz cuadrada del determinante de la métrica como un factor en la medida, ya que φ y p_φ no serían variables canónicas. Los tensores con densidades, que surgen como momentos canónicos, tienen influencia en la aparición de la restricción que da origen a los difeomorfismos, ya que genera derivadas de Lie, cuyas expresiones dependen de su peso. Es decir, las variables canónicas transforman de una manera diferente ya que una de ellas siempre es un tensor con densidad.

A.3 Haces fibrados

En algunas formulaciones de Relatividad General a primer orden, el campo fundamental no es el tensor métrico, sino las conexiones y las tétradas (en el espacio-tiempo) o triadas (en el espacio). Tales formulaciones están relacionadas con aspectos geométricos que no necesariamente surgen de una formulación métrica.

Muchas teorías de campo son descritas por objetos dependientes del espacio-tiempo, los cuales toman valores en un espacio vectorial V. La estructura matemática detrás de esta noción es la de un *haz vectorial*, el cual puede ser entendido como una variedad base M (tal como el espacio-tiempo), con copias de un espacio vectorial V, adherido a cada punto $x \in M$. De esta manera, surge una generalización del espacio tangente con un espacio interno V_x, llamadas fibras del haz vectorial, las cuales no están asociadas a ninguna dirección en el espacio base. Tal y como sucede en el haz tangente, un haz vectorial normalmente no es trivial, i.e., no es de la forma $v \times M$. Un campo físico es entonces una sección del haz vectorial, el cual asigna a cada punto $x \in M$ un vector $v^A \in V_x$. Ejemplos de este tipo de teorías son las teorías de norma, cuyas fibras son representaciones de los grupos de norma, y gravedad, la cual puede ser formulada con campos tensoriales en un espacio tangente o con n-adas en un espacio vectorial interno.

Un *haz fibrado* (B, M, π) sobre M con fibra F, es una variedad diferenciable B, con un mapeo sobreyectivo $\pi : B \to M$, con una pre-imagen $\pi^{-1}(x) \simeq F$ para todo $x \in M$. Tal que la fibra es localmente trivial: para una cubierta abierta $M = \bigcup_\lambda U_\lambda$ de la variedad base M, $\pi^{-1}(U_\lambda) \simeq U_\lambda \times F$, para todo λ. Existe entonces una familia de difeomorfismos f_λ tal que cada $p \in \pi^{-1}(U_\lambda)$ puede ser identificado con $(\pi(p), f_\lambda(p))$. Si restringimos este mapeo a $\pi^{-1}(x)$, tenemos una identificación $f_\lambda|_x : \pi^{-1}(x) \to F$, de todas las fibras con la fibra general F. Sin embargo, esta identificación depende de la vecindad usada, entonces diferentes vecindades superpuestas pueden dar lugar a diferentes identificaciones [103, 104].

Teniendo en cuenta esto, consideremos funciones de transición $g_{\lambda\mu}(x) := f_\lambda|_x \circ (f_\mu|_x)^{-1} : F \to F$, definida para toda $x \in U_\lambda \cap U_\mu$. Estos mapeos muestran como la identificación de puntos en una fibra cambia cuando usamos una trivialización local distinta. Las funciones de transición son invertibles, con $g_{\lambda\mu}^{-1} = g_{\mu\lambda}$, y cuya composición esta dada por $g_{\lambda\mu} \circ g_{\mu\nu} = g_{\lambda\nu}$. En la mayoría de los casos, uno está interesado en *G-haces*, es decir, haces fibrados cuyas funciones de transición toman valores en la representación de algún grupo, el cual actúe sobre las fibras F.

Un *haz principal* (P, G, M, π) es un G-haz (P, M, g) con fibras $F = G$, donde G actúa sobre si mismo mediante la traslación por la izquierda $L_g : G \to G$, $h \mapsto g \cdot h$. Una importante propiedad de los haces principales es que tiene, de manera natural, una acción por la derecha del grupo G sobre P, definida por $R_g p = f_\lambda|_{\pi(p)}^{-1}(f)$. En esta definición, las vecindades proveen de una trivialización local, pero la acción por la derecha de G es independeinte de la elección. De hecho

$$f_\lambda|_{\pi(p)} \cdot g = \left(g_{\lambda\mu}(\pi(p)) f_\mu|_{\pi(p)}\right) \cdot g = f_\lambda|_{\pi(p)} \circ_\mu |_{\pi(p)}^{-1} \left(f_\mu|_{\pi(p)} \cdot g\right).$$

lo cual prueba que R_g es independiente de la trivialización. La acción derecha permite identificar campos vectoriales verticales invariantes por la izquierda, es decir, campos vectoriales $v^a \in P$ tales que $\pi_* v^a = 0$, con el álgebra de Lie del grupo estructural. Para cada $X \in \mathcal{L}G$, donde $\mathcal{L}G$ denota el álgebra de Lie del grupo G, existe un campo vectorial vertical $\tilde{X}$ en P para el cual $\tilde{X}|_p = dR_{\exp(tX)} p/dt$. Físicamente, la acción derecha del grupo de estructura sobre una haz fibrado codifica las transformaciones de norma, donde los campos de norma están dados por las conexiones.

A.4 Conexiones

Para definir derivadas en un haz vectorial, es necesario comparar vectores en diferentes puntos. En el espacio tangente, esto se logra introduciendo una *1-forma de conexión* Γ^B_{aC}, es decir, un objeto el cual $t^a \Gamma^B_{aC}$ al ser evaluado en un punto x, da un mapeo lineal $v^B \mapsto t^a \Gamma^B_{aC} v^C$ en un espacio vectorial V_x, para cada vector t^a tangente a M. Para una curva en M, nos permite definir

$$\delta v^B = -t^a \Gamma^B_{aC} v^C \delta t, \tag{A.7}$$

como un desplazamiento infinitesimal del vector v^C en el punto x, a lo largo de la curva cuyo vector tangente es t^a en x. Si el espacio vectorial V_x es una representación de algún grupo de Lie, los valores $v^a \Gamma^B_{aC}$, están restringidos al álgebra de Lie del grupo. En este caso, los componentes de la conexión se escriben como Γ^i_a, donde

$\Gamma^B_{aC} = \Gamma^a_a (T_i)^B_C$, siendo T_i los generadores del álgebra de Lie. En la teoría de las interacciones débiles, el grupo de estructura es $SU(2)$, cuyos generadores son las matrices de Pauli; las componentes de la conexión corresponden a los campos de norma Γ^i_a con $i = 1, 2, 3$, los cuales están dados por los bosones vectoriales Z y $\mathrm{W}^{\pm}$.

Integrando los desplazamientos infinitesimales (A.7), a lo largo de la curva obtenemos una expresión en el grupo de Lie, la cual corresponde al transporte paralelo u holonomía de un espacio vectorial a otro. Usando la 1-forma de conexión en término de los generadores, la integración de la ecuación de transporte infinitesimal está dada por

$$h_e(\Gamma) = \mathcal{P} \exp \left(\int_e t^a \Gamma^i_a T_i d\lambda \right), \tag{A.8}$$

donde $e(\lambda)$ es la curva con vector tangente t^a. Esta expresión representa una solución a la ecuación de transporte paralelo

$$\frac{dh_e(\Gamma)}{d\lambda} = \Gamma^i_a t^a T_i h_e(\Gamma). \tag{A.9}$$

Debido a que los campos vectoriales en una teoría de norma son secciones de una haz fibrado, en lugar de trabajar con secciones, es posible introducir una conexión como derivada covariante en el haz completo P. La conexión está definida a través de una 1-forma θ en P, la cual toma valores en el álgebra de Lie del grupo de estructura, tal que $R^*_g\theta = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\theta$, para todo $g \in G$ y $\theta(\tilde{X}) = X$, para todo $X \in \mathcal{L}G$. Estas propiedades demuestran que una conexión generalizan la noción de la forma de Maurer-Cartan de un grupo de Lie G a un haz principal con grupo de estructura G [38, 103, 104].

Con la conexión θ, podemos definir uns espacio horizontal $H \subset TP$, como el espacio nulo de $\theta : \theta(H) = 0$. El espacio nulo no puede tener una componente vertical debido a la transitividad de la acción por la derecha de G en P. Con la noción de la horizontabilidad, podemos levantar vectores tangentes $v \in TM$, a vectores horizontales $\tilde{v} \in TP$, tales que $\theta(\tilde{v}) = 0$ y $\pi_*\tilde{v} = v$. De esta manera el transporte paralelo se define como el mapeo de $\pi^{-1}(e(0))$ a $\pi^{-1}(e(1))$ mediante el levantamiento de la curva e para todos los puntos de la fibra.

A.5 n-adas (*n-beins*)

Sobre un haz vectorial existen dos clases de vectores y de campos tensoriales, aquellos que toman valores en la fibra, por ejemplo un grupo de norma, y los que toman valores en el espacio tangente de la variedad base. Para relacionar estas dos clases de objetos es necesario introducir una estructura adicional, la cual comunmente, se hace en el contexto de las fibras equipadas con una métrica η_{AB}.

Una *n-ada* (o *n-bein*) e^a_A, $A = 1, \ldots, n$, en una variedad Riemanniana de dimensión n (en cuatro dimensiones corresponde a una *tétrada*, en tres dimensiones a una *triada*, en dos dimensiones a una *diada*), es una base ortonormal de campos vectoriales, tales que $e^a_A e_{Ba} = \eta_{AB}$. Donde el índice A enumera los campos vectoriales independientes en la base ortonormal de TM. De la misma manera, el objeto e^a_A es una sección del haz fibrado, el cual es el producto tensorial del haz tangente y otro haz vectorial sobre M. El símbolo η_{AB}, en la condición de normalización de las n-adas, corresponde a la métrica de la fibras.

Podemos contraer las tétradas usando los índices internos, $\eta^{AB} e^a_B e_{Bb} = \delta^a_b$, de esta manera

$$\eta^{AB} e^a_A e_{Bb} e^b_C = \eta^{AB} e^a_A \eta_{BC} = e^a_C = \delta^a_B e^b_C,$$

puesto que e^b_C, es una matriz invertible ya que es parte de una base ortonormal. La matriz inversa de e^a_A, difiere solo por la posición de los índices y está dada por $e^A_a = \eta^{AB} e^b_B g_{ab}$. Por lo tanto, usando las n-adas es posible reemplazar la métrica del espacio-tiempo, convirtiendola en un concepto derivado.

De este modo, estamos tratando con un haz vectorial sobre el espacio-tiempo M, equipado con dos espacios vectoriales normados adheridos a cada punto $x \in M$. Tenemos el espacio tangente T_xM con la métrica g_{ab}, pero también copias V_x del espacio vectorial interno con una métrica constante η_{AB}. (Desde el punto de vista de las transformaciones en el espacio-tiempo, esta métrica es un escalar) Una n-ada proporciona un conjunto de isometrías entre los espacios T_xM y V_xM, donde $e^a_A(x) : V_x \to T_xM$, $v^A \mapsto e^a_A v^A$, y de la misma manera, el mapeo inverso está dado por $e^A_a(x) : T_xM \to V_x$. Desde un punto de vista práctico, las n-adas son usadas para reemplazar los índices de espacio-tiempo por índices internos y viceversa .

Al igual que la métrica define una conexión compatible en el haz tangente, llamada conexión de Christoffel, una n-ada también define una conexión compatible [67, 105]. Las 1-formas de conexión pueden ser calculadas mediante $\omega_{aAB} = e^b_A \nabla_a e_{Bb}$, donde ∇_a es el operador de derivación compatible con la métrica definida por la tétrada. Usando las 1-formas de conexión ω_{aAB}, podemos definir una derivada covariante y un transporte paralelo para campos tensoriales con índices internos, $\mathcal{D}_a v^A = \nabla_a v^A + \omega_{a\ B}^{\ A} v^B$. Si aplicamos la derivada covariante a la métrica interna η_{AB}, la cual es constante, tenemos que

$$\mathcal{D}_a \eta_{AB} = \nabla_a \eta_{AB} - \omega_{a\ A}^{\ C} \eta_{CB} - \omega_{a\ B}^{\ C} \eta_{AC} = -\omega_{aBA} - \omega_{aAB} = 0. \tag{A.10}$$

Por lo tanto, la 1-forma de conexión debe ser antisimétrica en los índices internos, lo cual está de acuerdo con el hecho que $t^a \omega_{a\ B}^{\ A}$, en la teoría general de conexiones, debe tomar valores en el álgebra de Lie del grupo que preserva η_{AB} (por ejemplo, el grupo de Lorentz, si el espacio interno corresponde al espacio de Minkowski). En términos de la base del álgebra de Lie, T_i, definimos los coeficientes de la conexión de espín ω^i_a, mediante $\omega_{a\ B}^{\ A} = \omega^i_A \left(T_i\right)^A_{\ B}$.

Cualquier n-ada determina una única conexión de espín, la cual es covariantemente constante $\mathcal{D}_a e_b^B = 0$. Escribiendo la derivada covariante en términos de las componentes de la conexión, observamos que $\partial_a e_a^B - \Gamma^c_{ab} e_c^B + \Gamma^B_{aA} e_b^A = 0$, siendo Γ^c_{ab} la conexión de Christoffel, por lo tanto $\Gamma^B_{aA} = -e^b_A \left(\partial_a e_b^B - \Gamma^c_{ab} e_c^B\right)$. Usando la expresión de la conexión de Christoffel en términos de la métrica, podemos escribir

$$\eta_{FG} \Gamma^G_{aE} = e^b_E e_{cF} \Gamma^c_{ab} - e^b_E \partial_a e_{bF} = 2\left(\partial_{[b} e_{a][F}\right) e^b_{E]} + e^B_a e^b_{[E} e^c_{F]} \partial_b e^B_c, \tag{A.11}$$

donde hemos expresado a la conexión puramente en términos de la n-adas.

A.6 Geometría de Poisson

A diferencia de la geometría del espacio-tiempo, la cual está determinada por un tensor métrico, el cual es un tensor de segundo rango y simétrico; la geometría del espacio fase está determinado por un tensor de segundo rango, antisimétrico conocido como el tensor de Poisson $\mathcal{P}^{ij}$. El cual debe satisface la identidad de Jacobi

$$\mathcal{P}^{k[i} \partial_k \mathcal{P}^{jl]} = 0. \tag{A.12}$$

Este tensor proporciona un paréntesis de Poisson $\{f, g\} := \mathcal{P}^{ij}(\partial_i f)(\partial_j g)$, a cualquier par de funciones del espacio fase f, g. Un tensor de Poisson, también provee de un campo vectorial Hamiltoniano generado por una función del espacio fase, digamos H: el cual está dado por $\mathcal{P}^{ij}(\partial_j H)\partial_i$ en una base coordenada, o de manera mas general por $\mathcal{P}^\natural dH$, donde $\mathcal{P}^\natural : T^*M \to TM$, es un mapeo el cual levanta los índices del espacio cotangente usando el tensor de Poisson. Si $\mathcal{P}^{ij}$ es invertible, el espacio fase es una variedad simpléctica con una forma simpléctica $\Omega_{ij} = \left(\mathcal{P}^{ij}\right)^{-1}$, la cual, usando la identidad de Jacobi, es una 2-forma cerrada [36, 26].

A.6.1 Estructura local de las variedades de Poisson

Una variedad de Poisson puede consruirse mediante *hojas simplécticas*, las cuales proveen de una foliación (posiblemente singular) de la variedad. Las hojas simplécticas están definidas como las superficies integrales de la distribución $\mathcal{P}^\natural\left(T^*_x M\right) \subset T_x M$, las cuales son inntegrables debido a la identidad de Jacobi. El espacio co-normal a la foliación, es decir, el espacio nulo del mapeo $\mathcal{P}^\natural$, está dado por las funciones de Casimir C^I, tales que $\mathcal{P}^\natural\left(dC^I\right) = \left(\mathcal{P}^{ij}\partial_i C^I\right)\partial_j = 0$. Si uno factoriza las direcciones co-normales, es decir remueve el espacio nulo del tensor de Poisson, se induce en la variedad una estructura simpléctica [49].

Localmente siempre es posible elegir un sistema de coordenadas llamado *coordenadas de Casimir-Darboux* (x^α, C^I), con las cuales el tensor de Poisson toma la forma

$$\left(\mathcal{P}^{ij}\right) = \begin{pmatrix} \Pi^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.13}$$

donde

$$\left(\Pi^{\alpha\beta}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & 0 \\ -1 & 0 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es el tensor de Poisson estandar en una variedad simpléctica. En general, una forma simpléctica $\Omega_{\alpha\beta}$, definida en una hoja de la variedad de Poisson, no puede ser extendida a toda la variedad. Si esto es posible, entonces tenemos la siguiente definición [41]

Definición A.6.1 *Una forma presimpléctica compatible con una variedad de Poisson* $(M, \mathcal{P})$*, es una 2-forma cerrada* $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ *en* M*, tal que* $\imath_L^* \tilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{\Omega}_L$*, para todas las hojas* L *de la foliación. Donde* $\imath_L : L \to M$ *es el encajamiento de la hoja* L *en* M*, y* $\mathbf{\Omega}_L$ *es la estructura simpléctica de la hoja inducida por* $\mathcal{P}$*.*

A.6.2 Restriciones

La geometría de Poisson juega un papel muy importante en el análisis Hamiltoniano de los sistemas con restricciones. Si comenzamos con una variedad simpléctica, y luego imponemos las restricciones para obtener una subvariedad, la imagen recíproca de la forma simpléctica en la superficie de restricción automáticamente es cerrada y no-degenerada. De hecho, de esta manera uno puede dar una definición mas general de las restricciones [41, 49]

Definición A.6.2 *Sea* $(M, \mathcal{P})$ *una variedad de Poisson, y sea* $\imath : C \to M$*, una subvariedad encajada tal que* $\imath_* TC \subset \mathcal{P}^\natural(T^*M)$*. (La subvariedad* C *está contenida en alguna hoja simpléctica de* $(M, \mathcal{P})$*). Llamamos a* C *una restricción*

1. *de primera clase si* $\{0\} \neq \mathcal{P}^\natural \left(T_x^{*\perp} C\right) \subset T_x C$*, para todo* $x \in C$*,*

2. *de segunda clase si* $\mathcal{P}^\natural \left(T_x^{*\perp} C\right) \cap T_x C = \{0\}$*.*

En ambos casos, hemos definido el espacio co-normal como $T_x^{*\perp} C := \{\alpha \in T_x^* M : \ \alpha(v) = 0, \forall v \in T_x C\}$*.*

A.7 Variedades globalmente hiperbólicas

El término de hiperbolicidad global está intimamente relacionado con las condiciones de causalidad, las cuales forman parte de las llamadas jerarquías causales que definen un espacio-tiempo y están vinculadas con el probelma de la censura cósmica y predictibilidad [67, 106]. En la literatura existen diferentes definiciones acerca de lo que es una variedad hiperbólica, sin embargo, la definición mas común es la siguiente:

Definición A.7.1 *Una variedad (M, g), sin frontera, es una variedad hiperbólica si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones*

1. *Para todo par de puntos p, $q \in M$, $J^{-}(p) \cap J^{+}(q)$ es compacto. Donde $J^{-}(p)$ denota el conjunto de puntos que pueden ser alcanzados mediante curvas causalmente orientadas al pasado, no espacialoides, mientras que $J^{+}(q)$ denota al conjunto de puntos que puden ser alcanzados mediante curvas orientadas al futuro (es decir, no existen singularidades desnudas).*

2. *Causalidad fuerte, es decir, para todo $p \in M$ existe una vecindad U de p tal que ninguna curva temporaloide cruza la vecindad U más de una vez.*

Entre las principales características de una variedad globalmente hiperbólica, una de las más importantes, es la existencia de una función global en M que se interprete como el tiempo. Esto es, un campo escalar t cuyo gradiente $\nabla_a t$ es temporaloide y con dirección hacia el futuro en todo punto de M. Esta función de tiempo global nos permite distinguir entre eventos futuros y pasados sin tener violaciones de causalidad.

La hiperbolicidad global es equivalente a la existencia de superficies de Cauchy, es decir, una variedad globalmenbte hiperbólica puede ser foliada por una familia de superficies de Cauchy. En otras palabras M, es topológicamente isomorfa al producto de una superficie de Cauchy Σ y algún intervalo $I \in \mathbb{R}$, resultado probado por Geroch en 1970 [107]. En resumen, un espacio-tiempo globalmente hiperbólico es un espacio-tiempo en el cual las ecuaciones de movimiento están completamente determinadas por los datos iniciales especificados en una hipersuperficie, es decir, es un problema bien definido con valores iniciales.

Appendix B

Elementos de Análisis

B.1 El espacio de las funcione continuas

Supongamos X, un espacio compacto. Denotareos como $C(X)$, al espacio de las funciones continuas sobre X, con la norma

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|. \tag{B.1}$$

Teorema B.1.1 *Todo espacio de Banach L, es isomorfo a un subespacio cerrado de algun espacio $C(X)$. Si L es separable, entonces X puede tomarse como el interalo* $[0, 1]$.

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y $\overline{\Omega}$, la cerradura de Ω en $\mathbb{R}^n$. Usando la notación estandar: $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x^k = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$, el operador de derivadas parciales, $\partial^l = \partial_1^{l_1} \cdots \partial_n^{l_n}$, $|k| = k_1 + \cdots + k_n$. El espacio $C^r(\overline{\Omega})$, denota a la colección de funciones en $\overline{\Omega}$, con derivdas parciales hasta un orden r, tal que $\partial^l f$, $|l| \leq r$, son funciones acotadas en $\overline{\Omega}$. La norma en $C^r(\overline{\Omega})$, se define mediante la fórmula

$$\|f\|_{C^r} := \sup_{|l| \leq r} |\partial^l f(x)|, \quad x \in \Omega. \tag{B.2}$$

La convergencia en $C^r(\overline{\Omega})$, significa la convergencia uniforme de las funciones mismas y sus derivadas parciales hasta orden r. El espacio $C^r(\overline{\Omega})$, corresponde a un espacio de Banach [48].

Sin embargo, en la práctica, uno a veces necesita usar conceptos relacionados a la diferenciabilidad de las funciones. Para esto, los espacios comunmente usados son

- El espacio $C^\infty(\Omega)$, el cual consiste en el espacio formado por todas las funciones infinitamente diferenciables en Ω. La topología de $C^\infty(\Omega)$, es determinada por una familia de seminormas p_{Kl}, donde K es un subconjunto compacto, y $l = (l_1, \ldots, l_n)$ un conjunto arbitrario de índices

$$p_{Kl}(f) := \sup_{x \in K} |\partial^l f(x)|. \tag{B.3}$$

Teorema B.1.2 *$C^\infty(\Omega)$ es un espacio normado completo y numerable (y por lo tanto metrizable).*

- El espacio $C_0^\infty(\Omega)$, consiste de todas las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω. $C_0^\infty(\Omega)$, no es un espacio cerrado en $C^\infty(\Omega)$, y por lo tanto no es completo en la topología de $C^\infty(\Omega)$.

- El espacio $S(\mathbb{R})$, consiste en espacio formado por las funciones infinitamente diferenciables en $\mathbb{R}^n$, las cuales decrecen rápidamente en el infinito. La topología de $S(\mathbb{R})$, está dada por una familia de seminormas

$$p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|, \tag{B.4}$$

con α y β un conjunto de multi-índices.

La relación entre estos espacios, está dada por

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{B.5}$$

Teorema B.1.3 *El espacio $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L_p(\mathbb{R}^n, dx)$ para $1 \leq p < \infty$, en $S(\mathbb{R}^n)$, y $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. El espacio $S(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L_p(\mathbb{R}^n, dx)$, para $1 \leq p < \infty$, y en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$*

B.2 Funciones Generalizadas (Distribuciones)

El concepto de función generalizada o distribución, surge de manera natural en diversos problemas en matemáticas y física, cuando uno desea extender cierts operaciones a un dominio más extenso. Un ejemplo es la delta de Dirac, la cual está definida por las siguients propiedades

$$\delta(x) = 0, \quad \text{para todo } x \neq 0, \quad \delta(0) = \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Resulta que estas propiedades dejan de ser contradictorias, si una función generalizada se entiende como un elemento dual del espacio L', donde L denota el espacio de las funciones de prueba, el cual está dado comunmente por $C^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ o $S(\mathbb{R})^n$. Los elementos $C'^\infty(\Omega)$, $C_0'^\infty(\Omega)$ y $S'(\mathbb{R})^n$, resultan en funciones generalizadas en el dominio Ω, funciones generalizadas con soporte compacto en Ω y distribuciones pesadas en $\mathbb{R}^n$, respectivamente.

Teorema B.2.1 *Sea f una función localmente integrable (integrable en cada compacto) con respecto a una medida de Lebesgue dx, en una región Ω. La relación $\phi \mapsto \int_\Omega \phi(x)f(x)dx$, es una funcional lineal en $C_0^\infty(\Omega)$. Si f es cero fuera de algún conjunto compacto $K \subset \Omega$, esta es una relación de funcionales continuas es $C^\infty(\Omega)$.*

Las funciones generalizadas descritas por este teorema, son llamadas funciones generalizadas regulares; es decir corresponden a funciones ordinarias localmente integrables. Sin embargo, existen funciones generalizadas que no son regulares. Por analogía al caso regular, el valor de una función generalizada F, sobre una función de prueba ϕ, es frecuentementes escrita como $\int_\Omega F(x)\phi(x)dx = \langle F, \phi\rangle$. Por supuesto, esta expresión no puede tomarse literalmente, puesto que la integral diverge o no tiene sentido. Supongamos Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ el cual contiene al origen. La delta de Dirac $\delta(x)$, se define como un elemento del espacio $C^\infty(\Omega)$, dado por la fórmula

$$\int_\Omega \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0). \tag{B.6}$$

Debido a que $C_0^\infty(\Omega)$, está continuamente embebido en $C^\infty(\Omega)$, toda funcional lineal en $C^\infty(\Omega)$ da lugar a una funcional lineal en $C_0^\infty(\Omega)$ por restricción [108]. De esta manera, tenemos que

$$C'^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n) \subset C_0'^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{B.7}$$

A diferencia de la funciones ordinarias, las funciones generalizadas no tienen un valor definido en un punto. No obstante, la expresión $F(x) = 0$, en el dominio $U \subset \Omega$, hace sentido para unfa función generalizada $F \in C'^\infty(\Omega)$. Por definición, esto significa que $\langle F, \phi\rangle = 0$, para todas las funciones de prueba tal que *supp* $\phi \subset U$.

Teorema B.2.2 *Los espacios $C'^\infty(\Omega)$, $C_0'^\infty(\Omega)$ y $S'(\mathbb{R}^n)$, son completos en la topología *-débil. Es decir, si una sucesión $\{F_n\}$ de funciones generalizadas, es tal que $\{\langle F_n, \phi\rangle\}$ es de Cauchy para cualquier función de prueba ϕ, entonces $\lim_{n\to\infty} F_n = F$, existe y es una función generalizada del mismo tipo que F_n.*

B.3 Operaciones con Funciones Generalizadas

Denotemos por L a los espacios $C^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ y $S(\mathbb{R}^n)$, sea L' su correspondiente espacio dual y L_0' algún subespacio denso de L', el cual consiste de funciones generalizadas regulares.

- *Multiplicación.* Sea $f \in C^\infty(\Omega)$, el operador $M(f)$ de multiplicación por f, admite una extensión continua de $C_0^\infty(\Omega)$ a $C_0'^\infty(\Omega)$. Sea $L = C_0^\infty(\Omega) = L_0'$, $B = M(f)$. La restricción de B' a L_0' se obtiene de la siguiente forma. Sea $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $g \in L_0'$, entonces

$$\langle B'g, \phi\rangle = \langle g, B\phi\rangle = \langle g, f\phi\rangle = \int_\Omega g(x)f(x)\phi(x)dx. \tag{B.8}$$

Por lo tanto B' act'ua sobre L_0' como la multiplicación por f. Esta operación admiete una extensión continua a todo el espacio $C_0'^\infty(\Omega)$.

Ejemplo. El producto de una función δ sobre una linea, por una función infinitamente diferenciable f. Tenemos que $\langle f\delta, \phi\rangle = \langle \delta, f\phi\rangle = f(0)\phi(0)$. Lo cual está de acuerdo con la idea intuitiva acerca el comportamiento de la función δ, bajo la multiplicación.

- *Diferenciación.* Denotemos por ∂_j a la derivada parcial $\partial/\partial x_j$, y ∂^k el operador $\partial^{|k|}/\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}$. El operador ∂^k admite una extensión continua de $C_0^\infty(\Omega)$ a $C_0'^\infty(\Omega)$. Para esto consideremos el caso de ∂_j, considerando a $B = -\partial_j$ y calculemos la restricción de B' en $C\infty_0(\Omega)$

$$\langle B'f, \phi\rangle = \langle f, B\phi\rangle = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_j}dx = \int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\phi(x)dx. \tag{B.9}$$

Por lo tanto B' coincide con ∂_j en $C_0^\infty(\Omega)$. Por lo tanto, el operador $\partial/\partial x_j$ admite una extensión continua a $C_0'^\infty(\Omega)$.
Ejemplo. La función generalizada $\partial^k\delta$, actúa de acuerdo a la siguiente fórmul

$$\left\langle \partial^k\delta, \phi\right\rangle = (-1)^{|k|}\partial^k\phi(0). \tag{B.10}$$

Teorema B.3.1 *Toda función generalizada $F \in C'^\infty(\Omega)$ puede ser escrita de la forma*

$$F = \partial^k f, \tag{B.11}$$

donde k denota un multi-índice, y f es una función generalizada regular.

Prueba: [48].

B.4 Algebras de Banach

Un álgebra de Banach, es un álgebra $\mathcal{A}$, sobre los números complejos, con una norma $\|\cdot\|$, con la cual $\mathcal{A}$ es completa, es decir, $\mathcal{A}$ es una espacio de Banach, de tal forma que la desigualdad

$$\|a\cdot b\| \leq \|a\|\|b\|, \tag{B.12}$$

se cumple para todo $a, b \in \mathcal{A}$. Esta expresión implica que la multiplicación en $\mathcal{A}$ es un mapeo continuo de $\mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ [108].

Un álgebra $\mathcal{A}$ es unital, si existe un elemento $1_\mathcal{A} \in \mathcal{A}$, tal que

$$1_\mathcal{A}a = a1_\mathcal{A}, \;\; \forall a \in \mathcal{A}. \tag{B.13}$$

Al elemento $1_\mathcal{A}$ se le conoce como la identidad de $\mathcal{A}$, el cual es único.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unital. Para cada $a \in \mathcal{A}$, denotamos por

$$Res(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \text{ es invertible}\}, \tag{B.14}$$

al conjunto resolvente de $a \in \mathcal{A}$. Su complemento

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) := \mathbb{C} \setminus Res(a), \tag{B.15}$$

es conocido como el espectro de a, el cual corresponde a un conjunto cerrado en $\mathbb{C}$.

Teorema B.4.1 (Gelfand-Mazur) *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unital, de tal manera que todos los $a \in \mathcal{A}$ distintos de cero son invertibles. Entonces $\mathcal{A} = \mathbb{C}1$.*

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa, definimos el espacio estructural $\Delta_{\mathcal{A}}$, como el conjunto de todos los homomorfismos continuos, distintos de cero, $m : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Este espacio, llamado comunmente como el espacio de ideales maximales, provee de una biyección entre $\Delta_{\mathcal{A}}$ y el conjunto de ideales maximales de $\mathcal{A}$. Los elementos de $\Delta_{\mathcal{A}}$ corresponden a funcionales lineales multiplicativas, las cuales obedecen automáticamente $m(1) = 1$ [48].

De esta manera, cada $a \in \mathcal{A}$, define una función $\hat{a}$, la cual actúa sobre el espacio estructural,

$$\begin{aligned} \hat{a} \quad : \quad & \Delta_{\mathcal{A}} \to \mathbb{C} \\ & m \mapsto \hat{a}(m) = m(a). \end{aligned}$$

El mapeo $a \mapsto \hat{a}$, es un homomorfismo de álgebras entre $\mathcal{A}$ y el álgebra de las funciones continuas definidas en $\Delta_{\mathcal{A}}$. Este mapeo es conocido como la transformada de Gelfand [109].

Teorema B.4.2 (Gelfand-Naimark) *Sea $\mathcal{A}$ una *álgebra de Banach. El conjunto $\hat{\mathcal{A}} := \{\hat{a} : a \in \mathcal{A}\}$, es una subálgebra densa en $C_0(\Delta_{\mathcal{A}})$.*
Si $\mathcal{A}$ es una C^* álgebra conmutativa, entonces la tranformada de Gelfand $a \mapsto \hat{a}$, corresponde a un isomorfismo isométrico

$$\mathcal{A} \to C_0(\Delta_{\mathcal{A}}). \tag{B.16}$$

En particular, $\|\hat{a}\|_{\Delta} = \|a\|$, además de que $m(a^*) = \overline{m(a)}$.

Teorema B.4.3 (Construcción GNS) *Dada una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ con identidad, un estado ω (funcional en $\mathcal{A}$, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\omega$ y una representación $\pi_\omega : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$, donde $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ denota al espacio de los operadores lineales acotados, tal que*

1. *$\mathcal{H}_\omega$, contiene un vector cíclico Ψ_ω,*

2. $\omega(A) = \big(\Psi_\omega, \pi_{\omega(A)}\Psi_\omega\big)$,

3. *Cualquier otra representación* π *en el espacio de Hilbert* $\mathcal{H}_\pi$, *cuyo vector cíclico satisface*

$$\omega(A) = (\Psi, \pi(A)\Psi)\,, \tag{B.17}$$

es unitariamente equivalente a π_ω, *es decir, existe una isometría* $U : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{H}_\omega$, *tal que*

$$U\pi(A)U^{-1} = \pi_\omega(A), \quad U\Psi = \Psi_\omega. \tag{B.18}$$

Prueba: [109].

Bibliography

[1] Dirac, P.A.M., Can. J. Math., **2**,129 (1950); Can. J. Math. **3**,1 (1951); Proc. R. Soc. (Lond.), **A246** 326 (1958).

[2] Arnowitt R., Deser S. and Misner C., In: L. Witten (Ed.), *Gravitation: An Introduction to Current Research*, Wiley, New York, p. 227; (1997).

[3] Komar A., *Quantization program for general relativity*, in Relativity Carmeli M, Fickler S. I. and Witten L., Plenum, New York (1970).

[4] Ashtekar A. Geroch R., Rep. Prog. Phys. **37** 1211-1256, (1974).

[5] Kuchar K., *Canonical methods of quantization*, in Quantum Gravity 2, A Second Oxford Symposium, Isham C. J., Penrose R. and Sciama D. W. Clarendon Press, (1981).

[6] Weinberg S., *Gravitation and Cosmology*, John Wiley, New York, (1972).

[7] DeWitt B.S., *Covariant quantum geometrodynamics*, en Magic Without Magic, Wheeler A., Klauder J.R., (1972).

[8] Duff M. *Covariant quantization in Quantum Gravity*, An Oxford Symposium, Isham C. J., Penrose R., Sciama D. W., Clarendon Press, (1975).

[9] Ashtekar A., *Lectures on non-perturbative canonical gravity*, World Scientific, Singapore, (1991).

[10] Rovelli C., *Quantum Gravity*, Cambridge University Press, (2004).

[11] Carlip S., *Quantum Gravity in 2+1 Dimensions*, Cambridge University Press, (2003).

[12] Anderson J. L., Bergmann P. G., Phys. Rev., **83**, 1018 (1951).

[13] Bergmann, P. G., Goldberg I., Janis A., Phys. Rev. **103**, 807 (1956).

[14] Bergmann, P. G., Rev. Mod. Phys. **33**, 510 (1961).

[15] Berezin F. A., Marinov M. S., Ann. Phys., **104**, 336 (1977).

[16] Casalbuoni R., Nuovo Cimento, **33A**, 115 (1976).

[17] Gervais J. L., Sakita B., Nucl. Phys., **B64**, 632 (1971).

[18] Becchi C., Rouet C., Stora R., Ann. Phys., **98**, 287 (1976); Phys. Lett., **B52**. 344 (1974).

[19] Batalin I. A., Vilkovisky G. A., Phys. Lett. **B69**, 309 (1977).

[20] Fadeev L. D., Theor. Math. Phys., **1**, 1 (1969).

[21] Symanzik K., Nucl. Phys., **190**, 1 (1983).

[22] Jackiw R., Seminair de Mathematiques Superieurs, Montreal, Quebec (1988).

[23] Dirac P. A. M., *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York (1964).

[24] Sudarshan E. C., Mukunda N., *Classical Dynamics, A Modern Perspective*, Wiley, New York (1974).

[25] Hanson A. J., Regge T., Teitelboim C., *Constrained Hamiltonian Systems*, Accademia Nazionale dei Lincei, (1976).

[26] Henneaux M., Teitelboim C., *Quantization of Gauge Systems*, Princeton Univ. Press, (1992).

[27] Sundermeyer K., *Constrained Dynamics*, Springer Lecture Notes **169**, (1982).

[28] Govaers J., *Hamiltonian Quantisation and Constrained Dynamics*, Leuven University Press, (1991).

[29] Cushman R., Duistermaat H., Sniatycki J., *Geometry of Nonholonomically Constrained Systems*, World Scientific, (2010).

[30] Gitman D. M., Tyutin I. V., *Quantization of Fields with Constraints*, Berlin, Springer (1990).

[31] Chernoff P., Mardsen J., Lecture Notes. Math., **425**, (1974).

[32] Marsden J., *Applications of Global Analysis in Mathematical Physics*, Publish or Perish, Boston (1974).

[33] Utiyama R., Prog. Theor. Phys. Suppl., **9**, 19 (1959).

[34] Rothe H. J., Rothe K. D., J. Phys. A: Math. Gen. **36** 1671 (2003b).

[35] Goldstein H., *Classical Mechanics*, Addison Wesley, Ontario (1980).

[36] Arnold V., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics 60, Springer, Berlin (1978).

[37] Ashtekar A., Lewandowski J., Class. Quant. Grav. **21**, R53 (2004).

[38] Torres del Castillo F. G.,*Differentiable Manifolds. A Theoretical Physics Approach*, Birkhauser (2012).

[39] Ashtekar A., Balachandran A. P., Int. J. Mod. Phys., **A4**, 1493-1514 (1989).

[40] Marsden J. E., Tudor R. *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition for Classical Mechanical Systems*, Texts in Applied Mathematics (1999).

[41] Bojowald M., Strobl T., JHEP, **0307**, 002 (2003).

[42] Escalante A., Rubalcava-García I., *A Pure Dirac's canonical analysis for four-dimensional BF theories*, arXiv:1107.4421 [math-ph], aceptado en International Journal of Geometric Methods in Modern Physics.

[43] Bojowald M., *Canonical Gravity and Applications: Cosmology, black holes and quantum gravity*, Cambridge University Press (2011).

[44] Escalante A., Phys. Lett. **B676**, 105-111 (2009).

[45] Ashtekar A., *Lectures on Non-Perturbative Canonical Gravity*, Advanced Series in Astrophysics and Cosmology-Vol. 6, World Scientific (1991).

[46] Escalante A., Carbajal L., Annals Phys. **326**, 323-339 (2011).

[47] Cartas Fuentevilla R., Escalante Hernández A.,Berra Montiel J., Int. J. Mod. Phys. **A26**, 3013-3034 (2011).

[48] Rudin W., *Functional Analysis*, Second Edition, International Series in Pure and Applied Mathematics, Mc Graw Hill (1991).

[49] Rothe H., Rothe K., *Classical and Quantum Dynamics of Constrained Hamiltonian Systems*, World Scientific Lecture Notes Vol. 81 (2010).

[50] Peldan P., Class. Quant. Grav. **11**:1087-1132, (1994).

[51] Alexandrov S., Livine E. R., Phys.Rev. **D67** 044009, (2003).

[52] Alexandrov S., Krasnov K., Class. Quant. Grav. **26**:055005, (2009).

[53] Alexandrov S., Vassilevich D.V., Phys. Rev. **D58** 124029, (1998).

[54] Henneaux M., Kleinschmidt A., Lucena G., *Remarks on Gauge Invariance and First-Class Constraints*, The proceedings of the conference Gauge Fields: Yesterday, Today, Tomorrow, dedicated to the 70th anniversary of Professor A. A. Slavnov; arXiv:1004.3769.

[55] Blau M., and Thompson G., Ann. Phys. **205** 130, (1991).

[56] Maggiore N., and Sorella S. P., Int. J. Mod. Phys. **A8** 929, (1993).

[57] Horowitz G., Comm. Math. Phys. **125** 417, (1989).

[58] Plebański, J. F., Math. Phys. **18** 2511, (1977).

[59] Baez J., Knots and quantum gravity: progress and prospects, Proccedings of the Seventh Marcel Grossman Metting on General Relativity, gr-qc/9410018.

[60] Baez J., Lett. Math. Phys. **38** 129-143, (1995).

[61] Halpern M. B., Phys. Rev. D **19** 517 (1979).

[62] Fucito F., Martellini M., Zeni M., Nucl. Phys. B **496** 259-284 (1997).

[63] Cattaneo A.S., Cotta-Ramusino P., Gamba A. and Martellini M., Phys. Lett. B **355** 245 (1995).

[64] Accardi A., Belli A., Martellini M., and Zeni M., Nucl. Phys. **B505** 540-566, (1997).

[65] Martellini M., Zeni M., Phys. Lett. B 401 62 (1997)

[66] Castellani L., Ann. Phys. **143** 357-371, (1982).

[67] Wald R., *General Relativity*, The University of Chicago Press, (1984).

[68] Thiemann T., *Modern Canonical Quantum General Relativity*, Cambridge University Press (2008).

[69] Alexandrov S., Class. Quant. Grav. **17** 4255-4268, (2000).

[70] Geiller M., Lachieze-Rey M., Noui K., Phys. Rev. **D84**: 044002, (2011).

[71] Oriti D., *Approaches to Quantum Gravity*, Cambridge University Press, (2009).

[72] F. Cianfrani, Montani G., Int. J. Mod. Phys. **A23**: 1214, (2008).

[73] Ashtekar A., Lewandowski J., Class. Quantum Grav. **21**, 53 (2004).

[74] Perez A., Class. Quantum Grav. **20**, R43 (2003).

[75] Oriti D., Rept. Prog. Phys. **64**, 1703 (2001).

[76] Baez J., Lect. Notes Phys. 543, 25 (2000); Class. Quantum Grav. **15**, 1827 (1998).

[77] Engle J., Pereira R., and Rovelli C., Phys. Rev. Lett. **99**, 161301 (2007).

[78] Montesinos M., Velázquez M., *BF gravity with Immirzi parameter and matter fields*, arXiv:1112.5929.

[79] Escalante A., Berra-Montiel J., *A pure Dirac's method for Yang-Mills theory expressed as constrained BF-like theory*, Int. J. Pure Appl. Math. **79** (2012).

[80] Peskin M.E., Schroeder D.V., *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Advanced Book Program, (1995).

[81] Montesinos M., Class. Quant. Grav. **23**, 2267-2278, (2006).

[82] Cuesta V., Montesinos M., Phys. Rev. **D76** 104004 (2007).

[83] Senjanovic P., Ann. Phys. (N.Y.) 100, 227 (1976).

[84] Nakahara M.,*Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, (2003).

[85] Gomis J., Paris J., Samuel S., Phys.Rept. 259 1-145, (1995).

[86] Weinberg S., *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, Vol. I,II, (1996).

[87] Berra-Montiel J., Rosales E., *Discrete canonical analysis of three-dimensional gravity with cosmological constant*, Int. J. of Mod. Phys. A **30** (2015).

[88] Witten E., Nucl. Phys., **B311**:46, (1988).

[89] Meusburger C., Talk given at 2nd School and Workshop on Quantum Gravity and Quantum Geometry (Corfu, September 13-20 2009).

[90] Kiriushcheva N., Kuzmin S. V., Racknor C., Valluri S. R., Phys. Lett. A **372**:5101-5105, (2008).

[91] Gambini R. and Pullin J., *Discrete space-time*, arXiv:gr-qc/0505023, published in Ï00 years of relativity", Ashtekar A. (editor), World Scientific, Singapore (2006).; Int. J. Mod. Phys. **D15** 1699-1706, (2006); Phys. Rev. **D72** 024031, (2005).

[92] Di Bartolo C., Gambini R., Porto R., Pullin J., J. Math. Phys. 46, 012901 (2005).

[93] Campiglia M., Di Bartolo D., Gambini R., Pullin J., J. Phys. Conf. Ser. 67, 012020, (2007).

[94] Choptuik M., Phys. Rev. **D44**, 3124 (1991).

[95] Bander M., Phys. Rev. **D36**, 2297 (1988).

[96] Thiemann T., Class. Quantum Grav. **15** 829; 875 (1998).

[97] Menotti P., Pelissetto A., Phys. Rev. **D35**, 1194 (1987).

[98] Oeckl R., *Discrete Gauge Theory. From Lattice to TQFT*, Imperial College Press, (2005).

[99] Renteln P., Smolin L., Class. Quan. Grav. 6, 275 (1989).

[100] Thiemann T., Class. Quantum Grav. **23** (2006) 2211-2247; Dittrich B., Thiemann T., Class. Quant. Grav. **23** (2006) 1025-1065; Dittrich B., Thiemann T., Class. Quantum Grav. **23** (2006) 1067-1088; Dittrich B., Thiemann T., Class. Quantum Grav. **23** (2006) 1089-1120.

[101] Campiglia M., Di Bartolo C., Gambini R., Pullin J., Phys. Rev. **D74** (2006).

[102] Bahr B., Dittrich B., Class. Quantum Grav. **26** (2009); Bahr B., Dittrich B., AIP Conf. Proc. 1196 (2009).

[103] Nakahara M., *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, (2003).

[104] Kobayashi S., Nomizu K., *Foundations of Differential Geometry*, Volumen I Y II, Wiley Classics Library (1996).

[105] Baez J., Muniain J., *Gauge Fields, Knots and Gravity*, World Scientific (1994).

[106] Hawking S., Ellis G.F., *The Large Structure of Space-Time*, Cambridge University Press (1973).

[107] Geroch R.,J. Math. Phys. **11**, 437-449 (1970).

[108] Deitmar A., Echterhoff S., *Principles of Harmonic Analysis*, Springer, (2009).

[109] Folland G.B., *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, (1995).