## Práctica 1. Nociones generales de la teoría de errores. Aplicación a la Física experimental.

*Los físicos creen en un resultado porque los matemáticos lo han calculado; los matemáticos creen en él porque las observaciones físicas lo han demostrado.*

### *Experimento y error*

La Física es una ciencia empírica; es decir, se basa en mediciones. Para hacer una medición se necesita tanto un sistema de unidades como un patrón de referencia. En el área de las ciencias exactas, se utiliza actualmente el Sistema Internacional de Unidades (SI), desarrollado alrededor de 1960, que es la versión moderna del Sistema Métrico Decimal.

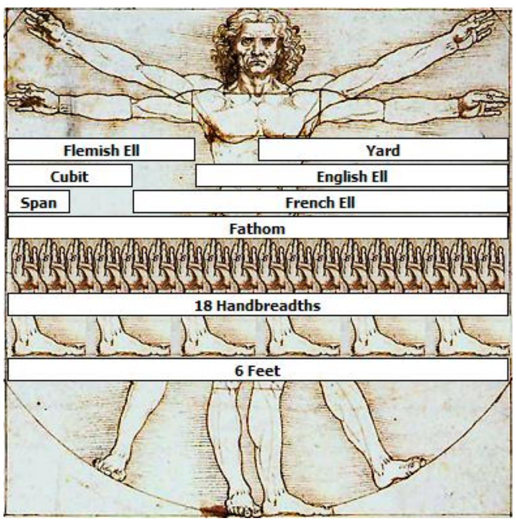


Figura 1. El hombre de Vitrubio.

### *Cantidad física*

El objetivo de hacer un experimento en Física es el de determinar una o varias cantidades físicas involucradas en un fenómeno. En el mundo que nos rodea, se observan fenómenos que pueden ser cuantificados a través de cantidades físicas. Estas cantidades están formadas, ya sea por un escalar, o un vector, y una unidad; así, por ejemplo, tenemos 5.35 m y $23\hat{\mathbf{i}}$ N. La determinación cuantitativa de una cantidad física se reduce a compararla con la unidad correspondiente al patrón de medición.

Un estudio profundo y sistemático de los fenómenos físicos nos permite determinar leyes universales a través de experimentos. Sin embargo, siempre que se hace un experimento para medir alguna cantidad física, existe una indeterminación en esa cantidad; esto significa que, si la medición se efectúa varias veces, es posible que se obtengan diferentes resultados, pues, absolutamente, ninguna medición está libre de errores. Obtenemos, entonces, una colección de valores muy cercanos entre sí. Debe de quedar bien claro que lo único que puede saberse, siempre que se hace una medición, es entre qué valores se encuentra el valor real de una cantidad física. No debe confundirse el uso que se hace de la palabra error en una medición, con el error que se obtiene al hacer una medición descuidadamente.

Puesto que no es posible conocer todas las variables involucradas en un experimento, sólo es viable medir algunas, aquellas que nos interesa conocer, y la dependencia que existe entre ellas. Pero el hecho de no conocer todas las variables involucradas, o cómo son afectadas unas con otras en el experimento, no impide que se haga con precisión. Existen métodos bien establecidos para determinar en qué rango se encuentra el valor de la cantidad física que estamos midiendo y cuál es el error en la medición.

Figura 2. Instrumentos de medición.

Pongamos como ejemplo típico de medición el de determinar la dilatación lineal, en función de la temperatura, de una varilla de metal. Cuando se realiza este experimento, se considera que la varilla está totalmente aislada y no se permite ni la entrada ni la fuga de calor. Sin embargo, existen algunos efectos, aún cuando el experimento se haga de la manera más cuidadosa, que influyen, en menor o mayor grado, sobre la medición. Dentro de la varilla no hay una temperatura uniforme y, en el momento de poner en contacto el termómetro con el metal, parte del calor contenido en el metal pasa a éste produciendo un gradiente de temperatura; otra cantidad de calor pasa al sistema que mide la longitud de la varilla y que necesariamente está en contacto con ella. En realidad, nunca se alcanza el equilibrio térmico. También puede suceder que el termómetro pueda no estar bien calibrado, o la lectura sea errónea debido al paralaje; también el equipo puede no responder rápidamente a los cambios de temperatura, etc. Algunas de estos efectos son completamente despreciables, otros pueden ser estimados y otros no.

***Error sistemático y error relativo.***

Cuando se efectúa una medición, es posible clasificar los errores, en errores que pueden ser removidos o no, llamados errores aleatorios y errores sistemáticos, respectivamente.
Los errores aleatorios aparecen, como su nombre lo indica, completamente al azar y no tienen, aparentemente, ninguna causa que los produzca, por lo tanto, no son repetibles. Tampoco pueden ser totalmente removidos.
Los errores sistemáticos son todos los errores que no son aleatorios. Este error se agrega a la medición que se está realizando como una constante. Son errores producidos, generalmente, por la mala calibración del aparato de medición. Además, son difíciles de detectar, a menos que se haga la medición, ya sea con otro instrumento o por medio de otro método.

Otros conceptos utilizados en el proceso de medición son las siguientes:
*Exactitud*: Significa qué tan cercano está un valor medido del valor real. Si no se conoce el valor real de una cantidad física, no es sencillo determinar en qué extensión es exacta nuestra medición. La medición es exacta si no es afectada por los errores sistemáticos.
*Precisión*: Indica la exactitud de una medición. Ser más preciso no indica necesariamente ser más exacto. Se dice que una medición es precisa si no es influida por los errores aleatorios.
En general, una medición con errores aleatorios puede ser muy precisa porque el error sistemático es pequeño con respecto a los aleatorios, Figura 3.

Así, se concluye que la exactitud y precisión de una medición depende del aparato de medición; del observador; del método de medición; y de los errores aleatorios.


Figura 3. Las líneas grises representan la incertidumbre asociada a cada medición, $r_1$ y $r_2$. $r$ representa el valor real de la cantidad física. La medición $r_2$ es más exacta, pero menos precisa que la medición $r_1$.

Realmente, hacer una medición es como tirar al blanco. En la Figura 4 se presenta la interpretación, sobre una diana, de lo que significa precisión y exactitud.

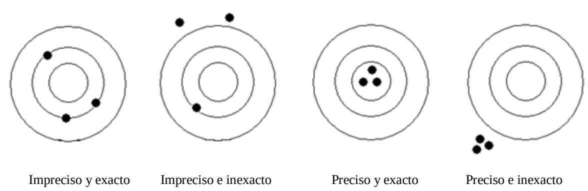


Figura 4. Precisión y exactitud

***Determinación de errores***

Supongamos que hacemos $n$ veces una medición de una cantidad física determinada y obtenemos los valores $x_1$, $x_2$,...$x_n$. El promedio, o valor medio, de la medición viene dado por

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \qquad (1)$$

Este valor se interpreta como el mejor valor de la cantidad física $x$ obtenido de $n$ mediciones. Si el número de mediciones es muy grande, se espera que el valor medio esté muy cercano al valor correspondiente al máximo de la función de distribución (gaussiana o normal) de la cantidad medida, Figura 5.

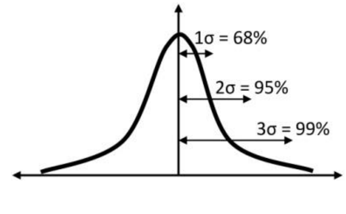

Figura 5. Distribución gaussiana de las mediciones de un medidor de potencia. Las flechas indican que para diferentes valores de $k\sigma$, la confianza es de 68 % ($k$ = 1), 95 % ($k$ = 2) y 99 % ($k$ = 3).

La desviación del valor medio de cada medición se expresa como $\varepsilon_k = x_k - \bar{x}$, cantidad que puede ser positiva o negativa. De acuerdo a la ecuación (1), se cumple siempre que

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = 0 \qquad (2)$$

La dispersión de la medición, a partir del valor medio, se describe mediante la desviación estándar $\Delta x$, dada por

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2}{n-1}} \qquad (3)$$

La desviación estándar, o incertidumbre, garantiza que el valor de cada medición de la cantidad, $x_i$, se encuentra, con el 68.3% de confiabilidad, en el intervalo

$$\bar{x} - \Delta x < x_i < \bar{x} + \Delta x$$

La Figura 6 muestra los datos de un experimento donde se muestra los datos; el intervalo de confianza a través de las barras de error; y un modelo ajustado a los datos experimentales.

Frecuentemente se presenta el error relativo de la medición de una cantidad física en forma de porcentaje, de tal forma que

$$\text{Error relativo} = \frac{\Delta x}{x} \times 100\%$$

La incertidumbre sobre el valor medio viene dada por

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{n}}$$

donde $n$ es el número total de mediciones.

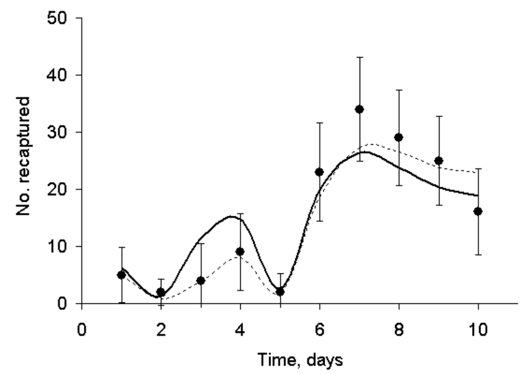


Figura 6. Número diario de polillas capturadas en un experimento. Los puntos indican los datos experimentales. La curva continua y la punteada son modelos ajustados al experimento. Las barras de error indican una confiabilidad del 95 %.

### *Cifras significativas*

Por cifras significativas se entiende los dígitos que tienen significado en una cantidad, ya sea medida o calculada. Para determinar cuáles son las cifras significativas, es necesario aprender algunas reglas básicas.

La primera dice que cualquier dígito diferente de cero es significativo. También, los ceros entre dígitos diferentes de cero son significativos. Como ejemplo, 8002 tiene cuatro cifras significativas, mientras que 20254 tiene cinco.

Los ceros a la izquierda de los primeros dígitos diferentes de cero no son significativos; por ejemplo, 0.000876 tiene sólo tres cifras significativas.

En los números con punto decimal, los ceros a la derecha de un dígito diferente de cero son significativos. Así, 0.045 tiene dos cifras significativas, mientras que 0.0450 tiene tres.

En los números sin punto decimal, los últimos ceros a la derecha del número pueden ser considerados significativos, o no. 200 tiene una sola cifra significativa, pero 200. tiene tres. $2\times10^2$ tiene una. Para que los ceros de la derecha del número sean significativos, se debe poner un punto decimal al número.

También existe una manera de representar de manera consistente las incertidumbres asociadas a una medición: En general, las cifras significativas asociadas a una medición deben de ser del mismo orden que las correspondientes a la incertidumbre.

Se muestran algunos ejemplos en la siguiente tabla, indicando la manera correcta de escribir la medición y su incertidumbre.

| Incorrecto | Correcto |
|---|---|
| 7.34 ± 0.02098 | 7.34 ± 0.02 |
| 23.0 ± 2 | 23.0 ± 2.0 |
| 7 ± 0.5 | 7.0 ± 1.0 |
| 34.59 ± 0.058 | 34.59 ± 0.06 |

***Redondeo***

El resultado de la medición y su incertidumbre se deben redondear hasta el mismo número de cifras decimales. La incertidumbre se debe siempre redondear; mientras que el resultado de la medición se debe redondear al valor más pequeño si antes de la cifra que se va a redondear hay alguno de los números entre 0 y 4; y al valor más alto si termina en un número entre 5 y 9.

Para encontrar la cifra que se va a redondear, se busca la primera cifra desde la izquierda que sea diferente de cero. Si es un número entre 3 y 9, entonces ésta es la cifra que se redondeará. Si es un 1 ó 2, entonces la siguiente cifra hacia la derecha es la que se redondea.

***Ejemplos***

Ejemplo 1.
En este ejemplo se muestra cómo se calculan las cantidades que se mencionaron con los datos de un experimento. En este caso, se ha medido una arista de un cubo seis veces. En la Tabla I se muestran los resultados de cada una de las mediciones, así como la desviación del valor medio.

Tabla I.

| | $l_i$ (m) | $\varepsilon_i$ (m) | $\varepsilon_i^2 \times 10^{-6}$ (m$^2$) |
|---|---|---|---|
| 1 | 2.256 | 0.007 | 49 |
| 2 | 2.243 | -0.006 | 36 |
| 3 | 2.235 | -0.014 | 196 |
| 4 | 2.274 | 0.025 | 625 |
| 5 | 2.265 | 0.016 | 256 |
| 6 | 2.249 | 0.000 | 0.0 |

Con los valores de la segunda columna se obtiene el valor medio, o promedio:

$$\bar{x} = (13.495)/6 \text{ m}$$

$$\bar{x} = 2.249 \text{ m}$$

que puede redondearse a 2.250 m.

Con los valores encontrados del valor medio y la desviación del valor medio de cada medición, se encuentra que la desviación estándar es

$$\Delta x = 0.015 \text{ m}$$

De esta manera, el valor más probable de cada medición, $l_i$, se encuentra de la siguiente manera

$$l_1 = 2.256 \pm 0.015 \text{ m}$$
$$l_2 = 2.243 \pm 0.015 \text{ m}$$
$$l_3 = 2.235 \pm 0.015 \text{ m}$$
$$l_4 = 2.274 \pm 0.015 \text{ m}$$
$$l_5 = 2.265 \pm 0.015 \text{ m}$$
$$l_6 = 2.249 \pm 0.015 \text{ m}$$

La incertidumbre para el valor medio es 0.006 m, de tal forma que

$$(2.250 - 0.006) \text{ m} < \bar{l} < (2.250+0.006) \text{ m}$$

Generalmente se escribe este resultado como

$$\bar{l} = 2.250 \pm 0.006 \text{ m}$$

El error relativo es, entonces,

$$\frac{\Delta x}{\bar{x}} = \frac{0.015}{2.249} \times 100\% = 0.6\ \%$$

O, también

$$\bar{l} = 2.250 \text{ m} \pm 0.6\%$$

**Propagación de errores**

Generalmente, las mediciones que se hacen de una cantidad física deben de combinarse con otra cantidad física a través de operaciones aritméticas. Esto produce que los errores en cada una de las cantidades usadas en una relación compuesta se combinen para dar el peor resultado. Un valor más cercano al error de una cantidad física se obtiene utilizando métodos que permitan que los errores de una cantidad física se contrarresten con los errores de otra.

Si existen dos cantidades físicas, $x$ y $y$, que se midieron con sendas incertidumbres, de tal forma que quedan $x \pm \Delta x$ y $y \pm \Delta y$ ¿cuál será el valor de las nuevas cantidades $z$ y $\Delta z$ calculada a partir de $x$ y $y$?

Aquí se usaran métodos muy simples para evaluar el valor de $z$, y su incertidumbre, bajo el conocimiento de que un tratamiento más profundo está más allá del alcance de estas notas.

Para el cálculo de la incertidumbre de $z$, $\Delta z$, utilizaremos dos aproximaciones: la de promedios de errores y la de desviaciones estándar. Las expresiones dadas, usando la desviación estándar, corresponden a las obtenidas del tratamiento estadístico adecuado, así que se preferirá sobre la primera aproximación.

*(a) Adición y substracción*: $z = x + y$; $z = x - y$

Usando promedios de errores se obtiene

$$\Delta z = |\Delta x| + |\Delta y| +$$

Usando desviaciones estándar

$$\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \cdots}$$

*(b) Multiplicación y división*: $z = xy$; $z = x/y$

Esta regla sirve para la multiplicación, la división o una combinación de ambas.
Usando promedios de errores

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \cdots$$

Usando desviaciones estándar

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \cdots}$$

*(c) Productos de potencias*: $z = x^m y^n$
Usando promedios de errores

$$\frac{\Delta z}{z} = |m|\frac{\Delta x}{x} + |n|\frac{\Delta y}{y} + \cdots$$

Usando desviaciones estándar

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(m\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(n\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \cdots}$$

***Ejemplo***

Calcule $z = w\,x + y^2$ si $w = (4.52 \pm 0.02)$ cm; $x = (2.0 \pm 0.2)$ cm, $y = (3.0 \pm 0.6)$ cm.

$z = wx + y^2 = 18.0\ \text{cm}^2$

Primero se calcula el producto $wx$ con su incertidumbre:

$wx = 9.0 \pm 0.9\ \text{cm}^2$

Se calcula ahora $y^2$:

$$\frac{\Delta(y^2)}{y^2} = 2\frac{\Delta y}{y} = 2\frac{0.6}{3.0} = 0.4\ \text{ cm}$$

$$\Delta(y^2) = 3.6\ \text{cm}^2$$

Se obtiene, finalmente,

$\Delta z = (0.9 + 3.6)$ cm = 4.5 cm

Se redondea este valor a 4.0 cm y el resultado final para $z$ es

$z = (18.0 \pm 4.0)$ cm

### *Sistemas de referencia*

Los sistemas coordenados proporcionan un sistema de referencia que permite la localización de puntos en el espacio. Existen varios tipos de sistemas coordenados, pero el más utilizado es el sistema cartesiano o rectangular.

Figura 7. Estación de referencia del sistema de posicionamiento global (DGPS).

Si se utiliza el sistema de coordenadas cartesiano, Figura 8; es decir, el sistema que utiliza pares de números dados como $P(x,y)$, para representar la posición de un punto en un plano, se puede graficar entonces la curva descrita por la función $y = f(x)$. Esto significa que si se conoce la dependencia de $y$ con respecto de $x$, se puede asignar a cada valor de $x$ uno de $y$ y obtener, con todos los puntos, el lugar geométrico de esa curva.

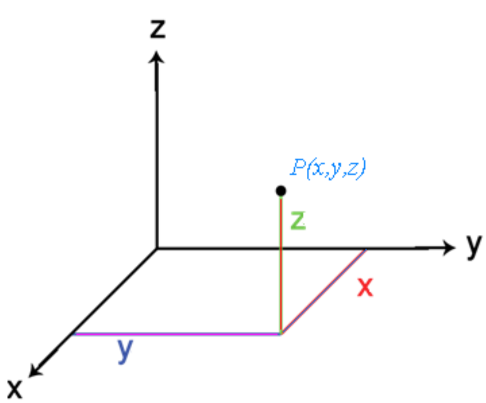


Figura 8. Sistema de coordenadas cartesiano tridimensional. Un punto en el espacio se representa como $P(x,y,z)$.

Hay que considerar que en la Física, las variables dependientes o independientes se representan por cualquier letra; por ejemplo, la velocidad como función del tiempo de un móvil se representa como $v(t)$; el rozamiento experimentado por un cuerpo, en función de su velocidad, se escribe como $F_f(v)$; el período de un péndulo, en función de la longitud de la cuerda, es $T(l)$; etc. En todos los casos, dentro del paréntesis se representa la variable que se considera independiente.

### *Gráficas*

Una forma práctica de observar, de manera general, el comportamiento de una cantidad física es a través de una gráfica. De este modo, es importante proporcionar toda la información necesaria para leer e interpretar correctamente la gráfica. Para comprender totalmente una gráfica de datos, ésta debe de tener la siguiente información:

- Un título
- Etiquetas para cada uno de los ejes.
- Las unidades de las cantidades físicas graficadas.
- Una marca correspondiente a cada punto experimental con barras de error.
- El análisis gráfico de la gráfica.
- Leyendas en el caso de que se grafique más de un grupo de datos.

La Tabla II muestra los datos obtenidos en un experimento donde un cuerpo se desplaza. Estos datos se grafican en la Figura 9, donde se muestran todos los elementos de una gráfica..

Tabla II. Datos obtenidos experimentalmente de la posición de un cuerpo con respecto al tiempo.

| Posición (m) | Tiempo (s) |
|---|---|
| 1.47 | 1.86 |
| 2.94 | 4.80 |
| 4.41 | 7.90 |
| 5.88 | 10.65 |
| 7.35 | 13.79 |
| 8.82 | 16.79 |
| 10.29 | 19.61 |
| 11.76 | 22.67 |
| 13.23 | 25.58 |
| 14.70 | 28.51 |

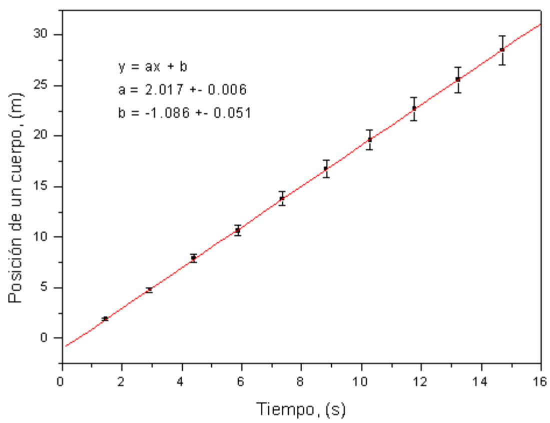


Figura 9. Presentación de una gráfica con todos sus elementos.

***Gráficas de funciones.***

El lugar geométrico de una función, $f(x)$, puede representarse en un plano coordenado. Se obtienen los valores de la variable dependiente, $y = f(x)$, simplemente sustituyendo los valores de la variable independiente, $x$, en la función. Este proceso puede llevarse a cabo mediante una tabulación, donde se le dan los valores a la variable $x$ dentro de un rango y se calculan los valores que toma la variable $y$.

Como ejemplo, suponga que se tiene la función $y = f(x) = 2/x$, y los valores que toma $x$ van desde 1 a 5. Primero, hay que elegir el incremento en $x$, dado por $\Delta x$, para calcular el par ordenado $(x,y)$.

Se escoge $\Delta x = 1$, de tal forma que $x = 1, 2, 3, 4, 5$. Debe tomarse en cuenta que esta elección no es única. Puede escogerse también $x = 1.0, 1.2, 1.4, .... 4.6, 4.8, 5.0$ ($\Delta x = 0.2$); o cualquier otra serie de números entre 1 y 5. Se construye, entonces, la tabulación de la siguiente manera.

Paso 1. Con $y = f(x) = 2/x$, se calcula los valores que toma la variable independiente de acuerdo a los valores elegidos de $x$.

$y = f(1) = 2/1 = 2$

$y = f(2) = 2/2 = 1$

$y = f(3) = 2/3 = 0.66$

$y = f(4) = 2/4 = 0.50$

$y = f(5) = 2/5 = 0.40$

Paso 2. Con los valores de $x$ y $y$, se construye ahora la tabulación, Tabla III.

Tabla III. $y = 2/x$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |
| 3 | 0.66 |
| 4 | 0.50 |
| 5 | 0.40 |

Entonces, los puntos del plano que describen el lugar geométrico de la función $f(x) = 2/x$, para esta tabulación, vienen dados por (1,2), (2,1), (3,0.66), (4,0.50), (5,0.40).

El siguiente paso es encontrar el lugar geométrico de la curva en el plano cartesiano.

Una curva es el lugar geométrico de los pares ordenados $(x,y)$ definidos por la función $y = f(x)$.

La gráfica de la función viene dada en las figuras 10 y 11. Obsérvese que la escala usada en cada uno de los ejes es diferente.

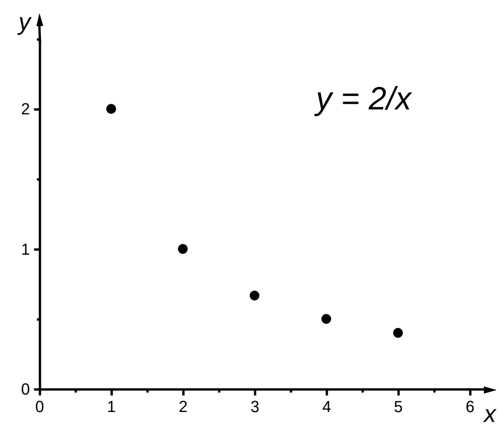


Figura 10. Gráfica de la función $y = f(x) = 2/x$ con $\Delta x = 1$.

Como puede observarse en la Figura 11, la gráfica de la función se define mejor a medida que se toman incrementos de $x$ más pequeños, lo que requiere tabulaciones muy grandes. En la práctica, se toman unos pocos valores de $x$, y después los puntos se unen de manera aproximada, tal y como se indica en la misma figura.

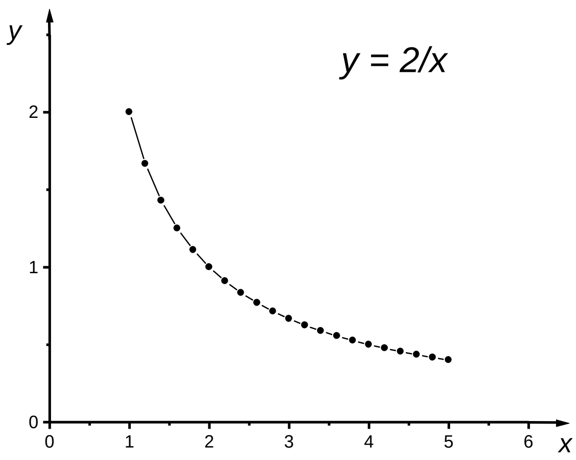


Figura 11. Gráfica de la función $y = f(x) = 2/x$. El incremento es $\Delta x = 0.2$. Las líneas que unen los puntos indican valores aproximados de la función.

**Pendiente de una recta**

Dos puntos definen una recta en un plano; es decir, por dos puntos cualesquiera en el plano cartesiano sólo puede pasar una recta. La pendiente, *m*, de una recta que pasa por los puntos P$(x_1,y_1)$ y Q$(x_2,y_2)$, se define por la razón

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

No existe ninguna restricción para los valores que puede tomar la pendiente de una recta. La Figura 12 muestra la interpretación geométrica de la pendiente.

Si una recta es paralela al eje *X*, su pendiente vale cero, pues $x_1 = x_2$. Si es paralela al eje *Y*, su pendiente está indefinida, vale infinito ($\infty$), $y_1 = y_2$. También puede tomar valores positivos y negativos.

La figura 13 muestra las rectas representativas de los cuatro casos mencionados.

Las cantidades físicas que se definen como la razón de dos cantidades, tienen la misma interpretación que la pendiente de una recta. Por ejemplo, la velocidad promedio, $v = {}^{\Delta r}/_{\Delta t}$, corresponde a la pendiente de una recta, donde la variable dependiente es la velocidad y el tiempo es la variable independiente.

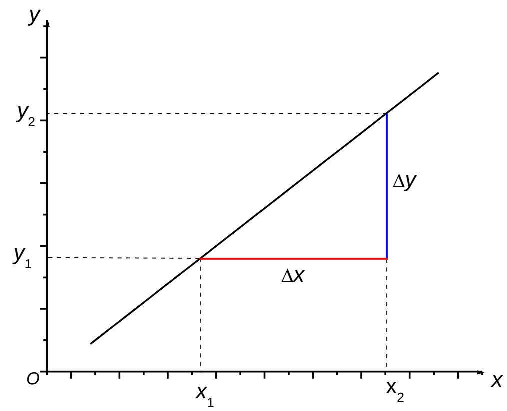


Figura 12. Significado geométrico de la pendiente. La razón $\Delta y/\Delta x$ define la pendiente de una recta.

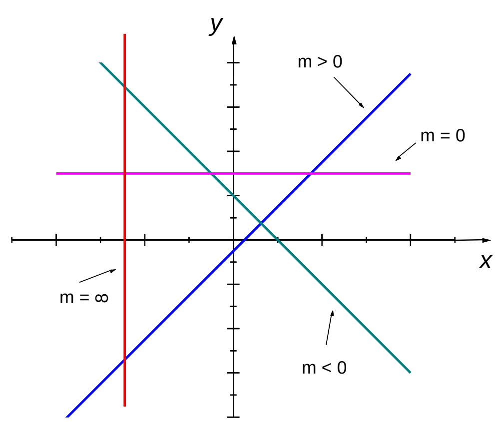


Figura 13. Representación de rectas con diferentes valores de la pendiente, *m*.

***Proporcionalidad.***

Algunas leyes de la física se representan mediante funciones que tienen la forma general

$$y = ax^n$$

donde *a* y *n* son constantes reales. Cuando se tiene una función de este tipo, se dice que *y* es proporcional a $x^n$ (*x* elevada a la enésima potencia). La manera de representar la proporcionalidad es

$$y \propto x^n$$

La constante *a* recibe el nombre de constante de proporcionalidad. Esto no significa otra cosa más que la razón entre *y* y $x^n$ es una constante; es decir,

$$\frac{y}{x^n} = a$$

En el caso especial en el que *n* = 1, se dice que *y* es directamente proporcional a *x*; es decir, la relación es lineal. Si *n* = -1, entonces *y* es inversamente proporcional a *x*; o sea, si aumentan los valores de *x*, disminuyen los valores que se obtienen para *y*, pues la razón entre ellas se debe de mantener constante.

Es necesario hacer hincapié que la relación entre las variables es siempre la misma aún cuando las letras que se usen para representarlas cambien. Así, también se puede tener $s = br^n$; *s* es la variable dependiente y *r* la independiente; *b* y *n* son constantes.

Algunos ejemplos de leyes físicas que tienen esta forma, tomando sólo la magnitud en las expresiones vectoriales, son:

Ley de Coulomb
$F(r) = (kq_1q_2)/r^2$; con $a = (kq_1q_2)$ y $n = -2$.

Segunda ley de Newton
$F(a) = ma$; con $a = m$ y $n = 1$.

Ley de Galileo
$h(t) = ½gt^2$; con $a = ½$ g y $n = 2$.

Ley de Boyle-Mariotte
$V(P) = k/P$; con $a = k$ y $n = -1$.

Existe también este tipo de dependencia entre algunas cantidades físicas derivadas de las leyes físicas. Por ejemplo, la manera cómo depende el período de un péndulo en función de la longitud es

$$T(l) = 2\pi(l/g)^{½}$$

Para diferentes valores de *l*, se tiene que

$a = 2\pi/g^{½}$ y $n = ½$.

La velocidad, *v*, que adquiere un cuerpo cuando cae desde una altura determinada, *h*, despreciando la resistencia del aire, está dada por

$$v(h) = (2gh)^{½}$$

Para diferentes alturas, la constante es $a = (2g)^{½}$ y $n = ½$.

### *Gráficas de funciones.*

Cuando se desarrolla un experimento, se procura que se realice bajo las mejores condiciones con el con el fin de tener un control preciso sobre las cantidades físicas que se quieren medir. Por ejemplo, para medir la dependencia de la velocidad de caída de un cuerpo en función de su altura, es necesario evitar que exista el rozamiento producido por el aire. Si, en cambio, se quiere determinar el calor específico de una sustancia, es necesario usar un calorímetro para evitar la influencia de fuentes o sumideros externos de calor.

Como ya se mencionó, la descripción matemática de la mayoría de las leyes de la física corresponde a cantidades proporcionales entre sí. Por ejemplo, si se hace el experimento de la caída libre, y se mide la velocidad del cuerpo en función de la altura, se obtiene la serie de datos de la Tabla IV.

Tabla IV. Experimento de caída libre.

| *h* (m) | *v* (m/s) |
|---|---|
| 2.0 | 6.35 |
| 3.0 | 7.50 |
| 4.0 | 8.94 |
| 5.0 | 9.93 |
| 6.0 | 10.89 |
| 7.0 | 11.67 |
| 8.0 | 12.61 |

Pero una gráfica dice más que mil datos, así que si se grafican los datos, obtenidos en el experimento, en un sistema coordenado cartesiano, donde el eje horizontal representa la altura y el vertical la velocidad, se obtiene la siguiente gráfica, Figura 14.

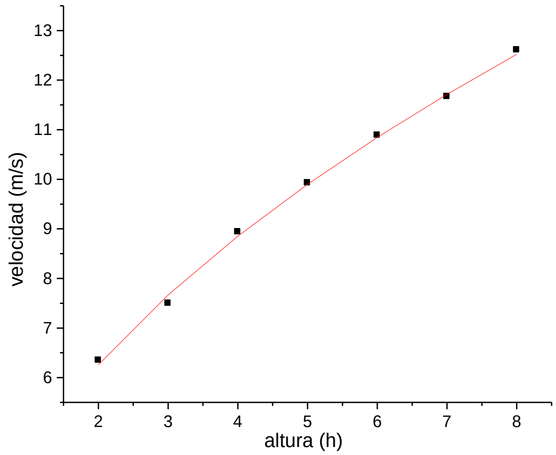


Figura 14. Gráfica de los datos experimentales de caída libre. La línea indica la función dada por $v = (2gh)^{½}$.

Los puntos indican los valores obtenidos experimentalmente, mientras que la línea es la gráfica de la función dada por $v = (2gh)^{½}$. En este caso se ve que la constante *a* tiene un valor cercano a 4.427 y $n$ = ½. La determinación de la constante *a* es, en la mayoría de las veces, una de las tareas principales cuando se realiza un experimento.

Algunas leyes de la física siguen una dependencia funcional donde *n* toma los siguientes valores: 1, -1, 2, -2, ½ y -½.

La Figura 15 muestra la forma de las gráficas correspondientes a los diferentes valores de *n*. El valor de la constante *a* se obtiene cuando $x = 1$, puesto que 1 elevado a cualquier potencia es siempre 1.

Cuando $n = 1$, la curva es una recta, $y = ax$, que pasa por el origen y tiene una pendiente $m = a$.
Si $n$ = -½, -1 ó -2 , la curva es una hipérbola: $y = a/x^{½}$, $y = a/x$ y $y = a/x^2$.

La curva es una parábola si $n = 2$ o $n$ = ½; y $y = ax^2$ y $y = ax^{½}$ respectivamente.

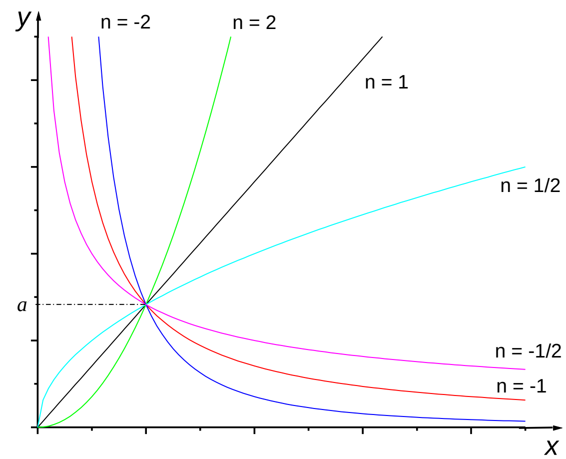


Figura 15. Gráfica de la función $y = ax^n$ para $n$ = 1, -1, 2, -2, ½ y -½

En general, se puede describir la forma que tiene la gráfica de la función $y(x)$ de acuerdo a los valores que toma *n*. La Figura 16 indica la forma de la curva para cada rango de valores de *n*.

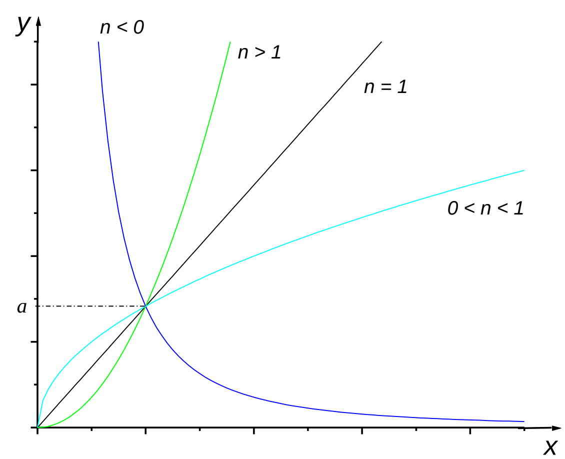


Figura 16. Grafica de la función $y = ax^n$ con los diferentes rangos de valores que puede tomar *n*.

### *Gráficas de datos experimentales*

Cuando se realiza un experimento, para encontrar la dependencia de una variable con respecto a otra, usualmente se tabula las cantidades físicas como se hizo en la Tabla III. Siempre es posible obtener, de manera aproximada, la forma en que depende una variable de otra si se grafican los puntos del experimento. Inclusive, se puede decir dentro de qué rango de valores se encuentra *n*, siempre que la ley física, o la relación entre las variables, sea como la descrita anteriormente. Sin embargo, para describir exactamente la dependencia entre las variables, es necesario encontrar el valor de *n* y de la constante *a*. Una vez conocidos estos valores, es posible predecir qué valores toman las variables no medidas experimentalmente; es decir, hacer predicciones, que es uno de los objetivos de los experimentos.

Por ejemplo, en el experimento de la caída libre, Tabla III, una vez conocido el valor de *n* y de *a*, es posible saber exactamente cuál sería la velocidad del cuerpo si cae de una altura de 8.5 m (interpolar) o desde 15 m (extrapolar), aún cuando la velocidad adquirida por el cuerpo, cuando cae desde estas alturas, no haya sido medida.

¿Cuál es el método adecuado para calcular *n* y *a*? Para responder a esta pregunta se procederá de la siguiente manera.

Se tienen los valores de unas cantidades físicas mostradas en la Tabla V. Este es un experimento para determinar la ley de Ohm. Se encuentra el valor de la resistencia, *R*, en función de la corriente, *I*, cuando se aplica un voltaje constante en las terminales de un resistor.

Tabla V. Experimento de la ley de Ohm.

| $I$ (A) | $R$ (Ω) |
|---|---|
| 0.10 | 48.11 |
| 0.20 | 27.24 |
| 0.30 | 18.97 |
| 0.40 | 12.39 |
| 0.50 | 9.81 |
| 0.60 | 8.33 |
| 0.70 | 7.22 |

El siguiente paso es graficar esos puntos en un sistema de coordenadas donde las cantidades físicas del experimento, dadas como variable *I* y *R* vienen representados por los ejes cartesianos. Se escoge la variable independiente como *R* y la dependiente como *I*. La gráfica de los puntos, unidos por medio de una línea arbitraria queda como se indica en la Figura 11.

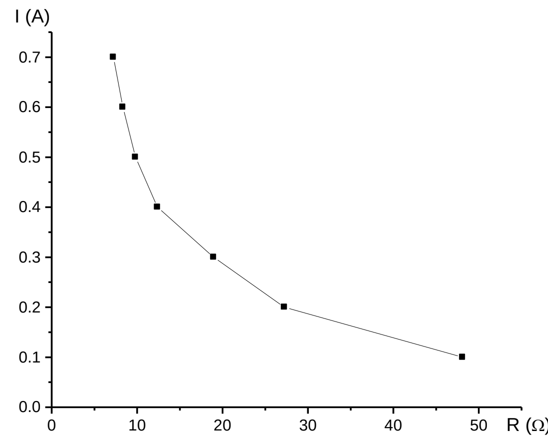


Figura 11. Gráfica de la corriente (*I*) contra la resistencia (*R*) en un experimento para determinar la ley de Ohm.

Comparando la gráfica de la figura 11, con las gráficas de la figura 10, se puede observar que los valores que tomaría *n* son menores que cero; es decir, $n < 0$. Los valores posibles de *n* serían, entonces, $n = -½$, -1, y -2. Esto significa que las funciones que describirían la dependencia entre *R* e *I* serían $I = aR^{-½}$, $I = aR^{-1}$ o $I = aR^{-2}$. Hasta ahora, sólo se conoce los valores que puede tomar *n*, pero aún no se sabe cuál de los tres es el que describe la función. También faltaría conocer el valor de la constante *a*.

Se comienza eligiendo el primer valor de *n* (-½) suponiendo, así, que la función $I(R) = aR^{-½}$, que se puede escribir como

$$IR^{½} = a$$

La Tabla VI muestra los valores obtenidos con el producto $IR^{½}$ de los valores de *I* y de *R* del experimento.

Tabla VI. Valores del producto $IR^{½}$.

| $IR^{-½}$ |
|---|
| 0.6936 |
| 1.0438 |
| 1.3036 |
| 1.4079 |
| 1.5660 |
| 1.7317 |
| 1.8809 |

Los valores que se obtienen del producto son todos muy diferentes entre sí. Hasta ahora no se puede concluir nada más sobre los valores de $a$ y $n$. De los tres valores posibles de $n$, se toma el siguiente y se procede de la misma manera; es decir, se toma ahora $n = -1$ y se tabula el producto $IR = a$, Tabla VII.

Tabla VII. Valores obtenidos del producto *IR*.

| *IR* |
|---|
| 4.811 |
| 5.448 |
| 5.691 |
| 4.956 |
| 4.905 |
| 4.998 |
| 5.054 |

Hay que tener presente, que en cada caso, el producto no es otra cosa, mas que el valor de la constante $a$, de tal manera, que debe tener el mismo valor para el producto de las variables. Si se comparan las Tablas VI y VII se observa que, en el primer caso, el producto; o sea, la constante, toma diferentes valores, mientras que en el segundo caso, los valores que se obtienen son muy cercanos entre sí. Además, no se observa una tendencia del producto a disminuir o a aumentar, como en el caso en el que $n = -½$, Tabla VI. Así, se puede concluir que el valor de $n$ que describe la dependencia de $R$, como función de $I$, es $n = -1$.

Para convencerse de esto, se puede tabular el producto $IR^2$ ($n = -2$), Tabla VIII. El producto tiende a disminuir, así que se descarta $n = 2$.

Tabla VIII. Valores obtenidos del producto $IR^2$.

| $IR^2$ |
|---|
| 231.45 |
| 148.40 |
| 107.95 |
| 61.40 |
| 48.11 |
| 41.63 |
| 36.48 |

El valor de la constante $a$ puede escogerse de entre cualesquiera de los de la Tabla VII; sin embargo, para obtener el valor más exacto, se promedian estos valores para obtener $a = 5.123$. No hay que olvidar las unidades, así que lo correcto sería escribir $a = 5.123$ (AΩ).

Finalmente, se obtiene la función que describe $I$ en función de $R$:

$$I = 5.123\ R^{-1}$$

La gráfica de esta función y los puntos obtenidos experimentalmente se muestra en la figura 12. En este ejemplo, el objetivo es sólo mostrar cómo se calcula $a$ y $n$ y la gráfica no muestra barras de error.

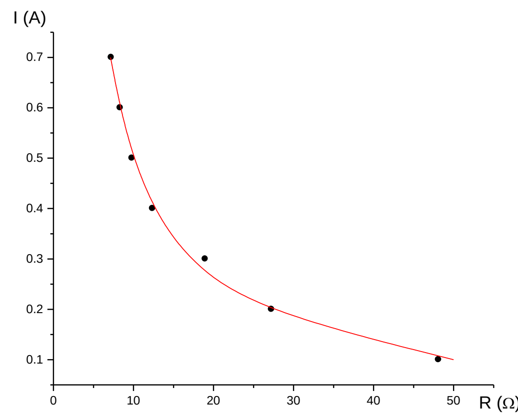


Figura 12. Puntos experimentales de la ley de Ohm y gráfica de la función $I = 5.123R^{-1}$.

Es importante mencionar que las cantidades físicas obtenidas por medio de un experimento no siguen exactamente la dependencia funcional de la ley que las describe. Así, se ve que los puntos del experimento no caen exactamente sobre la línea de la función, como se vio en la gráfica de la figura 8.

**Ejercicios**

1. Un tiempo se mide primero cinco veces y después otras cinco veces sin error sistemático. La Tabla IX muestra los valores obtenidos.

Tabla IX

| $i$ | $V_i$ (mV) |
|---|---|
| 1 | 56.3 |
| 2 | 56.1 |
| 3 | 56.0 |
| 4 | 56.5 |
| 5 | 55.9 |
| 6 | 56.4 |
| 7 | 56.1 |
| 8 | 56.2 |
| 9 | 55.8 |
| 10 | 56.3 |

¿Cuál es el resultado de la medición si se utilizan sólo los primeros cinco valores, si se utilizan los diez valores?.

2. Se mide diez veces la diferencia de voltaje a través de una resistencia. Los resultados que se obtienen se expresan en la Tabla X.

Tabla X

| $i$ | $V_i$ (mV) |
|---|---|
| 1 | 123.5 |
| 2 | 125.3 |
| 3 | 124.1 |
| 4 | 123.9 |
| 5 | 123.7 |
| 6 | 124.2 |
| 7 | 123.2 |
| 8 | 123.7 |
| 9 | 124.0 |
| 10 | 123.2 |

Encuentre el valor medio del voltaje, la incertidumbre y la incertidumbre sobre el valor medio. Redondee todos sus resultados.

3. Dados $w = (4.52 \pm 0.02)$ kg, $x = (2.0 \pm 0.2)$ kg. Encuentre $v = wx$ y $r = x/w$ y su incertidumbre.

4. Suponga que $w = (4.52 \pm 0.02)$ cm, $A = (2.0 \pm 0.2)$ cm$^2$, $y = (3.0 \pm 0.6)$ cm. Encuentre $z = \dfrac{wy^2}{\sqrt{A}}$.

5. Calcule $z$ y $\Delta z$ para cada uno de los siguientes casos:
(i) $z = (x - 2.5\,y + w)$ con $x = (4.72 \pm 0.12)$ m, $y = (4.4 \pm 0.2)$ m, $w = (15.63 \pm 0.16)$ m.
(ii) $z = (wx/y)$ con $w = (14.42 \pm 0.03)$ m/s$^2$, $x = (3.61 \pm 0.18)$ m, $y = (650 \pm 20)$ m/s.
(iii) $z = yx^3$ con $x = (3.55 \pm 0.15)$ m, $y = (5.00 \pm 0.12)$ m
(iv) $z = v(xy + w)$ con $v = (0.644 \pm 0.004)$ m, $x = (3.42 \pm 0.06)$ m, $y = (5.00 \pm 0.12)$ m, $w = (12.13 \pm 0.08)$ m$^2$.
(v) $z = A\sin y$ con $A = (1.602 \pm 0.007)$ m/s, $y = (0.774 \pm 0.003)$ rad.

6. Encuentre el promedio y la desviación estándar de las siguientes cinco mediciones dadas en centímetros: (12.2, 12.5, 11.9, 12.3, 12.2)

7. En una competencia, se miden los valores de la distancia (en metros) recorrida por un corredor, en función del tiempo transcurrido (en segundos). Los datos se registran en la Tabla XI.

Tabla XI

| ***t*** (s) | ***d*** (m) |
|---|---|
| 2 | 13.9 |
| 4 | 27.1 |
| 7 | 52.5 |
| 13 | 89.8 |
| 56 | 385 |
| 102 | 714 |
| 185 | 1285 |

Encuentre cómo depende la distancia del tiempo transcurrido. ¿Qué cantidad física representa la constante $a$ y cuáles son sus unidades?

8. En el ejemplo de la ley de Ohm suponga que la variable dependiente es $R$ y la independiente es $I$. Realice todo el análisis para encontrar $a$ y $n$. Tome los mismos puntos de la Tabla 3. ¿Qué puede concluir de este ejercicio?.

9. Suponga que en un experimento se encuentra que fuerza entre dos cargas depende de la

distancia entre ellas, como se muestra en la Tabla XII.

Tabla XII

| ***r*** (m) | ***F*** (N) |
|---|---|
| 0.010 | 0.891 |
| 0.015 | 0.400 |
| 0.020 | 0.225 |
| 0.050 | 0.037 |
| 0.070 | 0.018 |
| 0.090 | 0.012 |
| 0.120 | $6.25\times10^{-3}$ |
| 0.160 | $3.49\times10^{-3}$ |

10. Suponga que $F$ es la variable independiente y $r$ la dependiente. Encuentre el valor de $a$ y $n$. (b) Suponga ahora que $r$ es la variable independiente y $F$ la dependiente y encuentre $a$ y $n$. ¿Existe alguna diferencia en los resultados? Explique detalladamente sus conclusiones.

11. Repita el procedimiento para encontrar $a$, con $n$ = -2, del experimento mencionado en el texto sobre la ley de Ohm, y concluya si es posible que $I$ dependa de $R$ de acuerdo a estos valores. Explique porqué.

12. Escriba cómo se representa la dependencia de la velocidad de caída libre de un cuerpo en función del tiempo y en función de la distancia recorrida.

13. Escriba cómo se representa la dependencia de la velocidad de caída libre de un cuerpo en función del tiempo y en función de la distancia recorrida.

14. Use un programa para graficar (*Origin*, *Excel*, etc.) y grafique la función $Z(r) = 3sen(r)$. ¿Cuál es, en este caso, la variable dependiente y la independiente? Tome valores de $r$, desde $-2\pi$ a $3\pi$, en pasos de $\pi$. Trate de identificar el lugar geométrico de la función. Posteriormente, tome el incremento como $\pi/4$ y trate de identificar la función. ¿Observa alguna diferencia entre el primer caso y el segundo? ¿Qué puede concluir de este ejemplo?

**Bibliografía**

Measurement Errors and Uncertainties. Theory and Practice. Rabinovich, Semyon G. Springer Verlag. Nueva York. 2005

The Uncertainty in Physical Measurements. An Introduction to Data Analysis in the Physics Laboratory. Paolo Fornasini. Springer-Verlag. Nueva York. 2008.

Física Experimental dDdáctica. César Rodríguez Valencia, Jacob Rodríguez Valencia. Ed. Panamá. 2009.