

La versión anterior de este documento, por error, contenía una transcripción literal y no autorizada de las notas “Análisis de Fourier” escritas por el Prof. Dr. José Luis Andrés Yebra, de la Universitat Politècnica de Catalunya. El autor ofrece públicamente sus disculpas por este hecho y en particular al Prof. Yebra. La presente nota debe incluirse en toda versión impresa o electrónica del documento.

---

Análisis de Fourier

José Antonio Vallejo

---

FACULTAD DE CIENCIAS UASLP

RESUMEN: Notas de apoyo para las asignaturas *Análisis de Fourier* y *Ecuaciones en derivadas parciales* en la Facultad de Ciencias de la UASLP. Se repasan los conceptos de análisis matemático más relevantes para el curso y se ilustra la teoría con numerosos ejemplos.

# Contenidos

<b>Prefacio</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción al análisis de Fourier</b>	<b>1</b>
1.1. Breve reseña histórica . . . . .	1
1.2. Aplicaciones en la tecnología . . . . .	4
<b>2. Sucesiones y series numéricas</b>	<b>9</b>
2.1. Sucesiones . . . . .	9
2.2. Límite de una sucesión . . . . .	10
2.3. Series numéricas . . . . .	12
2.4. Series de términos positivos . . . . .	14
2.5. Series alternadas . . . . .	17
2.6. Ejercicios . . . . .	18
<b>3. Series funcionales. Convergencia uniforme</b>	<b>21</b>
3.1. Convergencia uniforme de sucesiones de funciones . . . . .	21
3.2. Convergencia uniforme de series de funciones . . . . .	25
3.3. El criterio M de Weierstrass . . . . .	26
3.4. Ejercicios . . . . .	27
<b>4. Series de Fourier</b>	<b>29</b>
4.1. Coeficientes de Fourier . . . . .	29
4.2. Periodos arbitrarios . . . . .	31
4.3. Paridad y desarrollo en semiintervalos . . . . .	32
4.4. Series de Fourier complejas . . . . .	35
4.5. Ejercicios . . . . .	37
<b>5. Convergencia de la serie de Fourier</b>	<b>41</b>
5.1. Convergencia puntual. Núcleo de Dirichlet . . . . .	41
5.2. Convergencia en media cuadrática. Espacios de Hilbert . . . . .	46
5.3. Desigualdad de Bessel. Igualdad de Parseval . . . . .	51
5.4. Convergencia uniforme. Fenómeno de Gibbs . . . . .	52
5.5. Ejercicios . . . . .	55

<b>6. Ecuaciones en derivadas parciales sobre dominios acotados</b>	<b>59</b>
6.1. La ecuación del calor . . . . .	59
6.2. La ecuación de ondas . . . . .	62
6.3. La ecuación de Laplace en un rectángulo . . . . .	65
6.4. Problema de Dirichlet en el disco. El núcleo de Poisson . . . . .	68
6.5. Separación de variables en problemas con fuentes y no homogéneos . . . . .	71
6.6. Problemas correctamente planteados . . . . .	74
6.7. Ejercicios . . . . .	75
<b>7. Teoremas de existencia, unicidad y estabilidad</b>	<b>81</b>
7.1. Existencia de solución a la ecuación del calor . . . . .	81
7.2. Existencia de solución a la ecuación de ondas . . . . .	84
7.2.1. El método de Fourier . . . . .	84
7.2.2. El método de D'Alembert . . . . .	86
7.3. Principios del máximo y del mínimo para la ecuación del calor . . . . .	88
7.4. La integral de energía en la ecuación de ondas . . . . .	90
7.5. Ejercicios . . . . .	92
<b>8. La transformada de Fourier</b>	<b>95</b>
8.1. Motivación y definición . . . . .	95
8.2. Propiedades de la transformada de Fourier . . . . .	100
8.3. El producto de convolución . . . . .	102
8.4. Ejercicios . . . . .	104
<b>9. Ecuaciones en derivadas parciales sobre dominios no acotados</b>	<b>107</b>
9.1. Transformadas parciales . . . . .	107
9.2. El problema de Cauchy para la ecuación del calor . . . . .	109
9.3. Características. Dominios de dependencia . . . . .	110
9.4. El problema de Laplace en un semiplano . . . . .	110
9.5. El problema de Cauchy con fuentes: Principio de Duhamel . . . . .	111
9.6. Ejercicios . . . . .	112
<b>Lecturas recomendadas</b>	<b>113</b>

# Prefacio

Estas notas tienen su origen en varios cursos impartidos en la Facultad de Ciencias de la UASLP. Los alumnos típicamente constituían un grupo mixto de matemáticos, físicos, ingenieros físicos y electrónicos, y la intención de los cursos era la de introducirlos en las herramientas básicas del análisis de Fourier centrándose en las aplicaciones a la teoría de la señal y las ecuaciones en derivadas parciales más habituales en la física matemática, pero tratando de que el rigor fuera aceptable para los estudiantes de matemáticas.

Naturalmente, conseguir este tipo de objetivos es francamente difícil, cuando no imposible. Además, el tema es tan clásico que deja poco lugar a la originalidad, así que el material que aquí se presenta debe verse sólo como un apoyo, que cubre solo parte de un campo tan extenso y deja fuera muchos temas que pueden ser de interés para un futuro científico. Es imprescindible, pues, consultar los textos recomendados en la bibliografía, que son los que se han usado como fuentes principales de estas notas.

El material se ha ido reelaborando y corrigiendo desde el primer momento, tratando de que sirviera como una introducción al tema para estudiantes de ciencias en general. Tiene un carácter elemental en el sentido de que incluye las versiones más fáciles de los resultados teóricos (básicamente se trabaja en el contexto de las funciones continuas y diferenciables por secciones), que están al alcance del nivel de matemáticas de, digamos, un físico.



# 1

## Introducción al análisis de Fourier

En este primer capítulo, tras un breve repaso del desarrollo histórico, damos una descripción intuitiva de las principales ideas y técnicas empleadas en el análisis de Fourier, utilizando como ejemplo las transmisiones de radio. Los capítulos siguientes profundizarán en la justificación matemática de estas ideas, así como en los métodos de cálculo.

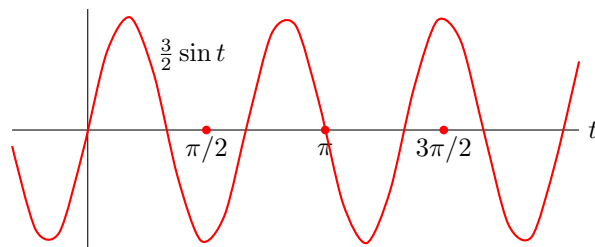
### 1.1. Breve reseña histórica

Lo que se conoce como Análisis de Fourier es un conjunto de técnicas destinadas a obtener la representación de una función  $f(t)$  (real o compleja) en forma de una serie del tipo

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt). \quad (1.1)$$

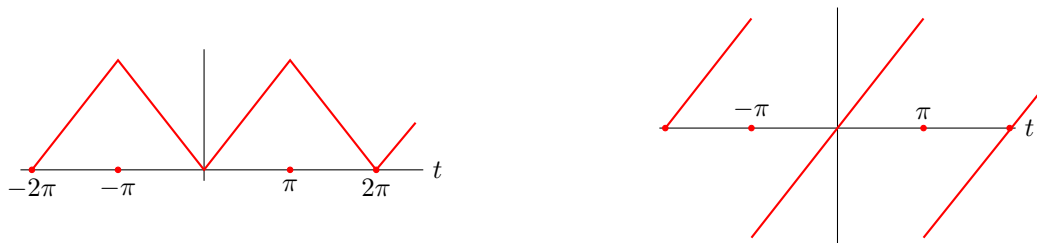
Una serie como la anterior se denomina *serie trigonométrica*, por la presencia en ella de las funciones seno y coseno. La primera pregunta que surge de manera natural es ¿por qué necesitamos obtener tal representación?. En los cursos de cálculo se estudia el desarrollo de Taylor de una función, que está dado por monomios  $t^n$  y es más simple que (1.1). Pareciera que no hay motivo para complicar las cosas introduciendo las funciones  $\cos nt, \sin nt$ .

La respuesta es que no siempre es posible hacer el desarrollo de Taylor de una función y que, aún cuando es posible, las características de la misma hacen deseable uno de la forma ((1.1)). En teoría de circuitos eléctricos, por ejemplo, no es extraño encontrar señales de corriente periódicas con la forma:





(la corriente doméstica es de este tipo, con una frecuencia de 50Hz o 60Hz dependiendo del país), pero también hay señales como estas otras:

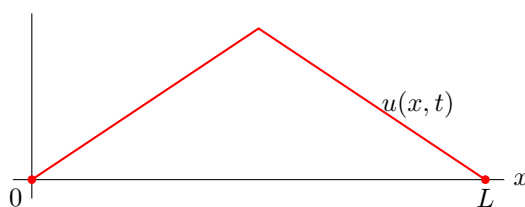


Resulta claro que las características de la primera señal son tales que una descripción suya en términos de senos y cosenos sería más apropiada, en tanto que las dos últimas funciones no son diferenciables; si  $f(t)$  describe cualquiera de estas señales, no es posible hablar de  $f'(t_0)$ ,  $f''(t_0)$ , ... en muchos puntos  $t_0$ , de modo que ni siquiera tiene sentido plantear el desarrollo de Taylor habitual, dado por

$$f(t) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} f^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k + R_p(t_0).$$

Aún hay otros motivos para considerar desarrollos como (1.1) y estos provienen del campo de la Física. Históricamente, el interés por tales expresiones apareció con el estudio de lo que se llamó la *cuerda vibrante* (por ejemplo, el movimiento de una cuerda de violín al ser pulsada). Claramente, las características del sonido emitido por un instrumento de cuerda depende de manera crucial de cómo oscile ésta (aparte de otros factores también importantes, como el material de la propia cuerda o la madera del violín<sup>1</sup>) y por eso en el siglo XVIII se estudió de manera especial este sistema por parte de grandes matemáticos como Euler, los hermanos Bernoulli, D'Alembert y otros.

De hecho, para el problema de determinar el movimiento (las oscilaciones) de una cuerda elástica de longitud en reposo  $L$ , que se pulsa según se esquematiza en la figura, Daniel Bernoulli propuso una solución del tipo (1.1), lo que produjo una gran controversia (tuvo por oponente a Euler), pues en aquella época no se tenía muy claro que una expresión semejante a (1.1) pudiera tener el mismo significado como función que, por ejemplo,  $g(t) = e^{t^2+1}$ , donde para un  $t$  dado está claramente definido el valor de  $g(t)^2$ .



El caso es que si la cuerda se somete a una tensión uniforme  $T$  y su masa es  $m$ , introduciendo la constante  $a^2 = T/m$  se puede probar que la ecuación que determina las oscilaciones  $u(x, t)$  (en función de la posición del punto sobre la cuerda y el tiempo) es :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.2}$$

Esta ecuación, llamada la *ecuación de ondas*, admite soluciones de la forma “separada” en  $x$  y  $t$ ,

<sup>1</sup>Un caso extremo es el de los conocidos *stradivari*, violines con un sonido excepcional que se han tratado de imitar por mucho tiempo pero de los que sigue sin conocerse el motivo de sus extraordinarias cualidades. La teoría con mayor aceptación supone que la madera original con que se fabricaron sufrió un tratamiento con sales metálicas.

<sup>2</sup>No fue hasta un siglo más tarde, a mediados del XIX, que Weierstrass dió una definición más clara del concepto de convergencia de una serie funcional como (1.1). Su definición es exactamente la que usamos hoy en día.

$$u(x, t) = X_n(x)T_n(t),$$

donde, para cada número natural  $n$ ,

$$X_n(x) = A \sin(\lambda_n x) + B \cos(\lambda_n x), \quad (1.3)$$

$$T_n(t) = C \sin(\lambda_n t) + D \cos(\lambda_n t), \quad (1.4)$$

siendo  $\lambda_n$  un parámetro que depende de  $n$  y  $A, B, C, D$  unas “constantes de integración” que dependen de las condiciones iniciales del problema (básicamente de la forma que adopta la cuerda cuando  $t = 0$ ). Nótese que se tiene una familia infinita de soluciones: hay una para cada valor de  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Ahora, por la propiedad de linealidad de las derivadas parciales (la derivada de la suma es la suma de las derivadas, etc.) es claro que si tenemos un conjunto *finito* de soluciones del tipo  $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ , digamos  $u_1(x, t), \dots, u_k(x, t)$ , entonces también seguirá siendo una solución toda combinación lineal

$$\alpha_1 u_1(x, t) + \dots + \alpha_k u_k(x, t) = \sum_{n=1}^k \alpha_n u_n(x, t).$$

La audacia de Bernoulli (lo que le enfrentó a Euler) consistió en pensar que también una combinación lineal de *todas* las (infinitas) soluciones  $u_n(x, t)$  debía ser una solución. En este caso tendríamos una solución

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n X_n(x)T_n(t),$$

que, desarrollando los productos en cada  $X_n(x)T_n(t)$  y utilizando identidades trigonométricas, resulta ser una expresión del tipo (1.1). Más tarde, ya en el siglo XIX, Joseph Fourier llegó a soluciones con las mismas características estudiando el problema de cómo se conduce el calor a través de una barra y a partir de ese momento comenzó a formarse el estudio riguroso de tales expresiones<sup>3</sup>, lo que hoy llamamos análisis de Fourier.

Vamos ahora a estudiar un poco de terminología asociada a este problema. Para ello, volvamos a las soluciones fundamentales  $u_n(x, t)$  y especifiquemos unas *condiciones de frontera*: esto quiere decir que el comportamiento de los extremos de la cuerda estará determinado para todo tiempo; en concreto, supondremos que los extremos permanecen fijos,

$$u_n(0, t) = 0 = u_n(L, t), \forall t \geq 0.$$

Sustituyendo  $u_n(0, t) = 0$  en (1.3) y (1.4), esto conduce a

$$BT_n(t) = 0, \forall t \geq 0.$$

Haciendo la suposición razonable de que la forma de la cuerda varía con el tiempo (es decir, que  $T_n(z) \neq 0$ ), esto implica que  $B = 0$ . Análogamente de  $u_n(L, T) = 0$  obtenemos:

$$A \sin(\lambda_n L)T_n(t) = 0, \forall t \geq 0.$$

De nuevo, si  $T_n(t) \neq 0$  hay dos opciones: que sea  $A = 0$  o que sea  $\sin(\lambda_n L) = 0$ . En el primer caso, con  $A = 0$  y  $B = 0$  nos quedaría que  $X(x) = A \sin(\lambda_n x) + B \cos(\lambda_n x) = 0$  y las soluciones  $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$  serían todas nulas, lo cual es físicamente inaceptable. Pero para que sea  $\sin(\lambda_n L) = 0$  debe ocurrir que el argumento de la función seno sea un múltiplo de  $\pi$ ,  $\lambda_n L = n\pi$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . De aquí:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}.$$

---

<sup>3</sup>La Academia de Ciencias francesa convocó dos concursos en los que se premiaría a la obra que mejor tratase el tema del calor. Fourier ganó uno de ellos, pero sus resultados no se publicaron en aquel momento por considerarse poco rigurosos. El mismo Fourier los publicó más tarde, cuando llegó a ser secretario perpetuo de la propia Academia.

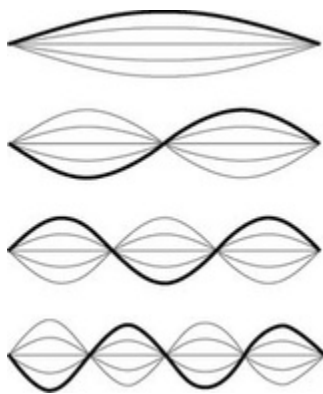
Un análisis similar, considerando condiciones sobre las derivadas parciales de  $u_n(x, t)$ , conduce a la determinación de los coeficientes de  $T_n(t)$ . En definitiva, lo que proponía D. Bernoulli es que la solución más general al problema de la cuerda vibrante con extremos fijos es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left( C_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + D_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \right). \quad (1.5)$$

Esta solución (1.5) es superposición de infinitas soluciones elementales

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left( C_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + D_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \right), \quad (1.6)$$

cada una de las cuales se denomina *modo elemental* ( $n$ -ésimo) de vibración. A veces, se denomina *modo fundamental* a la solución correspondiente a  $n=1$  y *modos armónicos* a las restantes soluciones con  $n > 1$ . Los modos elementales se denominan también *ondas estacionarias*, debido a que el factor  $\sin(n\pi x/L)$  (o, en general, el  $X_n(x)$  en  $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ ) representa la “forma de la cuerda”, su amplitud de oscilación, en el punto  $x$ . El factor  $T_n(t)$  que lo multiplica, oscila entre valores positivos y negativos con frecuencia  $w_n = n\pi a/L$ , pero el producto total  $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$  no “cambia de forma”, sólo de amplitud (los puntos donde el producto se anula, que permanecen fijos durante el movimiento, se denominan *nodos*):



## 1.2. Aplicaciones en la tecnología

Como ya hemos mencionado, todos los fenómenos ondulatorios están descritos por la misma ecuación (1.2), la ecuación de ondas. En particular, como también se ha dicho, esto se aplica a las señales en circuitos eléctricos de modo que la señal eléctrica más general tendría un aspecto como (1.5) para una elección apropiada de los coeficientes. Vamos a ver ahora qué tipo de cosas se pueden hacer mediante el análisis de Fourier.

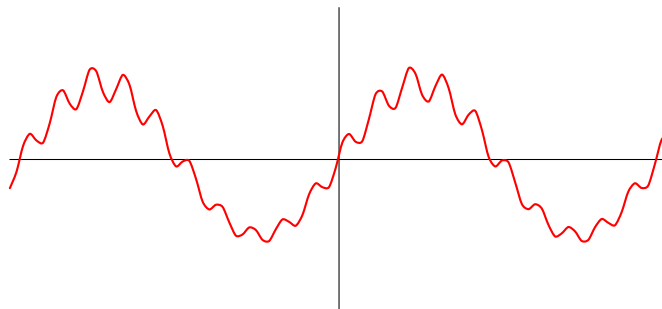
Pensemos en una señal transmitida a través de cualquier medio físico real; por ejemplo, la señal de un receptor de radio que va a los altavoces. Al pasar por los diferentes circuitos y cables del reproductor, la señal se modifica. De hecho, las ondas elementales (1.6) que la componen son dispersadas por el material conductor y algunas de ellas se pierden, no están presentes en la señal final que llega al dispositivo de los altavoces. Sin embargo, es claro que en la señal en bloque (1.5), hay unos modos de vibración más importantes que otros: aquellos cuyos coeficientes son mayores en valor absoluto contribuyen en mayor medida a la definición de la señal. Cuando el sonido emitido contiene la mayor parte de estas *frecuencias principales* (como se las conoce) preservando su intensidad relativa (es decir, si la señal original  $|C_2|$  es el doble de  $|C_3|$ , en la señal reproducida ocurre lo mismo) se dice que el equipo es de *alta fidelidad*, precisamente porque la señal final respeta “fielmente” el patrón de distribución de frecuencias en la señal original. En general el problema de la transmisión de señales es el ruido que se introduce. El receptor debe decidir a partir de la señal corrupta que recibe cuál es la parte que corresponde a la información que viaja con la señal y cuál es la parte debida al ruido.

Ahora bien, la señal original tiene un *contenido espectral* (es decir, una composición a partir de modos elementales como (1.6)) bien definido; si el receptor puede analizar de algún modo la señal corrupta e identificar cuáles son los modos elementales cuya superposición da como resultado la señal original, puede eliminar el ruido. Precisamente, este análisis es lo que permiten hacer las técnicas que veremos.

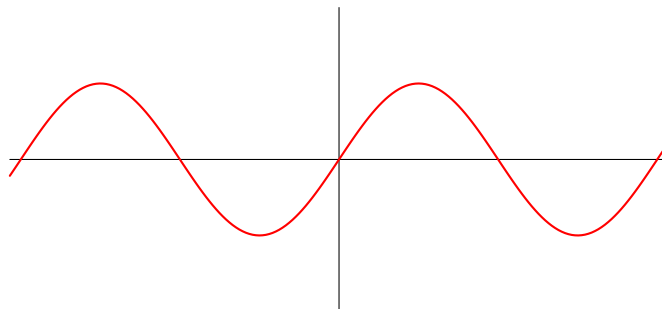
Al escribir la señal recibida  $f(t)$  como una serie de Fourier

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin nt),$$

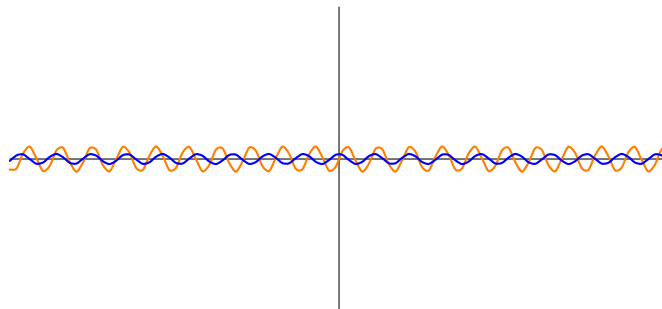
se puede ver qué frecuencias son las importantes y cuáles se deben al ruido, de manera que despreciando éstas se obtiene la señal “limpia”. Considérese por ejemplo la siguiente señal  $f(t)$ :



Como veremos más adelante, calculando la serie de Fourier de  $f(t)$ , es posible determinar que las ondas que se superponen para dar la señal son:



y (con la misma escala):



resultando evidente que debemos considerar como relevante para la transmisión de información sólo la primera, siendo las otras dos ruido.

Por otra parte, esta misma idea es el fundamento de los aparatos de radio. En una retransmisión de *amplitud modulada* (AM) se parte de una señal analógica que se emite mediante una onda cuya amplitud es proporcional en cada instante a esa señal original (la *frecuencia modulada* FM hace obviamente lo mismo pero con la frecuencia en lugar de la amplitud). Así, para llevar a cabo este proceso, se toma una señal a

transmitir (*broadcasting wave*, en inglés)

$$b(t) = B \sin(\omega t),$$

y se añade a la amplitud de una cierta señal, la onda de transporte (o *carrier wave*, en inglés)

$$c(t) = A \sin(\omega_c t),$$

de manera que la señal retransmitida por la estación de radio en amplitud modulada es

$$s(t) = (A + B \sin \omega t) \sin \omega_c t.$$

La frecuencia de la onda de transporte tiene unos valores típicos  $\omega_c \sim 1\text{MHz}$ . Esta es la frecuencia que el organismo competente le asigna como característica a cada estación (por ejemplo, la XHWZ 1013 emite con  $\omega_c = 1.013\text{MHz}$ ) y se denomina *frecuencia de radio*. La frecuencia  $\omega$  de la señal de retransmisión se denomina *frecuencia de sonido*. Pensemos ahora en el proceso de sintonizar una determinada estación de radio. Supongamos que estamos en la zona de cobertura de 3 estaciones distintas, cada una emite con una onda de transporte  $u_1 \sin \omega_1 t$ ,  $u_2 \sin \omega_2 t$ ,  $u_3 \sin \omega_3 t$  y sus señales de retransmisión respectivas son

$$\begin{aligned} a(t) &= A_1 \sin t + \dots + A_n \sin nt = \sum_{i=1}^n A_i \sin it \\ b(t) &= B_1 \sin t + \dots + B_n \sin nt = \sum_{j=1}^n B_j \sin jt \\ c(t) &= C_1 \sin t + \dots + C_n \sin nt = \sum_{k=1}^n C_k \sin kt. \end{aligned} \tag{1.7}$$

La señal que llega al receptor de radio es la suma de estas tres:

$$\begin{aligned} s(t) &= \left( u_1 + \sum_{i=1}^n A_i \sin it \right) \sin \omega_1 t + \\ &\quad \left( u_2 + \sum_{j=1}^n B_j \sin jt \right) \sin \omega_2 t + \\ &\quad \left( u_3 + \sum_{k=1}^n C_k \sin kt \right) \sin \omega_3 t. \end{aligned}$$

Si  $\omega_2$  es la frecuencia de la estación que queremos sintonizar y queremos recuperar el coeficiente  $X_q$  (con  $X_q$  uno de los  $A_q$ ,  $B_q$ ,  $C_q$ ), lo que hay que hacer es multiplicar  $s(t)$  por  $\cos(q - \omega_c)$  e integrar entre  $-\pi$  y  $\pi$ . El resultado de esta operación multiplicado por  $\pi/2$  es el coeficiente  $X_q$ . No hay nada de misterioso en este procedimiento. Para ver por qué funciona, vamos a particularizar al caso de tres estaciones cuyas ondas de transporte son  $2 \sin 80t$ ,  $4 \sin 90t$  y  $6 \sin 101t$ , respectivamente. Cada una retransmite su señal respectiva (*broadcasting waves*)

$$\begin{aligned} a(t) &= 2 \sin t - 3 \sin 2t \\ b(t) &= \sin t + 6 \sin 2t \\ c(t) &= 4 \sin t - 5 \sin 2t, \end{aligned} \tag{1.8}$$

de modo que la señal que llega al receptor de radio es

$$\begin{aligned} s(t) &= (2 + 2 \sin t - 3 \sin 2t) \sin 80t + (4 + \sin t + 6 \sin 2t) \sin 90t + \\ &\quad (6 + 4 \sin t - 5 \sin 2t) \sin 101t. \end{aligned}$$

Mediante la transformación trigonométrica

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

esto se puede escribir en la forma:

$$\begin{aligned} s(t) = & 2 \sin 80t + \cos(1 - 80)t - \cos(1 + 80)t - \\ & \frac{3}{2}(\cos(2 - 80)t - \cos(2 + 80)t) + \\ & 4 \sin 90t + \frac{1}{2}(\cos(1 - 90)t - \cos(1 + 90)t) - \\ & 3(\cos(2 - 90)t - \cos(2 + 90)t) + \\ & 6 \sin 101t + 2(\cos(1 - 101)t - \cos(1 + 101)t) - \\ & \frac{5}{2}(\cos(2 - 101)t - \cos(2 + 101)t). \end{aligned}$$

Supongamos que queremos sintonizar la segunda estación, cuya broadcasting wave es  $b(t) = \sin t + 6 \sin 2t$  (lo que nos interesa escuchar) y cuya señal recibida es  $S_2(t) = (4 + \sin t + 6 \sin 2t) \sin 90t$ . Para recuperar  $b(t) = b_1 \sin t + b_2 \sin 2t$ , tenemos que obtener los coeficientes  $b_1, b_2$  a partir de  $S_2(t)$ . Como ya hemos mencionado, para recuperar  $b_1$  hay que multiplicar  $S_2(t)$  por  $\cos(1 - 90)$  e integrar entre  $-\pi$  y  $\pi$ ; en este cálculo se utilizan las relaciones de ortogonalidad de las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} S_2(t) \cos(1 - 90)t dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos(1 - 90)t \cos(1 - 90)t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(1 - 90)t dt = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

así que

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_2(t) \cos(1 - 90)t dt = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} = 1.$$

Para determinar  $b_2$ , análogamente haríamos

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_2(t) \cos(2 - 90)t dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 3 \cos(2 - 90)t \cos(2 - 90)t dt = \frac{6}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2 - 90)t dt = 6. \end{aligned}$$

Por tanto,  $b_1 = 1, b_2 = 6$  y la señal que debe reproducir el aparato de radio es

$$b(t) = b_1 \sin t + b_2 \sin 2t = \sin t + 6 \sin 2t,$$

exactamente la que emitió la estación.

Como veremos más adelante, el proceso de sintonización de la estación de radio no es más que la determinación de los coeficientes de la serie trigonométrica que está asociada a la señal retransmitida; es decir: sintonizar una determinada estación es un problema de análisis de Fourier. El que esto funcione siempre se basa fundamentalmente en que cualquier señal que la estación emita (sea música, una entrevista, etc.) se puede expresar, como en (1.7) ó (1.8) en forma de combinación de senos y cosenos. Y, como ya hemos mencionado, las técnicas que veremos permiten aproximar con el grado de precisión que se requiera cualquier función (bajo condiciones muy generales) por su serie trigonométrica asociada. El proceso que se lleva a cabo en la estación emisora es, pues, de síntesis de Fourier (codificación de una cierta señal mediante su serie trigonométrica), en tanto que el receptor realiza uno de análisis (recupera los coeficientes de la serie a partir de una señal con ruido).

**Nota 1.1.** Como se entiende de lo anteriormente expuesto, el receptor de radio debe contener circuitos que realicen una integración entre  $-\pi$  y  $\pi$  de ciertas funciones trigonométricas. La calidad de un aparato concreto depende en gran medida de qué tan bien se haya implementado esa integración, lo cual ya es un problema tecnológico, más que matemático.

# 2

## Sucesiones y series numéricas

Como se ha mencionado en el capítulo precedente, el objetivo del análisis de Fourier es establecer unos criterios y técnicas que permitan aproximar una función (bajo condiciones muy generales) por una serie en la que sus términos son funciones trigonométricas. Evidentemente, será necesario conocer los rudimentos generales acerca de las series y su convergencia, tanto para el caso de series numéricas como funcionales, lo cual a su vez implica un cierto dominio de las sucesiones (pues la suma de una serie no es más que el límite de su sucesión de sumas parciales). En este capítulo nos ocuparemos de las sucesiones y series numéricas, el siguiente se dedica a las funcionales. El tratamiento será necesariamente condensado, se supone que el lector ha seguido un curso previo de cálculo diferencial e integral y aquí nos limitaremos a recordar los resultados más importantes de la teoría con vistas a su posterior aplicación.

Las referencias más importantes para este tema son [1, 2, 4]. El orden de presentación se ha tomado de [1].

### 2.1. Sucesiones

**Definición 2.1.** Una sucesión *real* no es más que una aplicación  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  (obviamente, reemplazando  $\mathbb{R}$  por  $\mathbb{C}$  resulta el concepto de sucesión compleja).

Suele escribirse  $\phi(n) = a_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Nótese que a  $\phi$  no se le pide que sea inyectiva, de manera que puede haber unos  $m, n \in \mathbb{N}$  distintos tales que  $a_n = a_m$ . Desde un punto de vista práctico, puede identificarse la sucesión  $\phi$  con el conjunto imagen  $\{\phi(n) = a_n : n \in \mathbb{N}\}$ , que es un conjunto *ordenado* de números reales.

**Nota 2.2.** Las notaciones más usuales para una sucesión son  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , o simplemente  $(a_n)$ .

A veces la sucesión se expresa mediante una *relación de recurrencia*, que no es más que una fórmula que expresa cada término en función de los anteriores. Por ejemplo, la *sucesión de Fibonacci* se define poniendo  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 1$  y declarando que  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ . Como casos particulares, tenemos las *progresiones aritméticas*, que son aquellas definidas por una relación de recurrencia tipo  $a_n = a_{n-1} + r$ , y las *progresiones geométricas*, que son sucesiones definidas por una relación de recurrencia como  $a_n = r a_{n-1}$ .

**Definición 2.3.** Diremos que una sucesión es *monótona creciente* cuando  $a_n \geq a_{n-1}$  y que es *monótona decreciente* cuando  $a_n \leq a_{n-1}$  (cuando las desigualdades son estrictas se habla de sucesiones estrictamente monótonas).



**Definición 2.4.** Una sucesión está *acotada* cuando existe una cota  $K$  tal que  $|a_n| \leq K$ . Una variante de esta definición se da cuando la sucesión está *acotada superiormente* ( existe un  $M$  con  $a_n \leq M$  para todo  $n$ ) o *inferiormente* (existe un  $m$  con  $m \leq a_n$  para todo  $n$ ).

Por ejemplo, las sucesiones  $((-1)^n)$  y  $(1/n)$  están acotadas, la  $(n^2)$  sólo lo está inferiormente y la  $((-1)^n n^3)$  no está acotada.

## 2.2. Límite de una sucesión

Intuitivamente, el límite de una sucesión es un número al cual se acercan sus términos. Si tal número existe, decimos que la sucesión converge a él.

**Definición 2.5.** Se dice que un número  $a \in \mathbb{R}$  es el límite de una sucesión  $(a_n)$  (o que la sucesión *convergen* al *límite*  $s$ ) si para cualquier  $\varepsilon > 0$  dado, existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_n - a| < \varepsilon$  para todo  $n > n_0$ . A veces se expresa esto diciendo que  $a_n$  tiende hacia  $a$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , denotado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \lim_n a_n = a \quad \text{ó} \quad a_n \rightarrow a. \quad (2.1)$$

**Ejemplo 2.6.** La sucesión  $(1/n)$  converge y tiene por límite 0. Esto es una consecuencia inmediata de la propiedad arquimediana de los números reales: dado  $\varepsilon > 0$ , basta tomar un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $1/n_0 < \varepsilon$ .  $\triangle$

Una propiedad fundamental de las sucesiones convergentes es la siguiente.

**Proposición 2.7.** *Toda sucesión convergente está acotada.*

*Demostración.* En efecto, sea  $a = \lim_n a_n$  y consideremos  $\varepsilon = 1$  en la definición. Por hipótesis, existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$ , es  $|a_n - a| < 1$ , o sea,  $|a_n| < 1 + a$  para todo  $n \geq n_0$ . Los restantes términos de la sucesión forman un conjunto finito  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\}$  que tiene un elemento máximo  $M$ . Llamando  $K = \max\{1 + a, M\}$ , se tiene que  $a_n < K$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . El mismo argumento, invirtiendo las desigualdades, sirve para probar la acotación inferior.  $\square$

El recíproco de la proposición precedente no es cierto: la sucesión  $((-1)^n)$  está obviamente acotada pero no es convergente. Sí se da el recíproco si se añade una condición adicional referente al crecimiento de la sucesión, obteniéndose así un criterio práctico para determinar la convergencia en algunos casos.

**Teorema 2.8.** *Toda sucesión creciente (respectivamente, decreciente) y acotada superiormente (respectivamente, inferiormente) es convergente.*

*Demostración.* Supongamos que  $(a_n)$  es creciente y acotada superiormente (el otro caso es análogo). Entonces, el conjunto  $S = \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$  está acotado superiormente y, por tanto, posee supremo  $a = \sup S$ . Por definición de supremo, para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $a_{n_0} \in S$  tal que  $a_{n_0} > a - \varepsilon$ . Ahora, como la sucesión es creciente tendremos que  $a_n > a_{n_0} > a - \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . Pero por ser supremo,  $a$  cumple que  $a \geq a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De estas propiedades se deduce que

$$|a_n - a| = a_n - a \leq a - a_{n_0} < \varepsilon,$$

para todo  $n \geq n_0$ , lo cual implica que la sucesión tiene límite  $a \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Como aplicación inmediata, la sucesión  $(1/n)$  es convergente, por ser claramente decreciente y acotada inferiormente por el ínfimo 0. De hecho, la demostración precedente nos asegura que  $\lim_n 1/n = 0$ .

**Ejemplo 2.9.** Veamos que la sucesión  $((1 + 1/n)^n)$  es convergente. En primer lugar, es creciente. Esto se comprueba desarrollando  $a_n$  y  $a_{n+1}$  por el teorema del binomio; en el primer caso,

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^n \left(\frac{1}{n}\right)^i \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right), \end{aligned}$$

y en el segundo,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^n \left(\frac{1}{n+1}\right)^i \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Aquí se aprecia claramente que cada término de  $a_{n+1}$  es mayor o igual que el correspondiente de  $a_n$  (pues se le resta una cantidad menor). Además,  $a_{n+1}$  contiene un término adicional que es positivo. Por tanto,  $a_{n+1} > a_n$ .

Ahora, probaremos que la sucesión es acotada superiormente. Observemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$  tenemos que  $a_n < \sum_{i=0}^n (1/i!)$ . Haciendo uso de la desigualdad  $2^{i-1} \leq i!$  (que se prueba fácilmente por inducción), resulta

$$a_n < 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{i-1}} = 1 + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} < 3.$$

Así pues,  $((1 + 1/n)^n)$  es creciente acotada superiormente, luego convergente por el teorema 2.8. El límite de esta sucesión es, por definición, el número  $e$  de Euler,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Numéricamente, se encuentra que  $e \simeq 2.71828$ . △

El siguiente resultado será muy útil más adelante, cuando tratemos criterios de convergencia de series.

**Proposición 2.10** (Criterio del emparedado). *Sean  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$  sucesiones reales tales que  $a_n \leq b_n \leq c_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y  $\lim_n a_n = L = \lim_n c_n$ . Entonces,  $\lim_n b_n = L$ .*

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$  dado. Por ser  $\lim_n a_n = L = \lim_n c_n$  existen unos naturales  $n_0, n_1$  tales que  $0 < |a_n - L| < \varepsilon$  y  $0 < |c_n - L| < \varepsilon$  para todo  $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ . Esto en particular implica que  $-\varepsilon < a_n - L$  y  $c_n - L < \varepsilon$ . Como, por hipótesis, es  $a_n \leq b_n \leq c_n$ , resulta (restando  $L$  a cada miembro)

$$-\varepsilon < a_n - L < b_n - L < c_n - L < \varepsilon,$$

que a su vez implica  $|b_n - L| < \varepsilon$ . □

**Ejemplo 2.11.** De la desigualdad de Bernoulli,  $(1 + a)^n > 1 + na$ , válida para todo  $a \in \mathbb{R}^+$  y  $n \in \mathbb{N}$  (puede probarse por inducción), se deduce en particular que si  $0 < x - 1$  se escribe como  $x = 1/(1 + a)$ , entonces,

$$0 < x^n = \frac{1}{(1 + a)^n} \leq \frac{1}{1 + na} \leq \frac{1}{na}.$$

Tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$  y aplicando el criterio del emparedado 2.10, resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0,$$

para todo  $0 < x < 1$ . Un razonamiento completamente análogo muestra que, de hecho, el límite es cero para todo  $|x| < 1$ . △

Cuando se habla de sucesiones, necesariamente hay que mencionar un concepto esencial, el de sucesiones de Cauchy (a veces, se las llama sucesiones fundamentales).

**Definición 2.12.** Una sucesión real  $(a_n)$  se dice que es *de Cauchy* si, para cada  $\varepsilon > 0$  dado, existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, cuando  $m, n > n_0$ ,

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Es inmediato probar que toda sucesión convergente es de Cauchy (véanse los ejercicios). El recíproco es mucho más interesante.

**Teorema 2.13.** *Toda sucesión de Cauchy es convergente.*

*Demostración.* Sea  $(a_n)$  sucesión de Cauchy y consideremos  $\varepsilon = 1$  en la definición 2.12, de manera que existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > n_0$ ,

$$|a_n| < |a_{n_0} - a_n| + |a_n| < 1 + |a_n|,$$

y de aquí resulta la acotación

$$|a_n| \leq \text{máx}\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|\} + |a_{n_0}| + 1, \quad (2.2)$$

válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Consideremos ahora las sucesiones auxiliares

$$b_n = \text{ínf}\{a_m : m \geq n\} \quad \text{y} \quad c_n = \text{sup}\{a_m : m \geq n\},$$

que existen por el axioma del supremo en  $\mathbb{R}$ . Es obvio que  $(b_n)$  es monótona *creciente*, mientras que  $(c_n)$  es monótona *decreciente*, así como que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$b_n \leq a_n \leq c_n. \quad (2.3)$$

La acotación 2.2 junto con el teorema 2.8 nos aseguran que existen los límites

$$M_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \text{sup}\{b_n\}_{n \geq 1} \quad \text{y} \quad M_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \text{ínf}\{c_n\}_{n \geq 1},$$

cumpléndose que  $M_1 \leq M_2$ . Por otra parte, de la definición de sucesión de Cauchy resulta que dado  $\varepsilon > 0$  se puede hallar un  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que si  $m \geq n_1$ ,  $a_m > a_{n_1} - \varepsilon$ , y también  $a_m < a_{n_1} + \varepsilon$ . Pero por definición de las sucesiones  $(b_n)$ ,  $(c_n)$ , esto implica que  $b_{n_1} > a_{n_1} - \varepsilon$  y  $c_{n_1} < a_{n_1} + \varepsilon$ . Entonces, por ser  $M_1$ ,  $M_2$  un supremo y un ínfimo, respectivamente, se tiene:

$$0 \leq M_2 - M_1 \leq c_{n_1} - b_{n_1} < a_{n_1} + \varepsilon - (a_{n_1} - \varepsilon) = 2\varepsilon.$$

Esto es válido para cualquier  $\varepsilon > 0$ , de manera que debe ser  $M_1 = M_2$  y, por el criterio del emparedado aplicado a (2.3), resulta que  $(a_n)$  es convergente con límite  $M = M_1 = M_2$ .  $\square$

**Nota 2.14.** El concepto de sucesión de Cauchy se puede definir en cualquier *espacio métrico*, esto es, un conjunto con una noción de distancia (como lo es  $|a - b|$  para dos números reales  $a, b \in \mathbb{R}$ ). Un tal espacio se dice que es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente. El teorema precedente muestra que  $\mathbb{R}$  dotado de la distancia inducida por el valor absoluto, es un espacio completo.

## 2.3. Series numéricas

Las series permiten calcular sumas infinitas (como en la famosa *paradoja de Zenón* concerniente a la imposibilidad del movimiento, véase el ejercicio 13).

**Definición 2.15.** Dada la sucesión  $\{a_n\}$  se define su *serie* asociada como la suma infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (2.4)$$

El sentido de esta expresión es el del límite (cuando existe) de la sucesión de *sumas parciales*

$$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k = \sum_{n=1}^k a_n. \quad (2.5)$$

Es decir, la serie 2.4 se dice que es sumable (o convergente) si existe

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k. \quad (2.6)$$

Se dice entonces que la suma  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es el valor de este límite. Si la sucesión de sumas parciales no converge, se dice que la serie es *divergente*.

El siguiente ejemplo, referente al carácter de la serie geométrica, es de importancia fundamental.

**Ejemplo 2.16.** La *serie geométrica*,  $\sum_{n \geq 1} ar^n$ , es convergente cuando  $|r| < 1$ , pues a partir de

$$S_k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1} = \frac{ar^{k-1}r - a}{r - 1} = \frac{a}{1 - r} + \frac{a}{r - 1}r^k,$$

tomando el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r}, \quad (2.7)$$

si  $|r| < 1$ . Sin embargo, cuando  $|r| \geq 1$  la serie geométrica es divergente. Por ejemplo, la serie  $\sum_{n \geq 1} \pi^n$  es divergente.  $\triangle$

**Ejemplo 2.17.** La serie de los recíprocos de los números triangulares (ya estudiada por Leibniz)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

es convergente con suma 1, pues a partir de  $1/n(n+1) = 1/n - 1/(n+1)$  se obtiene

$$S_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1},$$

y de aquí, tomando el límite cuando  $k \rightarrow \infty$ , se ve que la suma es 1.  $\triangle$

Frecuentemente no se requiere calcular la suma de una serie, sino sólo determinar su carácter (si es o no convergente). Probablemente la condición necesaria más importante para que una serie sea convergente es que la sucesión dada por su término general tienda a cero.

**Teorema 2.18.** Si la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

*Demostración.* En efecto, si  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$ , de la identidad

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$$

se deduce (tomando límites en ambos miembros)

$$S = S + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

y por tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .  $\square$

Así pues, si no existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , o existe pero es distinto de cero, la sucesión no puede ser convergente. Esta sencilla observación resulta muy útil en la práctica y por ello la destacamos como un *criterio de convergencia*.

**Corolario 2.19.** Se tiene que:

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0, \text{ entonces, } \sum_{n \geq 1} a_n \text{ es divergente.}$$

**Ejemplo 2.20.** Las series

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^n + \dots,$$

y

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots,$$

son divergentes, pues la sucesión  $(-1)^n$  no tiene límite (es oscilante) y  $\lim_{n \rightarrow \infty} n/(n+1) = 1 \neq 0$ .  $\triangle$

## 2.4. Series de términos positivos

Obviamente, una serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  se dice que es de términos positivos si  $a_n \geq 0$ . Hay muchos criterios para decidir el carácter de tales series, pero todos tienen su aplicabilidad restringida. Nosotros nos limitaremos a ver varios de los criterios más comunes en la práctica.

**Ejemplo 2.21.** El criterio más elemental se basa en la observación de que al ser la sucesión de sumas parciales de una serie de términos positivos creciente, si está acotada superiormente ha de ser convergente, de acuerdo con el teorema 2.8.  $\triangle$

**Teorema 2.22** (Primer criterio de comparación). Sean  $\sum_{n \geq 1} a_n$  y  $\sum_{n \geq 1} b_n$  dos series de términos positivos tales que para todo  $n$  (o para todo  $n$  suficientemente grande)

$$0 \leq a_n \leq b_n. \quad (2.8)$$

Entonces,

1. Si  $\sum_{n \geq 1} b_n$  es convergente,  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente.
2. Si  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es divergente,  $\sum_{n \geq 1} b_n$  es divergente.

*Demostración.* El resultado es una consecuencia inmediata del hecho de que para las sumas parciales se tiene  $0 \leq \sum_{n=1}^k a_n \leq \sum_{n=1}^k b_n$ , y del criterio del emparejado para sucesiones 2.10.  $\square$

**Nota 2.23.** Nótese que el criterio no afirma nada cuando la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es convergente ni cuando la serie  $\sum_{n \geq 1} b_n$  es divergente.

**Ejemplo 2.24.** Puede verse que la serie armónica  $\sum_{n \geq 1} 1/n$  es divergente aplicando el criterio precedente con la serie

$$\sum_{n \geq 1} 1/2^k = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}} + \dots.$$

pues se cumple  $0 \leq 1/2^k \leq 1/n$ . Agrupando como se indica los términos iguales de la última serie (la suma de estos términos es siempre  $1/2$ ), se obtiene

$$\sum_{n=1}^{2^k} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + k \frac{1}{2},$$

que diverge cuando  $k \rightarrow \infty$ .  $\triangle$

**Teorema 2.25** (Segundo criterio de comparación). Sean  $\sum_{n \geq 1} a_n$ ,  $\sum_{n \geq 1} b_n$  dos series de términos positivos con  $a_n \geq 0$ ,  $b_n > 0$ . Si existe un  $L > 0$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \quad (2.9)$$

entonces, ambas series tienen el mismo carácter.

*Demostración.* Sean  $L > 0$  como en el enunciado y  $M, m > 0$  tales que  $m < L < M$ . Por la hipótesis, existe también un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > n_0$ , entonces

$$m < \frac{a_n}{b_n} < M,$$

o, equivalentemente,  $mb_n < a_n < Mb_n$  para todo  $n > n_0$ .

Ahora, si  $\sum_{n \geq 1} b_n$  converge, también lo hace  $\sum_{n \geq 1} Mb_n$ . Como  $a_n < Mb_n$ , el criterio 2.22 implica que en ese caso  $\sum_{n \geq 1} a_n$  también converge. Recíprocamente, si  $\sum_{n \geq 1} b_n$  diverge también lo hace  $\sum_{n \geq 1} mb_n$  y, siendo  $mb_n < a_n$ , de nuevo por el primer criterio de comparación 2.22 resulta que  $\sum_{n \geq 1} a_n$  diverge.  $\square$

En palabras, el criterio afirma que cuando  $0 < L < \infty$ , si una serie es convergente la otra también lo es, y cuando una serie es divergente la otra también. Sin embargo, el criterio no permite ninguna conclusión cuando no existe el límite de  $a_n/b_n$  o cuando éste vale  $0$  ó  $\infty$ <sup>1</sup>.

**Ejemplo 2.26.** La serie

$$\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{4n^2 + 5},$$

es divergente, pues comparando con la serie armónica  $\sum_{n \geq 1} b_n = \sum_{n \geq 1} 1/n$  resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4 + \frac{5}{n^2}} = \frac{1}{4}.$$

$\triangle$

**Teorema 2.27** (Criterio del cociente o de D'Alembert). *Sea  $\sum_{n \geq 1} a_n$  una serie de términos estrictamente positivos,  $a_n > 0$ . Denotemos*

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

*Entonces:*

1. Si  $r < 1$ , la serie es convergente.
2. Si  $r > 1$ , la serie es divergente.

*Demostración.* Sea  $r > 0$  como en el enunciado y supongamos que  $r < 1$ . Entonces, podemos escribirlo como  $r = 2L - 1$ , con  $0 < r < L < 1$  (de hecho,  $L = (r + 1)/2$ ). Por la hipótesis, tenemos que existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > n_0$ ,  $a_{n+1} < La_n$ . Iterando esta relación, resulta

$$a_{n+p} < L^p a_n,$$

para cualquier  $p \in \mathbb{N}$ . Por tanto,

$$\sum_{p=n_0+1}^{\infty} a_p = \sum_{p=1}^{\infty} a_{n_0+p} < \sum_{p \geq 1} L^p a_{n_0} = a_{n_0} \sum_{p \geq 1} L^p = \frac{La_{n_0}}{1-L},$$

por la fórmula de la suma de una serie geométrica. Así,

$$\sum_{p \geq 1} a_p = a_1 + \cdots + a_{n_0} + \sum_{p=n_0+1}^{\infty} a_p = a_1 + \cdots + a_{n_0-1} + a_{n_0} \frac{1+L}{1-L} < \infty.$$

Si  $r > 1$ , entonces existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > n_0$  es  $a_{n+1} > a_n$ , el límite del término general es no nulo y, por el teorema 2.18, la serie diverge.  $\square$

<sup>1</sup>Aunque en estos casos, puede adaptarse fácilmente la demostración para asegurar que si  $L = 0$  y  $\sum b_n$  converge, entonces  $\sum a_n$  converge, y si  $L = \infty$ , si  $\sum b_n$  diverge, entonces  $\sum a_n$  diverge.

**Nota 2.28.** De nuevo, no se puede afirmar nada cuando el límite no existe o cuando  $r = 1$ .

**Ejemplo 2.29.** La serie  $\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} n!/n^n$  es convergente, pues

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n!}{n^n} : \frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}} = \frac{n(n-1)^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}},$$

y tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , aplicando el resultado del ejemplo 2.9, resulta que  $\lim_n (a_n/a_{n-1}) = 1/e$ .  $\triangle$

El último criterio que analizaremos compara el comportamiento de la serie con el de una integral determinada por el término general.

**Teorema 2.30** (Criterio de la integral). *Sea  $\sum_{n \geq 1} a_n$  una serie de términos positivos y decreciente para la que  $a_n = f(n)$  puede obtenerse a partir de una función  $f$  continua, decreciente y positiva, definida para  $1 \leq x < \infty$ . Entonces, existe la integral*

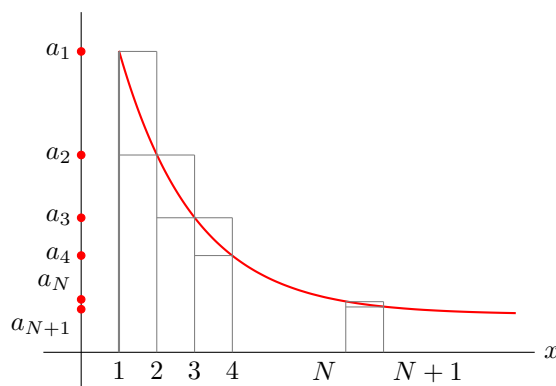
$$\int_1^\infty f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N f(x) dx$$

si y sólo si la serie

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

converge.

*Demostración.* Por las propiedades de las sumas de Riemann, las sumas parciales de la serie aproximar superior e inferiormente el valor de la integral:



Se tiene, de las sumas superiores,

$$S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N > \int_1^{N+1} f(x) dx,$$

y de las sumas inferiores,

$$S_N - a_1 = a_2 + a_3 + \cdots + a_N < \int_1^N f(x) dx + a_1,$$

de donde

$$\int_1^{N+1} f(x) dx < S_N < \int_1^N f(x) dx + a_1.$$

Por ello, tomando límites cuando  $N \rightarrow \infty$  y utilizando la definición de integral como límite de sumas, si existe la integral impropia  $\int_1^\infty f(x) dx$ , la serie es convergente y viceversa.  $\square$

**Ejemplo 2.31.** Las  $p$ -series aparecen frecuentemente en matemáticas y son muy útiles en conjunción con los criterios de comparación. Se trata de las series de la forma

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

donde  $p > 0$  es un parámetro (nótese que para  $p = 1$  resulta la serie armónica). Para  $p \neq 1$ , utilizando el criterio integral con  $f(x) = 1/x^p$ , se obtiene:

$$\int_1^N \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^N = \frac{N^{1-p} - 1}{1-p},$$

luego, tomando el límite con  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\int_1^N \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} 1/(p-1) & \text{si } p > 1 \\ \infty & \text{si } p < 1. \end{cases}$$

Por tanto, las  $p$ -series son *convergentes* cuando  $p > 1$  y *divergentes* cuando  $p < 1$ . △

## 2.5. Series alternadas

Si tenemos una serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  con términos arbitrarios (positivos o negativos), siempre podemos obtener a partir de ella una serie de términos positivos tomando valores absolutos,  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ . Podemos esperar entonces obtener algún tipo de información sobre la serie original estudiando esta nueva serie.

**Definición 2.32.** Se dice que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es *absolutamente convergente* si la serie asociada  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  es convergente.

Una primera propiedad relacionando estos dos conceptos de convergencia, es la siguiente.

**Proposición 2.33.** *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

*Demostración.* Sea  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$  convergente. Observemos que para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que  $a_n \leq |a_n|$  y, por supuesto,  $0 \leq |a_n|$ . Consecuentemente,

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|.$$

Por ser  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$  convergente también lo es  $2 \sum_{n \geq 1} |a_n|$  y en ese caso, el primer criterio de comparación (teorema 2.22) asegura que  $\sum_{n \geq 1} (a_n + |a_n|)$  converge. Pero entonces, la serie

$$\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} (a_n + |a_n|) - \sum_{n \geq 1} |a_n|$$

también converge, pues es la diferencia de dos series convergentes. □

**Ejemplo 2.34.** La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

es convergente. En efecto, se tiene que  $|a_n| \leq 1/n^2$  y, aplicando el primer criterio de comparación con la 2-serie de término general  $b_n = 1/n^2$  (que es convergente, como se ha visto en el ejemplo 2.31) resulta que  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$  es convergente. La proposición 2.33 nos dice entonces que la serie converge. △



**Nota 2.35.** Naturalmente, puede ocurrir que la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  sea convergente sin que lo sea la serie  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ , y se dice entonces que la serie  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es *condicionalmente convergente*<sup>2</sup>.

Un caso particular de series arbitrarias que aparece con frecuencia en el análisis de Fourier lo forman las *series alternadas*, en las cuales el término general va cambiando alternadamente de signo:  $a_n = (-1)^n \alpha_n$ , o bien  $a_n = (-1)^{n-1} \alpha_n$ , donde  $\alpha_n = |a_n| > 0$ , como en

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

El criterio más importante para este tipo de series es el de Leibniz.

**Teorema 2.36** (Criterio de Leibniz). *Sea  $\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \alpha_n$  una serie alternada tal que:*

1. *La sucesión de términos en valor absoluto es decreciente:  $\alpha_n \leq \alpha_{n-1}$ .*
2. *El término general tiende hacia 0:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ .*

*Entonces, es convergente.*

*Demostración.* Supongamos el caso  $a_1 = \alpha_1 > 0$  (el otro es análogo). Por ser  $\alpha_n$  es decreciente, se tiene  $\alpha_n - \alpha_{n+1} > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Agrupando las sumas parciales pares e impares como

$$\begin{aligned} S_{2m} &= (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \dots + (\alpha_{2m-1} - \alpha_{2m}), \\ S_{2m+1} &= \alpha_1 - (\alpha_2 - \alpha_3) - (\alpha_4 - \alpha_5) - \dots - (\alpha_{2m} - \alpha_{2m+1}), \end{aligned}$$

resulta que  $(S_{2m})$  es creciente y  $(S_{2m+1})$  decreciente. Además,  $S_{2m} > 0$ ,  $S_{2m+1} < a_1$  y  $S_{2m+1} - S_{2m} = a_{2m+1} > 0$ , luego

$$0 < S_{2m} < S_{2m+1} < a_1,$$

y por el teorema 2.8 ambas sucesiones convergen. Por último, de  $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - S_{n-1}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ , resulta que las dos sucesiones de sumas parciales han de tener el mismo límite, lo cual implica que la sucesión  $S_n$  converge a él.  $\square$

**Ejemplo 2.37.** La serie alternada

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

cumple las hipótesis del criterio de Leibniz, luego es convergente. De hecho, es condicionalmente convergente, pues la serie de valores absolutos asociada es la armónica, que es divergente.  $\triangle$

## 2.6. Ejercicios

1. Probar que, si una sucesión tiene límite, éste es único.
2. Probar que toda sucesión convergente es de Cauchy.
3. Probar que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= a + b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= ab \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= a - b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) &= a/b, \quad \text{si } b_n, b \neq 0. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>El nombre se debe a que en este caso la suma de la serie se puede modificar, alterando el orden de sumación de los términos, de manera que converja a cualquier número prefijado (este resultado es debido a Riemann), algo que nunca puede ocurrir con las series absolutamente convergentes, pues en ellas la suma es única.

4. Calcular el límite de las sucesiones siguientes:

a)

$$\lim_n \frac{\sin n}{n}$$

b)

$$\lim_n \sqrt{n^2 + 3n + 2} - n$$

c)

$$\lim_n \left( \frac{n+a}{n-1} \right)^n$$

5. Estudiar si las sucesiones siguientes son crecientes o decrecientes (o ninguna de las dos):

a)  $a_n = \frac{1}{n!}$

b)  $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$

c) Calcular  $\lim_n b_n$

6. ¿Es cierto que  $\lim x_n y_n = 0$  implica  $\lim x_n = 0$  ó  $\lim y_n = 0$ ? ¿Y el recíproco?

7. Calcular la suma de la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{5}{3^n}$$

8. Estudiar el carácter de las siguientes series:

a)

$$\sum_{n \geq 1} (\ln n)^2$$

b)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + 2n - 1}{n^5}$$

c)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2\sqrt{n} - 1}$$

d)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^2 + 1}$$

e)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\log n}{n!}$$

9. Estudiar, según los valores del parámetro  $a > 0$ , el carácter de las siguientes series:

a)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(2a+1)^n}{2^n n^2}$$

b)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{\sqrt{n}}$$

10. Determinar la convergencia de las siguientes series:

a)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!}$$

b)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} n}{2n - 1}$$

c)

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

11. Determinar si la convergencia de las siguientes series es absoluta o condicional:

a)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} (n + 2)}{n^2 (n + 1)}$$

b)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n\pi}{n + 1}$$

12. Hans Castorp quiere escalar una montaña de 1000m de altura. El primer día sube 100m y se detiene a dormir. Pero, mientras Hans duerme, la montaña (mágica) crece de manera uniforme hasta alcanzar una altura de 2000m, así que Hans se encuentra al despertar a una altura de 200m. Al día siguiente sube 100m más y, mientras duerme, de nuevo la montaña crece, hasta una altura de 3000m, y así sucesivamente. ¿Llegará Hans a la cima?

13. Aquiles es capaz de recorrer 10m en 1 segundo. La tortuga sólo es capaz de desplazarse 1m en ese mismo tiempo. Sin embargo, Zenón argumenta que si Aquiles le da una ventaja de 10m a la tortuga, nunca la alcanzará. Pues en el primer segundo, Aquiles se encontrará en la posición inicial de la tortuga, mientras que ésta ya estará a  $10 + 1/10$ m de la salida. Aquiles tarda  $1/10$ s más en alcanzar esa posición, pero para entonces la tortuga ya se encuentra a  $1 + 1/10 + 1/100$ m. Y así sucesivamente.

a) Calcular, usando cinemática elemental, el tiempo que Aquiles tarda en alcanzar a la tortuga y a qué distancia del punto de salida (de Aquiles) ocurre esto.

b) Calcular la suma de la serie que da las distancias sucesivas entre Aquiles y la tortuga y comparar el resultado con el obtenido en el ítem precedente.

# 3

## Series funcionales. Convergencia uniforme

Este capítulo cierra los preliminares que necesitamos sobre sucesiones y series estudiando el caso funcional. El objetivo principal es probar un teorema referente a la posibilidad de derivar una serie término a término (el teorema 3.14), que será clave en la justificación del método de separación de variables que veremos en el capítulo 6. Otro resultado de fundamental importancia que obtendremos es el criterio de Weierstrass para determinar la convergencia uniforme de una serie de funciones, que tendremos ocasión de aplicar repetidamente más adelante.

Referencias adecuadas para este capítulo son los textos [2, 4]. El capítulo 2 de [5] también contiene una interesante discusión acerca de la continuidad uniforme.

### 3.1. Convergencia uniforme de sucesiones de funciones

Sea  $(f_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de funciones con  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Se dice que converge puntualmente a una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  en el intervalo  $[a, b]$  si para cada  $x \in [a, b]$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

es decir, la sucesión de números reales  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge a  $f(x) \in \mathbb{R}$ . Recordemos que esto quiere decir, para cada  $x \in [a, b]$ , que fijado un  $\varepsilon > 0$  existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$ , dependiente de  $x$  y de  $\varepsilon$ , tal que si  $n > n_0$ ,  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Sin embargo, puede suceder que este  $n_0(x, \varepsilon)$  varíe de manera extrema con  $x$ . La noción de convergencia uniforme surge como una manera de garantizar que este comportamiento no ocurra y  $n_0$  sólo dependa de  $\varepsilon$ :  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ .

**Definición 3.1.** La sucesión  $(f_n)$  converge uniformemente a la función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  en el intervalo  $[a, b]$  si para cada  $\varepsilon > 0$  fijado, existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, si  $n > n_0$ ,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

para cualquier  $x \in [a, b]$ .

**Ejemplo 3.2.** Consideremos  $f_n(x) = x^n$  en  $[a, b] = [\frac{1}{2}, 1]$ . Para cada  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ , se tiene que  $(f_n) = (x^n)$  es convergente como sucesión de números reales. De hecho,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

luego  $(f_n)$  converge puntualmente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Sin embargo, la convergencia no es uniforme. La condición  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ , cuando  $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ , se traduce en  $x^n < \varepsilon$ , esto es,  $n_0 > \log \varepsilon / \log x$ . Ahora bien, para  $\varepsilon > 0$  fijo, podemos tomar  $x$  tan próximo a 1 como queramos, es decir,  $\log x$  tan próximo a 0 como se quiera y, consecuentemente, variando  $x \in [\frac{1}{2}, 1[$  forzamos a que  $n$  tenga que ser mayor que cualquier número preasignado. Ningún  $n_0 \in \mathbb{N}$  sirve para todo  $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ .  $\triangle$

**Ejemplo 3.3.** Sean  $[a, b] = [0, 1]$  y la sucesión  $(f_n) = (1 + x/n)$ . Se tiene que  $(f_n)$  converge uniformemente a la función constante 1 en  $[0, 1]$ . En efecto, la condición  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  es ahora  $\frac{x}{n} < \varepsilon$ , y esto se cumple para todo  $n > n_0$  si se toma  $n_0 > 1/\varepsilon$ , pues en ese caso:

$$\frac{x}{n} < \frac{x}{n_0} < \varepsilon x \leq \varepsilon$$

(ya que  $0 \leq x \leq 1$ ). Fijémonos en que la condición  $n_0 > 1/\varepsilon$  sólo depende de  $\varepsilon$  y no de  $x$ .  $\triangle$

Otra forma útil de ver la convergencia uniforme consiste en la siguiente definición equivalente:  $(f_n)$  converge uniformemente a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  en  $[a, b]$  si la sucesión  $(m_n)$ , donde

$$m_n = \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|,$$

tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = 0$ .

**Nota 3.4.** Geométricamente,  $m_n$  es la máxima distancia vertical entre las graficas de  $f_n(x)$  y  $f(x)$ .

**Ejemplo 3.5.** Si  $[a, b] = [0, 1]$  y  $f_n(x) = x^n(1 - x)$ , resulta que  $(f_n)$  converge uniformemente a la función idénticamente nula en  $[0, 1]$ . En efecto, se tiene que

$$m_n = \max_{x \in [a, b]} |x^n(1 - x)| = \max_{x \in [a, b]} (x^n(1 - x)) = \max_{x \in [a, b]} f_n(x)$$

Derivando, se ve que el máximo se alcanza en  $x = n/(1 + n)$ :

$$0 = f'_n(x) = nx^{n-1}(1 - x) - x^n,$$

de donde

$$-(n + 1)x^n + nx^{n-1} = 0.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} m_n &= f_n\left(\frac{n}{1+n}\right) = \left(\frac{n}{1+n}\right)^n \left(1 - \frac{n}{1+n}\right) \\ &= \left(\frac{n}{1+n}\right)^n \left(\frac{1}{1+n}\right) = \frac{n^n}{(1+n)^{n+1}}, \end{aligned}$$

y es claro que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = 0.$$

$\triangle$

Una pregunta importante es la siguiente: si  $(f_n)$  es una sucesión de funciones con una cierta propiedad, y  $(f_n)$  converge a una función  $f$  en algún sentido, ¿Cuándo podemos asegurar que  $f$  tiene esa misma propiedad? En el caso de que la propiedad sea la continuidad por ejemplo, vemos que la convergencia puntual no es suficiente. En el ejemplo 3.2 las funciones  $f_n(x) = x^n$  son continuas para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pero su límite puntual no lo es. Esto no ocurre con la convergencia uniforme.

**Teorema 3.6.** Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones tal que  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $(f_n)$  converge uniformemente a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  en  $[a, b]$ , entonces,  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x_0 \in ]a, b[$  (los casos  $x_0 = a$ ,  $x_0 = b$  se razonan análogamente). Dados cualesquiera  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in [a, b]$ , se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Por la convergencia uniforme de  $(f_n)$  a  $f$  en  $[a, b]$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > n_0$ ,  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$  para todo  $x \in [a, b]$ ; en particular, también es  $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3$  si  $n > n_0$ . Por otra parte, para cada  $n \in \mathbb{N}$  es  $f_n$  continua, luego dado  $\varepsilon/3 > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|x - x_0| < \delta$ , es  $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$ . En definitiva, dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , tomando  $n > n_0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|x - x_0| < \delta$ , se tiene (sustituyendo en (3.1)):

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

luego  $f$  es continua en  $x_0$ . □

Si la propiedad en cuestión es la integrabilidad, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.7.** Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones tal que  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable en  $[a, b]$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $(f_n)$  converge uniformemente a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  en  $[a, b]$ , entonces,  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \int_a^b f.$$

*Demostración.* Veamos primero que el límite  $f$  es integrable. Dado  $\varepsilon > 0$ , por ser  $f_n \rightarrow f$  uniformemente, existe un  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > n_0$ :

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)},$$

para todo  $x \in [a, b]$ . Entonces, para cada  $P \in \mathcal{P}([a, b])$  se tiene:

$$\begin{aligned} S(f - f_n, P) &= \sum_i M_{f-f_n}([x_i, x_{i+1}]) (x_{i+1} - x_i) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_i (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{3(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

y, análogamente,  $L(f - f_n, P) \leq \varepsilon/3$ . Para este  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ , elegimos una partición  $P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a, b])$  de tal manera que si  $P \leq P_\varepsilon$ , se verifique  $S(f_n, P) - L(f_n, P) < \varepsilon/3$  (esto se puede hacer por ser  $f_n$  integrable, aplicando el criterio de integrabilidad de Riemann). Para cada una de estas particiones, ocurre que (por ser  $S(f+g, P) \geq S(f, P) + S(g, P)$  y  $L(f+g, P) \leq L(f, P) + L(g, P)$ ):

$$\begin{aligned} S(f, P) - L(f, P) &\leq S(f - f_n, P) - L(f - f_n, P) + S(f_n, P) - L(f_n, P) \\ &< |S(f - f_n, P)| + |L(f - f_n, P)| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

luego  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .

Para probar la segunda parte, definamos las funciones

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt,$$

y sea  $\varepsilon > 0$  fijo. Elegimos un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

para todo  $n > n_0$ ,  $t \in [a, b]$  (se puede hacer por ser  $f_n \rightarrow f$  uniformemente). Si  $x \in [a, b]$ , tenemos que

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g(x)| &\leq \left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

que es la propiedad del enunciado. □

Como toda función continua es integrable, se tiene un corolario inmediato.

**Corolario 3.8.** *Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones tal que  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $[a, b]$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $(f_n)$  converge uniformemente a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  en  $[a, b]$ , entonces,  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

También podemos probar un resultado análogo para el caso de la diferenciabilidad.

**Teorema 3.9.** *Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones tal que  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $\mathcal{C}^1([a, b])$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Supongamos además que  $(f'_n)$  converge uniformemente en  $[a, b]$  y que  $(f_n)$  converge (no necesariamente uniformemente) a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces,  $f$  es diferenciable en  $[a, b]$  y para todo  $x \in [a, b]$*

$$f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

*Demostración.* Supongamos que  $(f'_n)$  converge uniformemente a  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Por el corolario 3.8, para cualquier  $x \in [a, b]$  es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n = \int_a^x F, \tag{3.2}$$

y por el teorema fundamental del cálculo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(a)). \tag{3.3}$$

Como, por hipótesis, cada  $f_n$  es continua:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a), \tag{3.4}$$

y de (3.2), (3.3) y (3.4) resulta:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x F. \tag{3.5}$$

Por otra parte, como cada  $f'_n$  es continua y  $(f'_n)$  converge uniformemente a  $F$ , por el teorema 3.6 es  $F$  continua, luego  $\int_a^x F$  derivable. Entonces, derivando en (3.5):

$$f'(x) = F(x).$$

□

## 3.2. Convergencia uniforme de series de funciones

Consideremos las funciones  $u_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Se tiene definida puntualmente una función  $S_n$  por

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x).$$

Si  $S_n \rightarrow f$  puntualmente en  $[a, b]$  se dice que  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge puntualmente a  $f$  en  $[a, b]$ .

**Definición 3.10.** La serie  $\sum_{n \geq 1} u_n$  se dice que converge uniformemente a una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  en  $[a, b]$  si la sucesión  $(S_n)$ , formada por las funciones sumas parciales

$$S_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

converge uniformemente a  $f$  en  $[a, b]$ .

De nuevo, puede ocurrir que una serie converja puntualmente a una función, pero que no lo haga puntualmente.

**Ejemplo 3.11.** Sea  $[a, b] = [0, 1]$  y consideremos  $u_n(x) = nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2}$ , o sea,

$$u_n(x) = x \left( ne^{-nx^2} - (n-1)e^{-(n-1)x^2} \right),$$

(las series cuyo término general son de este tipo se denominan *telescópicas*). Se tiene que

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n u_k(x) \\ &= xe^{-x^2} + (2xe^{-2x^2} - xe^{-x^2}) + (3xe^{-3x^2} - 2xe^{-2x^2}) + \dots + nxe^{-nx^2} \\ &= nxe^{-nx^2}. \end{aligned}$$

Pero entonces, con  $x \in [0, 1]$ , tomando límites resulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} nxe^{-nx^2} = 0,$$

luego  $(S_n)$  converge puntualmente a la función idénticamente nula en  $[0, 1]$  y podemos decir que  $\sum_{n \geq 1} u_n = 0$  puntualmente. Sin embargo, la convergencia de la serie no es uniforme. De hecho, si fuese  $\sum_{n \geq 1} u_n = 0$  uniformemente en  $[0, 1]$ , tendríamos que fijado un  $\varepsilon > 0$ , existiría un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > n_0$ ,  $|\bar{S}_n(x)| < \varepsilon$  independientemente de  $x \in [0, 1]$ . En particular (tomando  $x = 1/\sqrt{2n}$ ), esto implicaría que:

$$\left| S_n \left( \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \right| = \frac{n}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{n}{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Pero es obvio que eligiendo  $n > n_0$  suficientemente grande (por ejemplo,  $n > 2\varepsilon^2$  o, mejor dicho,  $n > \max\{n_0, 2\varepsilon^2\}$ ) se puede hacer que  $\sqrt{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}} > \varepsilon$ . △

Se tiene, sin embargo, el siguiente corolario del teorema 3.6.

**Teorema 3.12.** Sea  $(u_n)$  una sucesión de funciones tal que  $u_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge uniformemente a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  en  $[a, b]$ , entonces,  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ .

Naturalmente, también están los corolarios de los teoremas 3.7 y 3.9.

**Teorema 3.13.** Sea  $(u_n)$  una sucesión de funciones tal que  $u_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge uniformemente a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  en  $[a, b]$ , entonces,  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Además,

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n = \int_a^b f$$



**Teorema 3.14.** Sea  $(u_n)$  una sucesión de funciones tal que  $u_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $\mathcal{C}^1([a, b])$ ,  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge puntualmente a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y además  $\sum_{n \geq 1} u'_n$  converge uniformemente en  $[a, b]$ . Entonces,  $f'$  es el límite uniforme de  $\sum_{n \geq 1} u'_n$  en  $[a, b]$  y para cada  $x \in [a, b]$ :

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = f'(x).$$

**Nota 3.15.** Estos teoremas se suelen enunciar diciendo que si una serie converge uniformemente, entonces se puede derivar e integrar término a término.

### 3.3. El criterio M de Weierstrass

A continuación veremos un criterio muy útil en la práctica para determinar la convergencia uniforme de una serie, el criterio de mayoración (o criterio M) de Weierstrass.

**Teorema 3.16** (criterio M). Sea  $(u_n)$  una sucesión de funciones tal que  $u_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Si existe una sucesión de números positivos  $(M_n)$  ( $M_n > 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ) tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in [a, b]$  se tiene

$$|u_n(x)| \leq M_n, \quad (3.6)$$

y además,  $\sum_{n \geq 1} M_n$  converge, entonces, la serie  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge uniformemente en  $[a, b]$ .

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in [a, b]$ , consideremos la suma parcial  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ . Llamemos también  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n M_k$ . Si  $m > n$ , se tiene que

$$S_m(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^m u_k(x)$$

y de aquí, tomando valor absoluto y aplicando la desigualdad triangular junto con la hipótesis (3.6):

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k = |s_m - s_n|. \quad (3.7)$$

Sea ahora un  $\varepsilon > 0$  fijo. Como  $\sum_{k=1}^n M_k$  converge, la sucesión de sus colas tiende a 0, luego podemos encontrar un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $m > n > n_0$ , es

$$|s_m - s_n| = s_m - s_n < \varepsilon.$$

Por tanto substituyendo en (3.7), dado  $\varepsilon > 0$  fijo, existe un  $n = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  (independiente de  $x \in [a, b]$ ) tal que si  $m > n > n_0$ , es  $|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ , para todo  $x \in [a, b]$ , es decir, para cada  $x \in [a, b]$ , la sucesión  $(S_n(x))$  es de Cauchy, luego convergente y esto con la misma  $n_0 \in \mathbb{N}$  (independientemente de  $x$ ). Así,  $(S_n(x))$  converge uniformemente.  $\square$

**Ejemplo 3.17.** La serie  $\sum_{n \geq 0} x^n/n!$  converge uniformemente en  $[-1, 1]$ . En efecto:

$$\text{si } -1 \leq x \leq 1: \left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!} = M_n,$$

y es inmediato que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  converge (por ejemplo, por el criterio del cociente); de hecho, una prueba rápida y sucia se basa en que  $e^x$  es una función analítica en toda la recta y, por tanto, coincide con su desarrollo de McLaurin,  $e^x = \sum_{n \geq 0} x^n/n!$ , de donde (evaluando en  $x = 1$ )  $e = \sum_{n \geq 0} 1/n!$ . Así:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

$\triangle$

**Ejemplo 3.18.** Para todo  $p > 1$ , la serie  $\sum_{k \geq 1} \sin kx/k^p$  converge uniformemente en todo  $\mathbb{R}$ . En efecto, se tiene:

$$|u_n(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p} = M_n,$$

donde la serie  $\sum_{n \geq 1} M_n$  es la bien conocida  $p$ -serie, convergente si  $p > 1$  (ejemplo 2.31).  $\triangle$

**Ejemplo 3.19.** Supongamos que  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es una serie de términos positivos convergente. Consideremos la sucesión  $(u_n) = (a_n \cos nx/n)$ . Se tiene entonces que

$$|u_n(x)| = \left| \frac{a_n}{n} \cos nx \right| \leq \frac{a_n}{n}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Llamando  $M_n = a_n/n$ , de la convergencia de  $\sum_{n \geq 1} a_n$  es inmediato que la serie de términos positivos  $\sum_{n \geq 1} M_n$  también converge. Por el criterio M de Weierstrass, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \cos nx$$

es uniformemente convergente en todo  $\mathbb{R}$ . Además, de la serie derivada  $\sum_{n \geq 1} u'_n(x) = \sum_{n \geq 1} -a_n \sin nx$ , también se tiene  $|u'_n(x)| \leq a_n$ , para cualesquiera  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in \mathbb{R}$ . De nuevo el criterio M nos dice que  $\sum_{n \geq 1} u'_n = \sum_{n \geq 1} -a_n \sin nx$  es uniformemente convergente y, por el teorema 3.14, si

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \cos nx,$$

entonces,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-a_n) \sin nx.$$

$\triangle$

### 3.4. Ejercicios

1. Determinar para qué valores de la variable  $x$  las sucesiones de funciones cuyo término general se da a continuación son puntualmente convergentes, y hallar su límite.

(a)

$$f_n(x) = x^{1/(2n-1)}.$$

(b)

$$f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

(c)

$$f_n(x) = \sin nx.$$

2. Probar que la sucesión (1a) del ejercicio precedente no es uniformemente convergente en  $]0, 1[$ , pero sí lo es en cualquier intervalo  $[a, b]$  con  $0 < a < b$ .
3. Probar que la sucesión (1b) del ejercicio 1 no es uniformemente en  $] - 1, 1[$ , pero sí lo es en cualquier intervalo  $[-a, a]$  con  $0 < a < 1$ .
4. Consideremos la serie funcional telescópica con término general

$$f_n(x) = x \left( n^2 e^{-nx} - (n-1)^2 e^{-(n-1)x} \right).$$

- (a) Probar que la serie es puntualmente convergente en  $[0, \infty[$  y hallar su suma.
  - (b) Probar que la serie no es uniformemente convergente en  $[0, \infty[$ .
  - (c) Probar que la serie es uniformemente convergente en cualquier intervalo de la forma  $[a, \infty[$ , para  $a > 0$ .
5. Una sucesión funcional  $(f_n)$ , con  $f_n : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que está *uniformemente acotada* en  $A$  si existe un  $M \geq 0$  tal que  $|f_n(x)| \leq M$  para cualesquiera  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in A$ .
- (a) Probar que si las funciones  $f_n$  están acotadas y la sucesión  $(f_n)$  es uniformemente convergente en  $A$ , entonces  $(f_n)$  está uniformemente acotada en  $A$ .
  - (b) Probar que si las funciones  $f_n$  están acotadas y la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$  es uniformemente convergente en  $A$ , entonces, la sucesión  $(S_k)$  de sumas parciales está uniformemente acotada en  $A$ .
6. Consideremos la sucesión de funciones con término general

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{n^2 + x^2}.$$

- (a) Demostrar que  $(f_n)$  es convergente en  $\mathbb{R}$  y hallar su límite.
- (b) Probar que  $(f_n)$  no es uniformemente convergente en  $\mathbb{R}$ .
- (c) Comprobar que, si  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ,

$$\int_0^x f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f_n,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  (esto muestra que la convergencia uniforme no es una condición *necesaria* para el intercambio de límite e integral).

7. Se considera la sucesión de funciones con término general

$$f_n(x) = x - \frac{x^n}{n}.$$

- (a) Determinar los valores  $x \in \mathbb{R}$  para los cuales  $(f_n)$  converge y calcular el límite  $f = \lim_n f_n$ .
- (b) Estudiar la convergencia uniforme de  $(f_n)$ .
- (c) Hallar los valores  $x \in \mathbb{R}$  para los cuales  $(f'_n)$  converge y calcular el límite  $g = \lim_n f'_n$ .
- (d) Calcular  $f'$  y compararla con  $g$ .

# 4

## Series de Fourier

Como se discutió en el capítulo introductorio, a toda función  $f$ , periódica con periodo  $T = 2\pi$ , se le puede asociar una serie trigonométrica

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt), \quad (4.1)$$

llamada la *serie de Fourier* de  $f$ . Hay dos cuestiones importantes referentes a esta asociación. La primera es cómo calcular los coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$ , y la segunda es qué relación existe entre los valores de  $f(t)$  y la suma de la serie para cada  $t$  (en caso de que sea convergente). La segunda es de carácter teórico y mucho más difícil que la primera, por lo que le dedicaremos el capítulo siguiente. Ahora, lo que nos va a interesar es cómo obtener  $a_n$ ,  $b_n$ .

Las referencias utilizadas para la elaboración de este capítulo son [1, 2, 5, 6]. La primera y la última contienen numerosos ejemplos resueltos.

### 4.1. Coeficientes de Fourier

Veamos un argumento heurístico que nos conducirá a las expresiones

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt dt, \quad n \geq 1,$$

para los *coeficientes de Fourier* asociados a  $f$ . El cálculo que haremos se basará en las llamadas *relaciones de ortogonalidad* de las funciones trigonométricas:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt dt = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nt \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nt dt = \frac{1}{n} (-\cos nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

de las cuales se deducen

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \operatorname{sen} mt dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen}(m-n)t + \operatorname{sen}(m+n)t) dt = 0; \quad \forall n, m \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)t + \cos(m+n)t) dt = 0; \quad \forall n \neq m \\ \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nt \operatorname{sen} mt dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)t - \cos(m+n)t) dt = 0; \quad \forall n \neq m. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para el caso  $n = m$  se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mt \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2mt) \, dt = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2 mt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2 mt) \, dt = \pi.$$

Supongamos que en (4.1) se da la igualdad. Integrando ambos miembros y *admitiendo que se puede intercambiar el orden de integración con la suma de la serie*<sup>1</sup>:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen} nt \, dt \right) = \frac{a_0}{2} 2\pi = a_0 \pi.$$

Multiplicando (4.1) por  $\cos mt$  e integrando:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt \, dt = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos mt \, dt = a_m \pi.$$

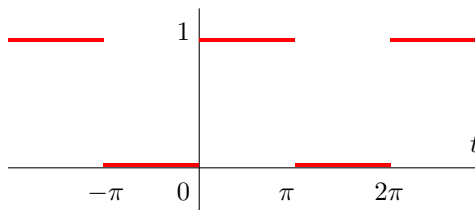
Finalmente, multiplicando (4.1) por  $\text{sen} mt$  e integrando:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{sen} mt \, dt = b_m \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen} mt \text{sen} mt \, dt = b_m \pi.$$

**Nota 4.1.** Las integrales no cambian si se realizan entre otros extremos siempre que éstos definan un periodo de  $f$ .

**Ejemplo 4.2.** Consideremos la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t \leq 0 \\ 1 & 0 < t \leq \pi, \end{cases}$$



extendida periódicamente con periodo  $2\pi$  (esta función se conoce como un *pulso cuadrado*). Se tiene, por cálculo directo, para  $n \neq 0$ ,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 \, dt + \int_0^{\pi} \cos nt \, dt \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen} nt}{n} \Big|_0^{\pi} = 0.$$

Para  $n = 0$  la expresión precedente no es válida (se anula el denominador), de modo que el cálculo debe hacerse aparte:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \, dt = \frac{1}{\pi} \pi = 1.$$

Para calcular  $b_n$  hacemos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{sen} nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen} nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{-\cos nt}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} [ -(-1)^n + 1 ]. \end{aligned}$$

O sea:

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2/n\pi & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

<sup>1</sup>El estudio de las condiciones bajo las cuales este paso es posible ocupará el siguiente capítulo.

Con todo esto, la serie de Fourier del pulso cuadrado es

$$f(t) \simeq \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \operatorname{sen}(2k-1)t.$$

△

**Ejemplo 4.3.** Consideremos la función *onda parabólica*  $f(t) = t^2$ , en  $] -\pi, \pi[$  y extendida periódicamente con periodo  $2\pi$ . En este caso:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

También, para  $a_n$  con  $n \geq 1$ , una integración por partes muestra que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos nt dt = \frac{4\pi(-1)^n}{n^2}.$$

Un cálculo análogo nos proporciona

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin nt dt = 0.$$

En definitiva, para la onda parabólica la serie de Fourier es

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi(-1)^n}{n^2} \cos nt.$$

△

## 4.2. Periodos arbitrarios

Hasta ahora hemos considerado el caso en que la función a estudiar es periódica de periodo  $T = 2\pi$ . ¿Qué ocurre si el periodo  $T$  es arbitrario?. Para verlo, sea  $f$  una función periódica de periodo  $T$ , es decir,  $f(t+T) = f(t)$  para todo  $t$ . Haciendo el cambio  $t = \frac{T}{2\pi}u$  resulta una nueva función  $\tilde{f}(u) = f(\frac{T}{2\pi}u)$  periódica de periodo  $2\pi$ :

$$\tilde{f}(u + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(u + 2\pi)\right) = f(t + T) = f(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}u\right) = \tilde{f}(u).$$

Entonces, tendremos el desarrollo

$$f\left(\frac{T}{2\pi}u\right) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nu + b_n \operatorname{sen} nu).$$

Deshaciendo el cambio, resulta la serie de Fourier de una función periódica con periodo  $T$  arbitrario:

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t + b_n \operatorname{sen} n \frac{2\pi}{T} t \right), \quad (4.3)$$

siendo

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt, \quad n \geq 0, \quad (4.4)$$

y

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen} n \frac{2\pi}{T} t dt, \quad n \geq 1. \quad (4.5)$$

**Ejemplo 4.4.** Para la función  $f(t) = t$  en el intervalo  $] - 2, 2[$  y extendida periódicamente con periodo  $T = 4$ , los coeficientes de Fourier son, en el caso de los  $a_n$ :

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 t \, dt = 0, \quad a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 t \cos n \frac{\pi}{2} t \, dt = 0,$$

y para los  $b_n$ :

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 t \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2} t \, dt = \frac{1}{2} \left[ t \frac{2}{n\pi} (-\cos n \frac{\pi}{2} t) \Big|_{-2}^2 + \frac{2}{n\pi} \int_{-2}^2 \cos n \frac{\pi}{2} t \, dt \right] = \frac{4}{n\pi} (-1)^{n-1},$$

con lo que se obtiene el desarrollo en serie de Fourier

$$f(t) \simeq \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2} t.$$

△

**Ejemplo 4.5.** La función  $f(t) = t - [t]$ , es periódica con periodo  $T = 1$ . Considerando el intervalo  $]0, 1[$  en el cual  $f(t) = t$  se obtiene:

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 t \, dt = 1, \quad a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 t \cos n2\pi t \, dt = 0, \quad b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 t \operatorname{sen} n2\pi t \, dt = -\frac{1}{n\pi},$$

luego la serie de Fourier asociada a  $f$  será

$$f(t) \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} 2\pi n t.$$

△

### 4.3. Paridad y desarrollo en semiintervalos

Las funciones con paridad definida admiten desarrollos en serie de Fourier particularmente sencillos. Esto se debe a que, si  $f_p$  es una función par el valor de su integral en un intervalo simétrico alrededor del origen es el doble que en uno de los semintervalos:

$$\int_{-a}^a f(t) \, dt = 2 \int_0^a f(t) \, dt, \quad (4.6)$$

mientras que si  $f$  es impar, su integral en un intervalo simétrico se anula:

$$\int_{-a}^a f(t) \, dt = \int_{-a}^0 f(t) \, dt + \int_0^a f(t) \, dt = -\int_0^a f(t) \, dt + \int_0^a f(t) \, dt = 0. \quad (4.7)$$

Resulta entonces que una función par sólo tiene términos con cosenos en su desarrollo de Fourier, mientras que una función impar sólo tiene términos con senos, como se pudo comprobar en el ejemplo 4.3. Éste es el contenido del siguiente resultado.

**Teorema 4.6.** Sea  $f$  una función periódica con periodo  $T$ . Si  $f$  es par su serie de Fourier asociada es

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t \quad (4.8)$$

donde

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t \, dt, \quad n \geq 0.$$

Si  $f$  es impar su serie de Fourier es

$$f(t) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n \frac{2\pi}{T} t \quad (4.9)$$

donde

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \operatorname{sen} n \frac{2\pi}{T} t dt, \quad n \geq 1.$$

*Demostración.* Si  $f$  es par, el producto  $f(t) \operatorname{sen} n \frac{2\pi}{T} t$  es impar, mientras que  $f(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t$  es par, así que:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen} n \frac{2\pi}{T} t dt = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt.$$

El cálculo si  $f$  es impar es análogo, teniendo en cuenta que ahora el producto  $f(t) \operatorname{sen} n \frac{2\pi}{T} t$  es par y  $f(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t$  es impar.  $\square$

**Ejemplo 4.7.** La función  $f(t) = t$  en  $] -\pi, \pi]$ , prolongada con periodo  $2\pi$ , define un tipo de señal que se denomina *diente de sierra*. Se trata de una función obviamente impar, de modo que para calcular su serie de Fourier sólo hay que considerar los coeficientes  $b_n$ . Ahora bien:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \operatorname{sen} nt dt = 2 \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

de modo que

$$f(t) \simeq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{sen} nt.$$

$\triangle$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la linealidad de la integral.

**Proposición 4.8.** *Los coeficientes de Fourier  $a_n, b_n$ , de una función definida como una suma  $f = f_1 + f_2$ , son la suma de los correspondientes coeficientes de  $f_1$  y  $f_2$  en el mismo intervalo.*

*Demostración.* En efecto, basta considerar que, por ejemplo

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) \cos ntdt + \int_{-\pi}^{\pi} f_2(t) \cos ntdt = (a_1)_n + (a_2)_n.$$

Lo mismo ocurre con los coeficientes  $b_n$ .  $\square$

Este resultado se puede aplicar a funciones expresadas como superposición de dos que tienen simetría definida. De hecho, toda función se puede expresar como suma de una par y una impar (con la descomposición  $f(x) = (f(x) + f(-x))/2 + (f(x) - f(-x))/2$ ).

**Ejemplo 4.9.** Consideremos las funciones

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{si } -\pi < x < 0, \\ k & \text{si } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

y

$$g(x) = f(x) + k = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0, \\ 2k & \text{si } 0 < x < \pi, \end{cases}$$



La función  $f$  es impar, de modo que su desarrollo sólo contiene senos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

donde

$$b_n = - \int_{-\pi}^0 k \sin nx dx + \int_0^{\pi} k \sin nx dx = 2 \left( \frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n} \right).$$

O sea:

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases}$$

que conduce al desarrollo

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Como consecuencia de la proposición, para el pulso rectangular  $g$  tenemos que

$$g(x) = f(x) + k = k + \frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

△

Si tenemos una función definida en un semiintervalo de la forma  $]0, L[$ , y queremos representarla mediante una serie de Fourier, hay dos formas de hacerlo. Una de ellas es extender  $f$  a todo el intervalo  $] -L, L[$  de manera par y luego a todo  $\mathbb{R}$  con periodo  $2L$ , lo cual conducirá a una serie de Fourier en cosenos, y la otra es extender  $f$  de manera impar a  $] -L, L[$  y luego periódicamente con periodo  $2L$  a todo  $\mathbb{R}$ , lo cual dará lugar a una serie de Fourier en senos, según se acaba de ver en el apartado precedente.

En el primer caso, de acuerdo con las fórmulas para el desarrollo con periodo arbitrario (4.8), tendremos

$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{\pi}{L} x \quad , \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos n \frac{\pi}{L} x dx, \quad n \geq 0,$$

y en el segundo

$$f(x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \frac{\pi}{L} x \quad , \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin n \frac{\pi}{L} x dx, \quad n \geq 1.$$

**Ejemplo 4.10.** Desarrollemos  $f(x) = x$  en el intervalo  $]0, 2[$ . En primer lugar, en serie de cosenos; tenemos que haciendo  $L = 2$  en las fórmulas anteriores:

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2,$$

y también, para  $n \geq 1$ , integrando por partes,

$$a_n = \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1).$$

Así, podemos escribir

$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2}.$$

Por lo que respecta al desarrollo en serie de senos, tenemos

$$b_n = \int_0^2 t \sin \frac{n\pi x}{2} dx = -\frac{4}{n\pi}(-1)^n,$$

y por tanto:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

△

**Nota 4.11.** Dado que tenemos la posibilidad de hacer dos desarrollos distintos para la misma función, cabe preguntarse cuál de los dos converge más rápidamente desde el punto de vista numérico. En general, la respuesta depende de las características de la función. En el ejemplo precedente, converge más rápidamente el desarrollo en cosenos, a la vista de los denominadores de los coeficientes en ambas series.

#### 4.4. Series de Fourier complejas

La serie de Fourier compleja busca un desarrollo para  $f$  no en términos de funciones trigonométricas, sino de la exponencial compleja, en la forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

donde ahora los  $c_n$  son números *complejos*.

Utilizando las conocidas fórmulas de Euler

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

podemos hacer las sustituciones siguientes en la serie de Fourier para  $f$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \end{aligned}$$

siendo

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & \text{si } n = 0, \\ \frac{a_n - ib_n}{2} & \text{si } n = 1, 2, 3, \dots \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & \text{si } n = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

Teniendo en cuenta las expresiones explícitas para los coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$  en términos de  $f$ , podremos poner para  $n$  positivo

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx - i \sin nx) f(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} f(x) dx. \end{aligned}$$

Para  $n$  negativo el cálculo es completamente análogo:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n + ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(-nx) + i \sin(-nx)) f(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx. \end{aligned}$$

En definitiva, el cálculo de los coeficientes complejos de Fourier se puede hacer como

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx,$$

expresión que es válida tanto para  $n = 0$  como para valores positivos y negativos.

El siguiente ejemplo ilustra algunas dificultades que pueden surgir al calcular una serie de Fourier compleja (que son parecidos a los que se dan al calcular  $a_0$  y  $a_n$  con  $n \geq 1$  en series reales).

**Ejemplo 4.12.** Supongamos que queremos desarrollar en serie compleja de Fourier la función  $f(t) = \sin t$ , que es periódica con periodo  $2\pi$ . Calculamos:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \sin(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{i\pi n} - e^{-i\pi n}}{n^2 - 1} \right). \end{aligned}$$

Esta expresión es cero a no ser que  $n = 1$  ó  $n = -1$ . Pero en estos dos casos, el denominador se anula y por tanto no es válida. ¿Cómo obtener  $c_1$  y  $c_{-1}$ ? Una manera de hacerlo consiste en hacer el cálculo para  $c = 1 + \delta$  (y  $c = -1 + \delta$ ) y luego tomar el límite con  $\delta \rightarrow 0$  en el resultado. Por ejemplo, para  $c_1$  procederíamos como sigue:

$$\begin{aligned} c_{1+\delta} &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{i\pi(1+\delta)} - e^{-i\pi(1+\delta)}}{(1+\delta)^2 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{-e^{i\pi\delta} + e^{-i\pi\delta}}{(1+\delta)^2 - 1} \right). \end{aligned}$$

Haciendo uso de que  $\cos \delta \rightarrow 1$  y  $\sin \delta \rightarrow 0$  si  $\delta \rightarrow 0$ , podemos poner

$$\begin{aligned} c_{1+\delta} &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \left( \frac{-1 - i\pi\delta + 1 - i\pi\delta}{1 + 2\delta - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{-2i\pi\delta}{2\delta} \right) \\ &= \frac{1}{2i}. \end{aligned}$$

Un cálculo completamente análogo muestra que

$$c_{-1} = -\frac{1}{2\pi}.$$

Con esto, la serie de Fourier compleja de  $\sin t$  es la que cabía esperar:

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}.$$

△

Haciendo la misma sustitución de las fórmulas de Euler en las expresiones para la serie de Fourier real con un periodo  $T$  arbitrario, llegamos a las expresiones

$$f(x) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x},$$

donde los coeficientes están dados por

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dx.$$

## 4.5. Ejercicios

1. Dibujar las gráficas de las funciones siguientes y calcular las series de Fourier correspondientes:

a)

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

b)

$$f(t) = |t|, \quad t \in ]-1, 1[$$

c)

$$f(t) = t, \quad t \in ]-\pi, \pi[$$

d)

$$f(t) = t^3, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

2. Calcular el desarrollo de Fourier de  $f(t) = e^t$  en  $] -1, 2[$ .

3. Determinar un polinomio de tercer grado definido en  $] -\pi, \pi[$  sabiendo que admite el siguiente desarrollo en serie de Fourier:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \sin nt}{n^3}$$

4. Desarrollar en serie de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{si } |t| < \epsilon \\ 0 & \text{si } \epsilon < |t| < \pi \end{cases}$$

y estudiar el comportamiento de la serie cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

5. Desarrollar en serie de Fourier las funciones siguientes:

a) Onda semirectificada:

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{si } -\pi \leq t < 0. \end{cases}$$

b) Onda rectificada

$$f(t) = |\sin t|.$$

c) La función

$$f(t) = \sin t,$$

en serie de cosenos en el intervalo  $[0, \pi]$ .

6. Demostrar que

$$t \cos t \simeq -\frac{1}{2} \sin t + 2 \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n n \sin nt}{n^2 - 1}, \quad -\pi < t < \pi.$$

7. Una función  $f(t)$  definida sobre  $\mathbb{R}$  se dice que es *antiperiódica* si  $f(t+T) = -f(t)$  para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ . Se pide:

a) Probar que una función antiperiódica es periódica de período  $2T$ .

b) Probar que la serie de Fourier asociada es de la forma:

$$\sum_{r \geq 1} \left\{ a_{2r-1} \cos \frac{(2r-1)\pi t}{T} + b_{2r-1} \sin \frac{(2r-1)\pi t}{T} \right\}.$$

c) Hallar la serie de Fourier de la función

$$\begin{cases} f(t) = t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ f(t+1) = -f(t). \end{cases}$$

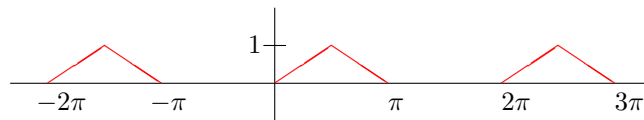
8. a) Probar que si una función  $f(t)$ , definida sobre  $(-\pi, \pi)$ , verifica

$$\begin{cases} f(t) = f(\pi - t) & \text{si } t > 0 \\ f(t) = f(-\pi - t) & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

entonces su desarrollo en serie de Fourier es de la forma

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k \geq 1} a_{2k} \cos 2kt + \sum_{k \geq 1} b_{2k-1} \sin(2k-1)t.$$

b) Aplicar (a) para calcular la serie de Fourier trigonométrica de la onda periódica dada por la figura:



9. Desarrollar en serie de senos y en serie de cosenos la función siguiente:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 < t < 1 \\ 2-t & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$$

10. Sea  $f(t) = 1+t$  para  $0 \leq t \leq 1$ . Desarrollar  $f(t)$  en serie de senos y en serie de cosenos en el intervalo  $]0, 1[$ . Representar gráficamente la suma en cada caso.

11. Desarrollar en serie compleja de Fourier:

a) La función

$$f(t) = t^2 \quad -\pi < t < \pi$$

extendida periódicamente a todo  $\mathbb{R}$ .

b) La función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{si } \pi/2 < |t| < \pi \end{cases}$$

12. Demostrar que el desarrollo de la función  $f(t) = \cos \lambda t$  ( $\lambda \notin \mathbb{Z}$ ), para  $t \in [-\pi, \pi]$ , en serie exponencial compleja viene dado por

$$\frac{\sin \lambda \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda}{\lambda^2 - k^2} e^{ikt}.$$

Deducir que

$$\pi \cot \lambda \pi = \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2 - k^2}.$$

13. a) Hallar el desarrollo en serie de Fourier compleja de la función  $f(t) = e^t$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

b) Expresar la serie anterior en forma trigonométrica.

c) Establecer la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$$

y calcular su suma.



# 5

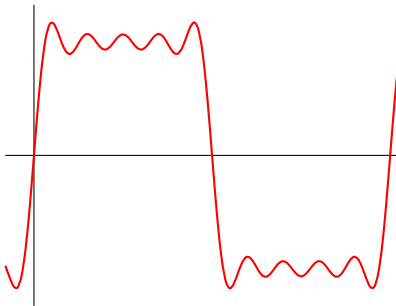
## Convergencia de la serie de Fourier

Este capítulo forma la parte central del curso desde el punto de vista matemático. En él veremos un conjunto de condiciones (no las más generales, pero si de suficiente alcance para las aplicaciones en física e ingeniería) bajo las cuales se puede asegurar que la serie de Fourier asociada a una función  $f$  converge y, además, lo hace a la propia función. Naturalmente, este comportamiento depende de cuál sea la noción de convergencia de la que se hable. Aquí se tratará la convergencia puntual, la convergencia en media cuadrática y la uniforme, que son las más importantes en la práctica.

Las referencias más apropiadas para este capítulo son [2, 5], particularmente esta última por la gran cantidad de comentarios de carácter técnico y ejemplos que contiene.

### 5.1. Convergencia puntual. Núcleo de Dirichlet

Dada una serie trigonométrica, lo primero que a uno se le ocurre es analizar su posible convergencia puntual; para ello, como sabemos, hay que considerar el límite de las sumas parciales. La figura muestra el comportamiento típico de las sucesivas aproximaciones mediante sumas parciales de la serie de Fourier para un pulso cuadrado (se representa la serie de Fourier truncada en el quinto término):



El núcleo de Dirichlet es básicamente la función determinada por las sumas parciales  $S_n^{-1}$ , así que será la herramienta básica en nuestro estudio. Supongamos entonces una función  $f(t)$  continua a trozos y periódica

---

<sup>1</sup>En realidad, como veremos enseguida, el “núcleo de Dirichlet” es una familia de funciones  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una para cada  $n \in \mathbb{N}$ , que expresan las sumas parciales como un cociente de funciones trigonométricas.



con periodo  $2\pi$ . Tendrá asociada una serie trigonométrica de Fourier

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

en la cual

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

Así, se puede escribir

$$\begin{aligned} S_k(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^k \int_{-\pi}^{\pi} [\cos ny \cos nt + \sin ny \sin nt] dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos(n(y-t)) \right] dy. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Ahora, de la conocida identidad trigonométrica  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$ , resulta que, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  y cualquier  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$2 \sin \frac{\theta}{2} \cos n\theta = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) - \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta\right).$$

De aquí:

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n\theta \right] &= \sin \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^k 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos n\theta \\ &= \sin \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^k \left[ \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) - \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta\right) \right] \\ &= \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} + \cdots + \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\theta - \sin\left(k - \frac{3}{2}\right)\theta + \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\theta. \end{aligned}$$

Agrupando términos, obtenemos

$$2 \sin \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n\theta \right] = \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta = \sin \frac{2k+1}{2}\theta,$$

luego despejando, se tiene la siguiente función llamada el  $k$ -ésimo núcleo de Dirichlet:

$$D_k(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos n\theta = \frac{\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2 \sin \frac{\theta}{2}}. \quad (5.2)$$

Sustituyendo en (5.1) se obtiene una expresión analítica<sup>2</sup> para la suma parcial  $k$ -ésima de la serie trigonométrica asociada a  $f(t)$ :

$$S_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_k(y-t) dy. \quad (5.3)$$

---

<sup>2</sup>Se verá más adelante (en el apartado 8.3) que esta fórmula es un ejemplo típico de convolución, en este caso entre las funciones  $f(t)$  y  $D_k(\theta)$ .

**Nota 5.1.** Del hecho de que  $D_k$  está definido en términos de la función seno, resulta inmediato que es una función periódica y además (como se ve de su expresión explícita (5.2)), de periodo  $2\pi$ . Como consecuencia, de (5.3) se ve que  $S_k(t + 2\pi) = S_k(t)$ , es decir las sumas parciales de la serie de Fourier asociada a  $f(t)$  también son periódicas con periodo  $2\pi$ .

Ahora haciendo el cambio de variable  $y - t = s$  se obtiene:

$$S_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_k(y - t) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(s + t) D_k(s) ds. \quad (5.4)$$

Como  $f$  y  $D_k$  son ambas periódicas con periodo  $2\pi$ , también lo es esta última integral (como función de  $t$ ), de modo que el intervalo de integración puede desplazarse de  $\int_{-\pi-t}^{\pi-t}$  a  $\int_{-\pi}^{\pi}$  sin que se altere la integral. Así se llega a la *fórmula de Dirichlet* para las sumas parciales de una serie trigonométrica:

$$S_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s + t) D_k(s) ds. \quad (5.5)$$

Para continuar, necesitaremos un resultado técnico.

**Lema 5.2** (Riemann-Lebesgue). *Si  $f(t)$  es una función continua a trozos, entonces*

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin \omega t dt = 0,$$

y

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos \omega t dt = 0.$$

*Demostración.* Si hacemos el cambio de variable  $t = s + \frac{\pi}{\omega}$ , resulta:

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \int_a^b f(t) \sin \omega t = \int_{a-\frac{\pi}{\omega}}^{b-\frac{\pi}{\omega}} f\left(s + \frac{\pi}{\omega}\right) \sin(\omega s + \pi) ds \\ &= - \int_{a-\frac{\pi}{\omega}}^{b-\frac{\pi}{\omega}} f\left(s + \frac{\pi}{\omega}\right) \sin(\omega s) ds. \end{aligned}$$

Sumando esta expresión para la integral  $I(\omega)$  con la original

$$I(\omega) = \int_a^b f(s) \sin \omega s ds,$$

resulta:

$$\begin{aligned} 2I(\omega) &= \int_a^b f(s) \sin \omega s ds - \int_{a-\frac{\pi}{\omega}}^{b-\frac{\pi}{\omega}} f\left(s + \frac{\pi}{\omega}\right) \sin \omega s ds \\ &= - \int_{a-\frac{\pi}{\omega}}^a f\left(s + \frac{\pi}{\omega}\right) \sin \omega s ds + \int_{b-\frac{\pi}{\omega}}^b f(s) \sin \omega s ds \\ &\quad + \int_a^{b-\frac{\pi}{\omega}} (f(s) - f\left(s + \frac{\pi}{\omega}\right)) \sin \omega s ds. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Supongamos que  $f(s)$  es continua. Como  $[a, b]$  es compacto, existe una cota  $M > 0$  tal que  $|f(s)| \leq M$ , para todo  $s \in [a, b]$ . De aquí:

$$\left| \int_{a-\frac{\pi}{\omega}}^a f\left(s + \frac{\pi}{\omega}\right) \sin \omega s ds \right| = \left| \int_a^{a+\frac{\pi}{\omega}} f(s) \sin \omega s ds \right| \leq \frac{\pi}{\omega} M,$$

y análogamente

$$\left| \int_{b-\frac{\pi}{\omega}}^b f(s) \sin \omega s \, ds \right| \leq \frac{\pi}{\omega} M.$$

Con esto, sustituyendo en (5.6):

$$|I(\omega)| \leq \frac{\pi}{\omega} M + \frac{1}{2} \int_a^{b-\frac{\pi}{\omega}} |f(s) - f(s + \frac{\pi}{\omega})| \, ds.$$

Pero al ser  $f$  continua en  $[a, b]$ , es uniformemente continua, por lo que dado un  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|s - u| < \delta$ , es  $|f(s) - f(u)| < \varepsilon$ . Sea  $\omega > 0$  suficientemente grande como para que si  $\omega > \omega_0$  se cumplan ambas condiciones,

$$\frac{\pi}{\omega} M < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{\omega} < \delta.$$

Entonces, si  $\omega > \omega_0$  resulta que, para cualquier  $\varepsilon > 0$  dado previamente:

$$|I(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2} + \int_b^{a-\frac{\pi}{\omega}} \frac{\varepsilon}{2(b-a-\frac{\pi}{\omega})} \, ds = \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \frac{b-\frac{\pi}{\omega}-a}{2(b-\frac{\pi}{\omega}-a)} = \varepsilon$$

Ahora, si  $f(s)$  es continua a trozos, basta con repetir la prueba precedente en cada subintervalo de  $[a, b]$  en el que  $f(s)$  es continua. La demostración para  $J(\omega) = \int_a^b f(s) \cos \omega s \, ds$  es idéntica.  $\square$

**Corolario 5.3.** *Sea  $f(t)$  continua a trozos. Entonces, si*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} \, dt,$$

es

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} F(\omega) = 0.$$

*Demostración.* Para cualquier  $\delta > 0$  se tiene que

$$F_\delta(\omega) = \int_{-\delta}^{\delta} f(t) e^{-j\omega t} \, dt = \int_{-\delta}^{\delta} f(t) \cos \omega t \, dt - i \int_{-\delta}^{\delta} f(t) \sin \omega t \, dt.$$

Aplicando el lema,  $\lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} F_\delta(\omega) = 0$ , para todo  $\delta > 0$ . Teniendo en cuenta ahora que

$$F(\omega) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} F_\delta(\omega),$$

y que los límites se pueden intercambiar por la continuidad del integrando, se sigue el resultado.  $\square$

Ya estamos en condiciones de probar el teorema de Dirichlet relativo a la convergencia puntual de una serie trigonométrica.

**Teorema 5.4 (Dirichlet).** *Sea  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  una función tal que su derivada  $f'(t)$  existe y es continua salvo en un número finito de puntos. Supongamos además que  $f$  está extendida periódicamente a todo  $\mathbb{R}$  con periodo  $2\pi$ . Entonces, para todo  $t \in \mathbb{R}$  la serie de Fourier asociada a  $f(t)$  converge puntualmente:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)),$$

donde  $f(t^\pm) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(t \pm \varepsilon)$  son los límites laterales de  $f$  en  $t$ .

*Demostración.* Separamos la fórmula de Dirichlet para la suma parcial  $S_k(t)$  como

$$S_k(t) = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 f(s+t) D_k(s) ds + \int_0^\pi f(s+t) D_k(s) ds \right) = I_k(t) + J_k(t),$$

y las calculamos por separado:

$$\begin{aligned} I_k(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (f(t^-) - f(t^-) + f(s+t)) D_k(s) ds \\ &= \frac{f(t^-)}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_k(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (f(s+t) - f(t^-)) D_k(s) ds. \end{aligned}$$

En esta última expresión, como el integrando  $D_k(s)$  es par (esto es inmediato a partir de (5.2)) podemos poner

$$I_k(t) = \frac{f(t^-)}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi D_k(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (f(s+t) - f(t^-)) D_k(s) ds. \quad (5.7)$$

Ahora observemos que la función de  $s$  dada por  $(f(s+t) - f(t^-))/2 \sin(s/2)$  es continua a trozos; en efecto el único punto conflictivo es el  $s = 0$ , pero se tiene que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s+t) - f(t^-)}{2 \sin \frac{s}{2}} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{f(s+t) - f(t^-)}{s} \frac{\frac{s}{2}}{\sin \frac{s}{2}} \right] = f'(t^-) \cdot 1 = f'(t^-),$$

que existe por hipótesis. Por otra parte, en los ejercicios se propone probar que

$$\int_{-\pi}^\pi D_k(s) ds = \pi.$$

Teniendo presentes estos resultados y el lema de Riemann-Lebesgue, calculamos el límite  $\lim_{k \rightarrow +\infty} I_k(t)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} I_k(t) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(t^-)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(s+t) - f(t^-)}{2 \sin \frac{s}{2}} \sin((k + \frac{1}{2})s) ds \right) \\ &= f(t^-) + \frac{1}{\pi} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^0 \frac{f(s+t) - f(t^-)}{2 \sin \frac{s}{2}} \sin((k + \frac{1}{2})s) ds = \frac{f(t^-)}{2}. \end{aligned}$$

Un cálculo completamente análogo muestra que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} J_k(t) = \frac{f(t^+)}{2},$$

de donde se sigue el enunciado. □

**Nota 5.5.** En particular, la serie de Fourier de una función  $f(t)$  cuya derivada existe y es continua salvo un conjunto de puntos finitos, converge al valor de la función en cada uno de los puntos en los que ésta es continua.

Ahora podemos aclarar el uso del símbolo  $\simeq$  entre  $f(t)$  y su desarrollo en serie de Fourier. Podremos decir que  $f$  es *igual* a su serie de Fourier cuando  $f$  satisfaga las condiciones de Dirichlet y además sea continua. Así ocurre en el ejemplo 4.3, pero no en el ejemplo 4.7, pues la función  $f(t) = t$  en  $] -\pi, \pi]$  no coincide con su serie de Fourier en los puntos  $t = (2k-1)\pi$ , en los que la serie toma el valor  $(f(\pi^+) + f(\pi^-))/2 = (-\pi + \pi)/2 = 0$ , mientras que la función vale  $(2k-1)\pi$  en ellos.

Como una aplicación curiosa, el teorema precedente permite calcular sumas de series.

**Ejemplo 5.6.** Consideremos la función  $f(t) = |t|$  en  $] -\pi, \pi]$ , cuya serie de Fourier es:

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)t.$$

En  $t = 0$  la función es continua, luego su valor coincide con la suma de la serie,

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

△

## 5.2. Convergencia en media cuadrática. Espacios de Hilbert

Una de las formas más interesantes de medir cómo la serie de Fourier aproxima *globalmente* a la función, y la más relevante desde el punto de vista físico, es la convergencia *en media cuadrática*, en la que lo importante es el comportamiento cuando  $k \rightarrow \infty$  del *error cuadrático (total)*  $E(k)$  (nótese que depende del  $k$  de truncamiento)

$$E(k) = \int_{-\pi}^{\pi} (S_k(t) - f(t))^2 dt, \quad (5.8)$$

(a veces también se escribe  $E_k$ ) o, equivalentemente, del *error cuadrático medio*  $\bar{E}(k)$ , que es lo mismo pero dividido por la longitud del periodo:

$$\bar{E}(k) = \frac{1}{2\pi} E(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (S_k(t) - f(t))^2 dt.$$

Ambas expresiones proporcionan medidas del error cometido en un periodo al aproximar la función  $f$  mediante una suma parcial  $S_k$  de la serie de Fourier. La clase de funciones en la que estas nociones tienen sentido de manera natural es  $L^2([-\pi, \pi])$ , la clase de las *funciones de cuadrado integrable*: aquellas para las cuales

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt < \infty.$$

En términos físicos, esta condición significa que la señal  $f$  es de *energía finita*. De hecho, los errores  $E(k)$  y  $\bar{E}(k)$  se interpretan físicamente como la medida de la diferencia entre la función y su aproximación mediante la suma parcial de la serie, es decir, la energía (o energía media) del error cometido en la aproximación.

En este contexto, una propiedad fundamental de la serie de Fourier es que proporciona la *mejor aproximación en media cuadrática*, es decir, la que minimiza el error cuadrático, de entre todas las posibles series trigonométricas.

**Proposición 5.7.** *La mejor aproximación en media cuadrática de una función  $f(t)$  mediante una combinación lineal de la forma*

$$T_k(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^k (c_n \cos nt + d_n \sin nt)$$

*se obtiene cuando los coeficientes son los de Fourier:  $c_0 = a_0$ ,  $c_n = a_n$  y  $d_n = b_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ ; en otras palabras, cuando  $T_k = S_k$ .*

*Demostración.* Consideremos la siguiente función de los parámetros  $a_0, a_n, b_n$ :

$$\Phi_k(a_0, a_n, b_n) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - T_k(t))^2 dt$$

(realmente, para cada  $k \in \mathbb{N}$  es  $\Phi_k = \Phi_k(a_0, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k)$ ). Buscamos precisamente los valores de los parámetros que hacen que esta función (que es definida positiva) tenga un mínimo.

Fijando un valor de  $k \in \mathbb{N}$ , una condición necesaria será que las primeras derivadas evaluadas en esos valores de los parámetros se anulen. Calculamos entonces las primeras derivadas de  $\Phi_k$ , teniendo en cuenta las relaciones de ortogonalidad entre las funciones trigonométricas (4.2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_k}{\partial c_0} &= - \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(t) - \frac{c_0}{2} - \sum_{n=1}^k (c_n \cos nt + d_n \sin nt) \right\} dt = - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \pi c_0 \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial c_p} &= -2 \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(t) - \frac{c_0}{2} - \sum_{n=1}^k (c_n \cos nt + d_n \sin nt) \right\} \cos pt dt = -2 \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos pt dt + 2\pi c_p \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial d_q} &= -2 \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(t) - \frac{c_0}{2} - \sum_{n=1}^k (c_n \cos nt + d_n \sin nt) \right\} \sin qt dt = -2 \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin qt dt + 2\pi d_q.\end{aligned}$$

Estas derivadas se anulan cuando los coeficientes valen precisamente

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = a_0 \\ c_p &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos pt dt = a_p \\ d_q &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin pt dt = b_q.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Nos falta comprobar que efectivamente estos valores proporcionan un mínimo de  $\Phi_k$  (y no simplemente un punto crítico). Para ello recurrimos a las derivadas segundas, que en este caso se calculan de manera inmediata a partir de (5.9):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial c_0^2} &= \pi \\ \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial c_p^2} &= 2\pi = \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial d_q^2}.\end{aligned}$$

Todos son positivas, luego los valores  $(c_0, c_p, d_q) = (a_0, a_p, b_q)$  efectivamente dan un mínimo.  $\square$

Obviamente, el mejor comportamiento que se puede pedir en este contexto es que al tomar más términos de la serie de Fourier, cada vez se aproxime mejor a la función.

**Definición 5.8.** Se dice que una sucesión de funciones  $(f_n)$  converge en media cuadrática a  $f$  cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f_n(t) - f(t))^2 dt = 0.\tag{5.10}$$

Nos preguntamos entonces bajo qué condiciones la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de una función  $f$ , converge en media cuadrática a  $f$ . La sorprendente respuesta es que estas condiciones son muy generales: basta con que  $f$  sea de cuadrado integrable para que esto ocurra<sup>3</sup>. La prueba es elemental pero larga, e ilustra algunos conceptos de la teoría de espacios de Hilbert.

Recordemos que un espacio vectorial (complejo)  $X$ , dotado con un producto escalar (hermítico)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se dice que es de Hilbert si, en la norma inducida por el producto escalar, es completo. El espacio de las funciones (complejas) de cuadrado integrable  $L^2([a, b])$ , con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \bar{g}(t) dt,\tag{5.11}$$

---

<sup>3</sup>Nótese que la convergencia en media es la convergencia en la norma de  $L^2$  y recordemos que  $L^2 \subset L^1$ ; resulta, sin embargo, que en  $L^1$  existen funciones para las cuales su serie de Fourier no converge en ningún punto en la norma de  $L^1$  (Kolgomorov). Para  $1 < p < \infty$ , es un resultado clásico del Análisis que la serie de Fourier de una  $f \in L^p$  converge a  $f$  en la norma de  $L^p$ . Otros resultados relacionados son los de Carleson (la serie de una  $f \in L^2$  converge *puntualmente* casi por todas partes), y de Kolgomorov (existen funciones  $f \in L^1$  para las cuales su serie de Fourier diverge *puntualmente* casi por todas partes).

es un ejemplo de tal espacio (teorema de Riesz-Fischer), que de hecho se puede caracterizar como la completación del espacio de funciones continuas  $\mathcal{C}([a, b])$  dotado con la norma

$$\|f\| = \left( \int_a^b f^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

Dado un espacio de Hilbert  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , un subconjunto  $S \subset X$  se dice que es *ortogonal* si  $\langle f, g \rangle = 0$  para todos  $f, g \in S$  distintos. Además, se dice que  $S$  es un *sistema ortonormal* si  $\|f\| = 1$  para todo  $f \in S$ . Un sistema ortonormal  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  se dice que es una *base* de  $X$  si cualquier  $f \in X$  se puede expresar como

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n,$$

en el sentido de que

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \langle f, f_n \rangle f_n,$$

con el límite según la norma de  $X$  (inducida por el producto escalar), es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \sum_{n=1}^k \langle f, f_n \rangle f_n\| = 0.$$

Para el caso particular de  $X = L^2([a, b])$  con el producto (5.11), esto se traduce en lo siguiente: un sistema ortonormal de funciones de cuadrado integrable  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una base de  $L^2([a, b])$  si, para toda  $f \in L^2([a, b])$ , se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \left( f(t) - \sum_{n=1}^k \langle f, f_n \rangle f_n \right)^2 dt = 0.$$

El siguiente resultado técnico aclara esta definición.

**Lema 5.9** (Igualdad de Parseval). *Sea  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  un sistema ortonormal del espacio de Hilbert  $X$ . Si  $(\lambda_n)$  es una sucesión de números (reales o complejos, según estemos considerando funciones reales o complejas) tales que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n$  converge a  $f \in X$ , entonces  $\lambda_n = \langle f, f_n \rangle$  y además*

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2. \quad (5.12)$$

La demostración de este lema es muy sencilla y se deja como ejercicio. Nótese que este resultado formaliza los cálculos heurísticos de la sección 4.1.

**Teorema 5.10** (Fourier en espacios de Hilbert). *Sea  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  un sistema ortonormal del espacio de Hilbert  $X$ . Son equivalentes:*

- (a)  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una base de  $X$ .
- (b) Para cualquier  $f \in X$  se cumple la igualdad de Parseval (5.12).
- (c) Si  $f \in X$  es ortogonal a todos los elementos de  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  (o sea,  $\langle f, f_n \rangle = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ), entonces,  $f = 0$ .

*Demostración.* Que (a) implica (b) es el lema precedente.

Para ver que (b) implica (c), observemos que si una función  $f \in X$  satisface  $\langle f, f_n \rangle = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces es que  $\|f\| = 0$ , de modo que  $f = 0$ .

La parte no trivial consiste en probar que (c) implica (a). Veamos primero que si  $f \in X$  la serie  $\sum_{n \geq 1} \langle f, f_n \rangle f_n$

es convergente, y luego veremos que converge precisamente a  $f$ . Por ser  $X$  de Hilbert, la convergencia se puede ver probando que la sucesión de sumas parciales  $(S_n)$  es de Cauchy; ahora bien:

$$\begin{aligned}\|S_m - S_n\|^2 &= \langle S_m - S_n, S_m - S_n \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=n+1}^m \langle f, f_i \rangle f_i, \sum_{j=n+1}^m \langle f, f_j \rangle f_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=n+1}^m |\langle f, f_i \rangle|^2.\end{aligned}$$

Si denotamos por  $(T_k)$  la sucesión de sumas parciales de la serie  $\sum_{k \geq 1} |\langle f, f_k \rangle|^2$  (que es obviamente monótona creciente y de términos positivos) lo que hemos obtenido es que

$$\|S_m - S_n\|^2 = |T_m - T_n|. \quad (5.13)$$

Por otra parte, se tiene la desigualdad

$$\begin{aligned}0 &\leq \|f - \sum_{n=1}^k \langle f, f_n \rangle f_n\|^2 \\ &= \left\langle f - \sum_{n=1}^k \langle f, f_n \rangle f_n, f - \sum_{n=1}^k \langle f, f_n \rangle f_n \right\rangle \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{n=1}^k |\langle f, f_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^k |\langle f, f_n \rangle|^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^k |\langle f, f_n \rangle|^2,\end{aligned}$$

de donde resulta, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$T_k = \sum_{n=1}^k |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Esta acotación implica que la sucesión monótona  $(T_k)$  converge y, en particular, que es de Cauchy. A su vez, esto junto con (5.13) implica que la sucesión de sumas parciales  $(S_n)$  es de Cauchy, como queríamos ver. Falta probar que esta sucesión converge a  $f$ . Si denotamos

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n,$$

se tiene que (por la primera parte del lema 5.12)

$$\langle g, f_n \rangle = \langle f, f_n \rangle,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , luego

$$\langle g - f, f_n \rangle = 0.$$

La hipótesis (c) implica entonces  $g = f$ . □

**Ejemplo 5.11.** El sistema ortonormal

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx : n \in \mathbb{N} \right\}$$



es una base del espacio de Hilbert real  $L^2([-\pi, \pi])$  con respecto al producto

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt.$$

La ortonormalidad se vió en (4.2). Para probar que es base, utilizaremos el teorema de Fourier precedente y probaremos que si  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  es ortogonal al sistema, es  $f = 0$ . Esto se hace en dos etapas:

1. Se supone primero que  $f$  es continua en  $[-\pi, \pi]$ . Por hipótesis  $f$  debe ser ortogonal a cualquier polinomio trigonométrico y, por la continuidad, si fuese  $f \neq 0$  deberían existir unos  $x_0 \in ]-\pi, \pi[$ ,  $\varepsilon > 0$  y  $\delta > 0$  tales que  $|f(x)| \geq \varepsilon$  si  $|x - x_0| < \delta$ . Es posible entonces, mediante un cálculo directo (véase el ejercicio 9), probar que existe un  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que  $f$  no es ortogonal al polinomio trigonométrico

$$P_m(x) = (1 + \cos(x - x_0) - \cos \delta)^m,$$

lo cual es una contradicción.

2. Si  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  (no necesariamente continua), se considera la función  $h : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$h(x) = g(x) - \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}},$$

donde

$$g(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt,$$

y

$$a_0 = \left\langle g, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle.$$

Nótese que  $g$  existe y es absolutamente continua (luego continua) por ser  $f$  integrable. Además, por construcción  $h' = g' = f$  casi por todas partes en  $[-\pi, \pi]$ . Ahora, un cálculo inmediato muestra que

$$\left\langle h, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \left\langle g, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle - a_0 \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = 0.$$

Análogamente, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \left\langle h, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( h(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{n} h'(x) dx \right) \\ &= -\frac{1}{n\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0, \end{aligned}$$

pues por hipótesis  $f$  es ortogonal a  $\sin nx$ . De la misma manera se demuestra que

$$\left\langle h, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\rangle = 0.$$

De esta forma, por el teorema de Fourier es  $h = 0$  en  $[-\pi, \pi]$ , luego también  $h' = f = 0$  en ese intervalo, que es lo que se quería probar.

△

Observando ahora que, si  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  y  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  es la base del ejemplo precedente, se tiene que

$$\langle f, f_n \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \sqrt{\pi} a_n & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = \sqrt{\pi} b_n & \text{si } n \text{ impar,} \end{cases}$$

resulta, en términos de la base, la expresión que ya conocemos (la serie de Fourier):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \text{ par}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} a_n \cos nx + \sum_{n \text{ impar}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} a_n \sin nx.$$

Entonces, es inmediato el siguiente importante resultado referente a la convergencia de la serie de Fourier.

**Teorema 5.12.** *Si  $f$  es una función de cuadrado integrable, su serie de Fourier converge en media cuadrática a  $f$ , es decir,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (S_n(t) - f(t))^2 dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sen kt) - f(t) \right)^2 dt = 0. \quad (5.14)$$

*Demostración.* Es un corolario al teorema 5.10 y el ejemplo 5.11. □

### 5.3. Desigualdad de Bessel. Igualdad de Parseval

Un resultado que se usa mucho en la práctica es la igualdad de Parseval para funciones de cuadrado integrable.

**Proposición 5.13.** *Si  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ :*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (5.15)$$

*Demostración.* Como se acaba de ver, en este caso es  $\lambda_n = \langle f, f_n \rangle$  igual a  $\sqrt{\pi}a_n$  o  $\sqrt{\pi}b_n$  según sea  $n$  par o impar, respectivamente. Basta entonces con aplicar 5.12. □

**Nota 5.14.** Para el caso de una función periódica con periodo  $T$ , mediante un cambio de variable apropiado la igualdad toma forma:

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f(t))^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (5.16)$$

En las aplicaciones físicas, el miembro de la izquierda se interpreta como la *potencia* de la señal representada por la función  $f$ . Desde un punto de vista puramente matemático, resulta interesante notar que la igualdad de Parseval permite calcular la suma de algunas series.

**Ejemplo 5.15.** Para la función  $f(t) = t$  en  $] -\pi, \pi]$  sabemos que

$$f(t) \simeq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sen nt.$$

Por la igualdad de Parseval:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{3} \pi^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

△

La igualdad de Parseval tiene numerosas consecuencias de interés práctico. Aquí nos limitaremos a dar solamente dos de ellas.

**Teorema 5.16** (Desigualdad de Bessel). *Para toda  $f$  de cuadrado integrable, sus coeficientes de Fourier verifican, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt. \quad (5.17)$$

*Demostración.* La sucesión de sumas parciales  $a_k = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$  es obviamente creciente y acotada por su límite superior  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$  que, por la igualdad de Parseval (5.15), es igual a  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt$ .  $\square$

La segunda consecuencia es una prueba directa del lema de Riemann-Lebesgue que ya hemos visto, lema 5.2.

**Proposición 5.17** (Lema de Riemann-Lebesgue). *Si  $f$  es una función de cuadrado integrable,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

*Es decir, los coeficientes de Fourier tienden a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$ .*

*Demostración.* De la convergencia de la serie  $a_0^2/2 + \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$  se deduce que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0$ , lo cual a su vez significa que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .  $\square$

## 5.4. Convergencia uniforme. Fenómeno de Gibbs

Otra posibilidad para aproximar globalmente  $f(t)$  consiste en estudiar si  $\max |S_k(t) - f(t)| \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , que es la *convergencia uniforme* de  $S_k$  a  $f$ . Vamos a probar que para una serie suficientemente amplia de funciones, la serie de Fourier converge uniformemente.

**Teorema 5.18.** *Sea  $f : ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua y supongamos que existe y es continua  $f' : ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  salvo en un conjunto finito de puntos. Entonces la serie de Fourier de  $f$  converge uniformemente a  $f$ . Además,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty. \quad (5.18)$$

**Nota 5.19.** Poniendo  $f(\pi) = f(-\pi)$ , podemos extender de forma periódica y continua  $f$  a todo  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.* Sea la serie de Fourier de  $f$ ,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (5.19)$$

Por el criterio de mayoración de Weierstrass, convergerá uniformemente si podemos encontrar una sucesión de constantes positivas  $\{M_n\}_{n=1}^{+\infty}$  tales que  $\sum M_n < +\infty$  y para todo  $x \in [-\pi, \pi]$  y para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq M_n.$$

Consideremos junto con (5.19) la serie de derivada  $f'$ :

$$\frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n \cos nx + \tilde{b}_n \sin nx).$$

Se tiene una relación entre los coeficientes de una y otra, obtenida integrando por partes: si  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \left( f(t) \cos nt \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} (f(\pi) \cos n\pi - f(-\pi) \cos n\pi + n\pi b_n) = nb_n\end{aligned}$$

y

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \left( f(t) \sin nt \Big|_{-\pi}^{\pi} - n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt \right) = -na_n.$$

También:

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = \frac{1}{\pi} f(t) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} (f(\pi) - f(-\pi)) = 0.$$

Con esto, podemos acotar como sigue:

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| = \frac{|\tilde{a}_n|}{n} + \frac{|\tilde{b}_n|}{n}.$$

Llamemos pues  $M_n := \frac{|\tilde{a}_n|}{n} + \frac{|\tilde{b}_n|}{n}$ . Hay que probar que  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  converge, y esto se sigue de la desigualdad

$$0 \leq \left( |\tilde{a}_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = |\tilde{a}_n|^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} |\tilde{a}_n|,$$

pues esto implica

$$\frac{|\tilde{a}_n|}{n} \leq \frac{1}{2} |\tilde{a}_n|^2 + \frac{1}{2n^2} = \frac{|\tilde{a}_n^2|}{2} + \frac{1}{2n^2},$$

y con un cálculo análogo para  $\tilde{b}_n$ :

$$\frac{|\tilde{b}_n|}{n} \leq \frac{|\tilde{b}_n^2|}{2} + \frac{1}{2n^2}.$$

Así:

$$M_n = \frac{|\tilde{a}_n|}{n} + \frac{|\tilde{b}_n|}{n} \leq \frac{1}{2} (\tilde{a}_n^2 + \tilde{b}_n^2) + \frac{1}{n^2},$$

y sumando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n^2 + \tilde{b}_n^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

pues la primera serie del miembro intermedio es convergente por la desigualdad de Bessel<sup>4</sup> aplicada a  $f'$ , y la segunda es  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Aplicando el criterio de Weierstrass, (5.19) es uniformemente convergente. Como además  $f$  es continua por hipótesis, esta convergencia uniforme lo es a  $f$  (por el teorema de Dirichlet).  $\square$

**Nota 5.20.** En el transcurso de la demostración se ha obtenido un resultado importante en si mismo: bajo las hipótesis del teorema (esto es,  $f$  continua y  $f'$  definida salvo en un conjunto finito de puntos), si la serie de Fourier de  $f$  es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

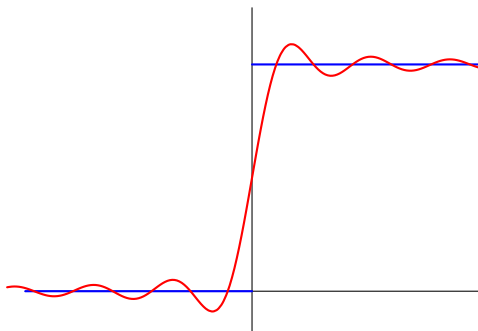
entonces la de  $f'$  es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx).$$

---

<sup>4</sup>Nótese que si  $f'$  es continua en  $[-\pi, \pi]$  salvo un número finito de puntos, también lo es  $(f')^2$ . Como toda función continua salvo en un número finito de puntos es integrable,  $(f')^2$  es integrable y, por tanto,  $f'$  es de cuadrado integrable. Así, se puede aplicar la desigualdad de Bessel.

Cuando se trata con una función discontinua, se pierde la convergencia uniforme, debido al *fenómeno de Gibbs*. Éste consiste en que cerca de los puntos de discontinuidad  $x$  de una función  $f$  las sumas parciales de la serie de Fourier  $S_k$  superan los valores  $f(x^+)$  y  $f(x^-)$  en aproximadamente un 9% del valor de salto de la función en ese punto,  $|f(x^+) - f(x^-)|$ .



En la figura se ha tomado la función escalón

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

y se ha representado la serie de Fourier truncada en el término  $n = 9$ .

El fenómeno de Gibbs no puede evitarse aumentando el número de términos. Si se toma un número mayor, cambia la ubicación de los picos (*overshoots*, en inglés), pero su número permanece constante. Todo esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.21.** Para estudiar el fenómeno de Gibbs<sup>5</sup>, consideremos el término  $n$ -ésimo de la serie de Fourier de la función escalón, calculado en el ejemplo 4.2:

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}. \quad (5.20)$$

Dado que  $S_n$  es un polinomio trigonométrico, es diferenciable y, de hecho,

$$S'_n(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x. \quad (5.21)$$

Igualando esta expresión a cero, podemos hallar las abscisas de los extremos de la función, aunque el cálculo es algo complicado. Comencemos por pasar al campo complejo, haciendo uso de  $\cos \alpha = (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})/2$ , podemos escribir  $S'_n(x)$  en (5.21) como<sup>6</sup>

$$S'_n(x) = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n e^{j(2k-1)x} + \sum_{k=1}^n e^{-j(2k-1)x} \right),$$

<sup>5</sup>Descubierto en realidad por Wilbraham en 1848 y redescubierto por Michelson (el del experimento de Michelson-Morley) en 1898, al trabajar con un analizador de Fourier mecánico, un precursor de las modernas computadoras. Michelson comentó el efecto con Gibbs, quien dedujo la correcta explicación teórica, originada por la existencia de una discontinuidad.

<sup>6</sup>En esta sección, haremos  $j = \sqrt{-1}$ .

que son sumas geométricas y se pueden calcular inmediatamente,

$$\begin{aligned}
 S'_n(x) &= \frac{1}{2} \left( e^{jx} \frac{1 - (e^{j2x})^n}{1 - e^{j2x}} + e^{-jx} \frac{1 - (e^{-j2x})^n}{1 - e^{-j2x}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{e^{j(2n-1)x} + e^{-j(2n-1)x} - (e^{j(2n+1)x} + e^{-j(2n+1)x})}{2 - (e^{j2x} + e^{-j2x})} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{2 \cos((2n-1)x) - 2 \cos((2n+1)x)}{2(1 - \cos(2x))} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\cos(2nx) \cos(x) + \sin(2nx) \sin(x) - \cos(2nx) \cos(x) + \sin(2nx) \sin(x)}{1 - 1 + 2 \sin^2(x)} \\
 &= \frac{\sin(2nx)}{2 \sin(x)}.
 \end{aligned}$$

De aquí, resulta claro que las soluciones a  $S'_n(x) = 0$  están dadas por  $x = \pm\pi/2n$ . Del comportamiento gráfico (o calculando la segunda derivada), se ve que  $x = \pi/2n$  son máximos y  $x = -\pi/2n$  mínimos. Sustituyendo en la expresión para  $S_n(x)$ , (5.20), obtenemos los valores de los picos,

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)}{2k-1} \frac{\pi}{2n},$$

que escribiremos como

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1) \cdot (\pi/2n)}{(2k-1) \cdot (\pi/2n)} \frac{\pi}{n}.$$

El motivo de hacerlo así es que de esta forma es aparente que se tiene la suma de Riemann de la función  $\sin x/x$  en el intervalo  $[0, \pi]$ , con respecto a la partición uniforme  $P = \{x_0 = 0, x_1 = \pi/n, \dots, x_n = n\pi/n\}$ . Por tanto, tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  resulta:

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx.$$

Para estimar numéricamente esta integral, utilizamos el hecho de que la función  $\sin x/x$  es analítica en todo  $\mathbb{R}$  y nos quedamos con los dos primeros términos del desarrollo de MacLaurin,

$$\frac{\sin x}{x} \simeq \frac{1}{x} \left( x - \frac{x^3}{6} \right).$$

La integral puede ahora calcularse sin problemas y el resultado es

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \simeq 1.09,$$

que representa el anunciado 9% del valor de la función en  $x = 0$ ,  $f(0) = 1$  (un cálculo análogo puede hacerse con los mínimos para obtener el salto total). También es evidente del cálculo que al tomar un mayor número de términos en la aproximación de Fourier  $S_n(x)$ , el pico se desplaza hacia el origen.  $\triangle$

## 5.5. Ejercicios

1. Probar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_k(s) ds = \pi,$$

donde  $D_k$  es el  $k$ -ésimo núcleo de Dirichlet.

2. Comprobar que la función, definida en  $[-\pi, \pi]$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

no verifica las hipótesis del teorema de Dirichlet 5.4 pero, sin embargo, es desarrollable en serie de Fourier (este ejercicio muestra que las hipótesis del teorema son suficientes, pero no necesarias).

3. Hallar unos números reales  $c_1, c_2, c_3$  tales que

$$\int_{-\pi}^{\pi} [t - (c_1 \sin t + c_2 \sin 2t + c_3 \sin 3t)]^2 dt$$

sea mínimo. Calcular el error cuadrático cometido en la aproximación de  $t$  por  $c_1 \sin t + c_2 \sin 2t + c_3 \sin 3t$ , donde  $c_1, c_2, c_3$  son los calculados anteriormente.

4. Determinar el polinomio trigonométrico de primer orden  $p(t) = a + b \cos t + c \sin t$  que mejor aproxima la función  $f(t) = e^t$  en media cuadrática, sobre el intervalo  $]-\pi, \pi[$ .
5. Probar el lema 5.9.
6. Utilizando el resultado del ejercicio (1b) de la sección 4.5, demostrar que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

7. Utilizar el desarrollo de Fourier de  $f(t) = e^t$  en  $(-\pi, \pi)$  (ejercicio 2 de la sección 4.5) para calcular

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

8. Utilizando la identidad de Parseval, probar las siguientes igualdades:

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad (\text{Sugerencia: considérese la función } f(t) = t^2 - \pi^2).$$

$$b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \quad (\text{Sugerencia: considérese la función } f(t) = t^2).$$

9. Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Probar que existe un  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que  $f$  no es ortogonal al polinomio trigonométrico

$$P_m(x) = (1 + \cos(x - x_0) - \cos \delta)^m.$$

10. Integrando la serie de Fourier de la función  $f(t) = t^2$ , probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nt}{n^3} = \frac{1}{12} t(t^2 - \pi).$$

11. Probar que si  $f(x)$  es una función integrable con serie de Fourier asociada

$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

entonces, la integral término a término de su serie converge puntualmente a  $\int f(x) dx$  (sin importar si la serie original converge o no a  $f(x)$ ).

*Sugerencia:* Considerar la función

$$g(x) = \int_0^x \left( f(s) - \frac{a_0}{s} \right) ds.$$

12. Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log(n+1)},$$

no puede ser la serie de Fourier de ninguna función integrable.

*Sugerencia:* Utilizar el problema anterior.





# 6

## Ecuaciones en derivadas parciales sobre dominios acotados

En este capítulo veremos cómo se pueden aplicar las técnicas del análisis de Fourier para obtener soluciones a las ecuaciones en derivadas parciales lineales más comunes en Física Matemática:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{(ecuación del calor)} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{(ecuación de ondas)} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 && \text{(ecuación de Laplace).}\end{aligned}$$

La llamada *técnica de separación de variables* nos permitirá calcular una clase muy general de soluciones a estas ecuaciones; son soluciones que se expresan mediante una serie de Fourier. Al igual que ocurre con las ecuaciones diferenciales ordinarias, para seleccionar una solución concreta deberemos especificar unas condiciones adicionales. Estas condiciones (si se interpreta la variable  $t$  como el tiempo) pueden ser de dos tipos: *condiciones iniciales*, tales como  $u(x, 0) = f(x)$ , o *condiciones de frontera*, como por ejemplo  $u(\pi, t) = g(t)$ . Estas condiciones juegan un papel decisivo pues, como comprobaremos, los coeficientes de Fourier de la solución estarán determinados precisamente por los coeficientes de Fourier de las funciones (como  $f(x)$ ) que determinan las condiciones de contorno. Nos centraremos en las llamadas *condiciones mixtas*, una combinación de las anteriores, y discutiremos brevemente la noción de problemas correctamente planteados.

Hay muchísima literatura referente a las ecuaciones en derivadas parciales, a todos los niveles de rigor. El enfoque desarrollado aquí se encuentra próximo al de [3, 5, 7, 9, 8, 11]. En particular, [8] contiene numerosos ejemplos resueltos y propuestos (algunos de los cuales se incluyen aquí).

### 6.1. La ecuación del calor

Supongamos que queremos resolver la ecuación del flujo de calor en una barra finita, fija en los extremos  $x = 0$ ,  $x = L$ . Si la conductividad térmica del material de la barra es  $\kappa > 0$ , la ecuación a resolver para la temperatura  $u(x, t)$  es

$$\kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in ]0, L[, \quad t \in ]0, +\infty[. \quad (6.1)$$

Supondremos que los extremos de la barra se mantienen a una temperatura constante e igual a cero en todo instante, esto es,

$$u(0, t) = 0 = u(L, t), \quad \forall t \in ]0, +\infty[. \quad (6.2)$$

Finalmente, supondremos que la distribución inicial de temperaturas a lo largo de la barra viene dada por una función  $f(x)$  de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in ]0, L[. \quad (6.3)$$

La técnica de separación de variables consiste en buscar soluciones particulares a (6.1) en la forma “separada”

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (6.4)$$

Para determinar *una* solución concreta de esta forma, en realidad no necesitaremos todos los datos del problema, nos bastará con los (6.1) y (6.2); es decir, la técnica de separación de variables nos dice cómo hallar una solución al problema

$$\begin{cases} \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, & x \in ]0, L[, t \in ]0, +\infty[ \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), & \forall t \in ]0, +\infty[. \end{cases}$$

Para ello, observemos que de (6.1) y (6.4) se tiene

$$\kappa X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

y de (6.2) y (6.4):

$$X(0) = 0 = X(L).$$

Buscamos soluciones en  $]0, L[ \times ]0, +\infty[$  distintas de la trivial  $u(x, t) = 0$ , de modo que podemos suponer  $X(x)T(t) \neq 0, \forall (x, t) \in ]0, L[ \times ]0, +\infty[$ . Así, las funciones buscadas satisfacen

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\kappa T(t)}.$$

Como el miembro izquierdo depende exclusivamente de  $x$  y el derecho de  $t$ , debe existir una constante  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = c = \frac{T'(t)}{\kappa T(t)}. \quad (6.5)$$

Analicemos por separado los posibles valores de  $c$ .

(a)  $c < 0$

Podemos poner entonces  $c = -\lambda^2$  con  $\lambda > 0$  (por comodidad). De (6.5) es

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ T'(t) + \kappa \lambda^2 T(t) = 0. \end{cases}$$

La primera es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, homogénea, con coeficientes constantes. Su polinomio característico es  $r^2 + \lambda^2 = 0$  con raíces  $r = \pm \lambda i$  (imaginarias puras), luego su solución general viene dada por

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x)$$

siendo  $c_1, c_2$  constantes reales arbitrarias.

La segunda es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que se resuelve de manera inmediata separando variables

$$T(t) = c_3 e^{-\kappa \lambda^2 t}. \quad (6.6)$$

Así, tenemos de momento que

$$X(x)T(t) = (c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x)) c_3 e^{-\kappa \lambda^2 t}.$$

Para determinar las constantes  $c_1, c_2, c_3$  utilizamos las condiciones de frontera; de  $u(L, t) = 0$  (que, como sabemos, implica  $X(L) = 0$ ) se deduce

$$c_2 \sin(\lambda L) = 0$$

de donde o bien  $c_2 = 0$ , que conduce a  $X(x) = 0$  y por tanto no es aceptable, o bien  $\sin(\lambda L) = 0$ , lo cual implica  $\lambda L = n\pi$  con  $n \in \mathbb{N}$  (pues  $\lambda, L > 0$ ). Así, llegamos a que la constante  $\lambda > 0$  no puede tomar cualquier valor, sino que debe ser

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En definitiva, hemos llegado a soluciones (una para cada  $n \in \mathbb{N}$ ) de la forma

$$X(x)T(t) = c_2 c_3 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa t}$$

o bien, llamando  $A_n = c_2 c_3 \in \mathbb{R}$ , a soluciones  $u_n(x, t)$  como

$$u_n(x, t) = X(x)T(t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa t}.$$

(b)  $c > 0$

Ponemos, de nuevo por comodidad,  $c = \lambda^2$  con  $\lambda > 0$ . En este caso, un análisis semejante nos lleva a las ecuaciones

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \\ T'(t) - \kappa \lambda^2 T(t) = 0. \end{cases}$$

Esta vez las raíces del polinomio característico de la primera ecuación son reales,  $r = \pm\lambda$ , luego la solución general es combinación de exponenciales:

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}.$$

La solución de la segunda ecuación también es exponencial, pero esta vez con exponente positivo:

$$T(t) = c_3 e^{\kappa \lambda^2 t}.$$

Al imponer ahora las condiciones iniciales resulta: de  $X(0) = 0$

$$c_1 + c_2 = 0,$$

luego  $X(x) = c_1 (e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})$ , y de  $X(L) = 0$ :

$$c_1 (e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}) = 0.$$

Aquí de nuevo hay dos posibilidades:  $c_1 = 0$  conduce a  $X(x) = 0$ , que no es aceptable (buscamos soluciones no triviales), y  $e^{\lambda L} - e^{-\lambda L} = 0$  nos lleva a  $\lambda L = -\lambda L$  por ser la exponencial inyectiva. Tendríamos entonces  $2\lambda L = 0$ , que no puede darse pues  $\lambda, L > 0$ .

Por tanto, en el caso  $c > 0$  no existen soluciones no triviales de la forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ .

(c)  $c = 0$

En este caso se tendrían las ecuaciones

$$\begin{cases} X''(x) = 0 \\ T'(t) = 0, \end{cases}$$

con soluciones triviales

$$\begin{cases} X(x) = c_1x + c_2 \\ T(t) = c_3. \end{cases}$$

Al imponer la condición inicial  $X(0) = 0$  resulta  $c_2 = 0$  y  $X(x) = c_1x$ . De  $X(L) = 0$  es  $c_1L = 0$  y como  $L > 0$ , debe ser  $c_1 = 0$ , lo que nos lleva a la solución trivial  $X(x) = 0$  que no es aceptable.

Así, en este caso tampoco existen soluciones no triviales de la forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ .

Llegados a este punto, es donde intervienen de manera crucial la linealidad de la ecuación del calor y el hecho de que las condiciones de frontera son homogéneas (es decir, los segundos miembros de  $u(0, t) = 0$ ,  $u(L, t) = 0$  son cero). Gracias a estas dos propiedades, la superposición arbitraria de las soluciones<sup>1</sup>  $u_n(x, t)$  (una para cada valor de  $n \in \mathbb{N}$ ) obtenidas en (a), es también solución, es decir, podemos considerar una solución del tipo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa t}. \quad (6.7)$$

**Nota 6.1.** Insistimos en el punto de que para escribir una solución de esta forma, hemos necesitado que las condiciones de frontera sean homogéneas. Si fuese  $u(0, t) = 1$ , por ejemplo, y  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$  dos soluciones con esa condición, sería  $(u_1 + u_2)(0, t) = 1 + 1 \neq 1$  y la superposición de soluciones ya no sería solución con la misma condición de frontera. Lo mismo ocurre si en el problema hay fuentes presentes. Sin embargo, el método de Fourier puede adaptarse para trabajar con este tipo de problemas, como veremos más adelante (en la sección 6.5).

En la solución (6.7) lo único que falta por determinar es el valor de los coeficientes  $A_n$ . Aquí es donde entra en acción el análisis de Fourier y la condición representada por la función  $f(x) = u(x, 0)$ . Imponiendo esta condición inicial, resulta

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x),$$

que es el desarrollo de Fourier en senos de  $f$  en el intervalo  $]0, L[$  (véase la ecuación (26)). Por la unicidad de los coeficientes de la serie de Fourier en senos, es

$$A_n = b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad n \in \mathbb{N}.$$

Con esto, la solución queda completamente determinada en función de los datos del problema:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa t}. \quad (6.8)$$

## 6.2. La ecuación de ondas

Consideremos una cuerda elástica de un material homogéneo, de masa despreciable, flexible y que está sujeta por sus extremos en  $x = 0$  y  $x = L$ . Si se tensa la cuerda pulsándola y se la deja vibrar, en el supuesto de que esas vibraciones sean de pequeña amplitud la ecuación que describe el movimiento de la cuerda es

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (x, t) \in ]0, L[ \times ]0, +\infty[, \quad (6.9)$$

---

<sup>1</sup>Este hecho no es evidente en absoluto. En su momento (a mediados del S. XVII), su enunciado provocó una agria disputa entre Euler, D'Alembert y Daniel Bernoulli. Precisamente, la importancia de los métodos del Análisis de Fourier radica en que permiten justificar rigurosamente este tipo de construcciones.

donde  $a > 0$  es una constante,  $u(x, t)$  es la posición del punto  $x$  sobre la cuerda en reposo en el instante  $t > 0$  y se tienen las condiciones obvias de frontera

$$u(0, t) = 0 = u(L, t),$$

junto con dos condiciones iniciales: la configuración de la cuerda en el instante  $t = 0$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in ]0, L[,$$

y la velocidad inicial con que se pulsa la cuerda

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad x \in ]0, L[.$$

**Nota 6.2.** Fijémonos en que hemos introducido una condición inicial más que en el caso de la ecuación del calor. En el transcurso del análisis de la ecuación de ondas, se verá por qué es necesario hacerlo. Esto tiene que ver con la necesidad de que el problema esté *bien planteado*. Sin entrar en detalles, podemos dar la siguiente regla general: *para que un problema de EDP esté bien planteado, se requieren tantas condiciones como derivadas aparecen en la EDP*. En la ecuación de ondas (6.9) hay cuatro derivadas, luego se necesitan cuatro condiciones (que pueden ser iniciales, de frontera o mixtas, pero cuatro).

La técnica de separación de variables se aplica también a este problema (obsérvese que las condiciones de contorno son homogéneas). Buscando soluciones no triviales del problema

$$\begin{cases} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & x \in ]0, L[, t \in ]0, +\infty[ \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), & t \in ]0, +\infty[. \end{cases} \quad (6.10)$$

en la forma separada

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

llegamos a

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)}.$$

Al igual que en el caso de la ecuación del calor, debe existir una constante  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = c = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)}.$$

Nuevamente, existen tres posibilidades:  $c > 0$ ,  $c = 0$ ,  $c < 0$ . Como se hizo en el apartado anterior, se descartan las dos opciones  $c \geq 0$ .

(a) Si  $c = \lambda^2$ , con  $\lambda > 0$ , entonces la solución para la ecuación de  $X(x)$  es

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x},$$

que conduce, aplicando las condiciones de contorno  $X(0) = 0 = X(L)$ , al sistema lineal

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 e^{\lambda L} + c_2 e^{-\lambda L} &= 0. \end{aligned}$$

El determinante de este sistema es claramente distinto de cero:  $e^{\lambda L} - e^{-\lambda L} \neq 0$ , de modo que la única solución posible es  $c_1 = 0 = c_2$ , que lleva a la solución trivial  $X(x) \equiv 0$ .

(b) En el caso  $c = 0$ , se tiene la solución  $X(x) = c_1 + c_2 x$ , que junto con las condiciones de contorno  $X(0) = 0 = X(L)$  proporciona el sistema

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_1 + c_2 L &= 0. \end{aligned}$$

Obviamente, la única solución en este caso es la trivial.

- (c) Cuando  $c = -\lambda^2 < 0$ , lo único que cambia respecto al análisis realizado con la ecuación del calor es que aparece una ecuación de segundo orden para  $T(t)$  (en lugar de una de primer orden):

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0.$$

El polinomio característico de esta ecuación es  $r^2 + a^2\lambda^2 = 0$ , con raíces complejas puras  $r = \pm a\lambda i$ , de modo que la solución general es ahora

$$T(t) = c_3 \cos(a\lambda t) + c_4 \sin(a\lambda t)$$

en lugar de la (6.6) que aparecía en la ecuación del calor.

Por el contrario, el análisis para determinar  $X(x)$  es idéntico al realizado en la ecuación del calor, por lo que se tiene una solución para cada  $n \in \mathbb{N}$  junto con la restricción  $\lambda = n\pi/L$ :

$$X(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

De esta forma, una solución a (6.10) puede escribirse, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , en la forma

$$u_n(x, t) = X(x)T(t) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left( c_3 \cos\left(\frac{na\pi}{L}t\right) + c_4 \sin\left(\frac{na\pi}{L}t\right) \right),$$

o bien, llamando  $A_n = c_2c_3$ ,  $B_n = c_2c_4$ :

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left( A_n \cos\left(\frac{na\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{na\pi}{L}t\right) \right).$$

Como antes, al ser la ecuación lineal y las condiciones de frontera homogéneas, se puede dar una solución como superposición de todas las soluciones  $u_n(x, t)$  anteriores:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left( A_n \cos\left(\frac{na\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{na\pi}{L}t\right) \right). \quad (6.11)$$

Lo único que falta por determinar en esta solución son los coeficientes  $A_n, B_n$ . Observemos que para calcularlos necesitamos (como ya habíamos anunciado en la observación 6.2) dos condiciones adicionales. Impongamos, para determinar los coeficientes  $A_n$ , la condición inicial  $u(x, 0) = f(x)$ . Resulta:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) A_n = f(x).$$

Como ya sabemos, esto es el desarrollo en serie de Fourier de senos de la función  $f(x)$  en el intervalo  $]0, L[$ . Por la unicidad de este desarrollo:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (6.12)$$

Por otra parte, derivando formalmente<sup>2</sup>, de

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left( -A_n \frac{na\pi}{L} \sin\left(\frac{na\pi}{L}t\right) + B_n \frac{na\pi}{L} \cos\left(\frac{na\pi}{L}t\right) \right),$$

resulta

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) B_n \frac{na\pi}{L} = g(x).$$

<sup>2</sup>En la sección 7.2 veremos bajo qué condición sobre  $f$  y  $g$  son justificables estos razonamientos.

De nuevo, esto es la expresión del desarrollo en serie de Fourier de senos de  $g(x)$  en el intervalo  $]0, L[$ . Por unicidad:

$$B_n \frac{na\pi}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

luego

$$B_n = \frac{2}{na\pi} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

De esta forma, la solución al problema de la cuerda vibrante queda completamente determinada en función de los datos del problema a través de las fórmulas:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left( A_n \cos\left(\frac{na\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{na\pi}{L}t\right) \right), \quad (6.13)$$

con

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (6.14)$$

y

$$B_n = \frac{2}{na\pi} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (6.15)$$

### 6.3. La ecuación de Laplace en un rectángulo

En su versión bidimensional, la ecuación de Laplace es la ecuación para la función incógnita  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Aparece en la descripción de los llamados *procesos estacionarios* en Física, que son aquellos que no dependen del tiempo (de ahí su nombre): transcurren de la misma forma en cualquier instante de su duración. Por ejemplo, cuando se alcanza el estado estacionario en una placa caliente que no tiene fuentes o sumideros de calor, la distribución de temperaturas  $u$  se caracteriza porque no depende del tiempo y verifica la ecuación del calor con  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ , esto es,  $\Delta u = 0$ , que es la ecuación del Laplace.

Dado que la ecuación de Laplace describe procesos que transcurren independientemente del tiempo, no tiene sentido plantear condiciones iniciales. En este caso, cobran especial importancia las condiciones de frontera. Por simplicidad, consideraremos aquí la ecuación de Laplace en un rectángulo  $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$ . El caso de otras geometrías (por ejemplo, un disco) se puede tratar análogamente con ligeras modificaciones (como pasar a coordenadas polares).

Planteamos entonces el problema de encontrar las soluciones  $u(x, t)$  a

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x, y) \in ]0, a[ \times ]0, b[ \quad (6.16)$$

sujetas a las condiciones de frontera (cuatro, según la regla dada en la nota 6.2)

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad x \in ]0, a[ \quad (6.17)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y), \quad y \in ]0, b[ , \quad (6.18)$$

que representan, por ejemplo, la distribución de temperaturas en equilibrio sobre una placa conductora con los lados verticales  $x = 0$ ,  $x = a$  aislados, el lado inferior  $y = 0$  a temperatura constante  $T = 0$ , y el lado superior a una temperatura determinada por  $f(x)$ .



A este tipo de problema, se le puede aplicar la técnica de separación de variables. Como antes, nos concentraremos primero en las condiciones de frontera homogéneas, así que restringiremos nuestra atención al problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in ]0, a[ \times ]0, b[ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y), & y \in ]0, b[ \\ u(x, 0) = 0, & x \in ]0, a[. \end{cases} \quad (6.19)$$

Aplicando separación de variables, buscaremos soluciones del tipo  $X(x)Y(y)$ , lo que nos lleva a la ecuación

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

que se satisface si existe una constante  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = c = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Como ya es habitual, estudiamos los tres tipos posibles de valores para  $c$ .

(a)  $c < 0$ ,  $c = -\lambda^2$ , con  $\lambda > 0$ .

Como ya sabemos de apartados anteriores, en este caso se obtiene

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

con soluciones

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x).$$

Para  $Y(y)$  resulta la ecuación

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0,$$

cuyo polinomio característico tiene las raíces reales  $r = \pm\lambda$ , de modo que

$$Y(y) = c_3 e^{\lambda y} + c_4 e^{-\lambda y}. \quad (6.20)$$

Ahora, imponemos las condiciones frontera. La  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0$  implica  $X'(0) = 0 = c_2$ , luego nos quedará

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x).$$

La condición  $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0$  implica entonces  $X'(a) = 0$ , o sea:

$$-\lambda c_1 \sin(\lambda a) = 0.$$

Como  $\lambda > 0$  esto nos lleva a  $c_1 \sin(\lambda a) = 0$ , que da dos posibilidades:  $c_1 = 0$ , que conduce a la solución trivial  $X(x) = 0$  y no es aceptable, y  $\sin(\lambda a) = 0$ . De esta última, se tiene

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N},$$

y la solución, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$X(x) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Para determinar  $Y(y)$  contamos con la condición  $u(x, 0) = 0$ , que se traduce en  $Y(0) = 0$ , o sea (sustituyendo (6.20)):

$$c_3 + c_4 = 0.$$

De aquí:

$$Y(y) = c_3 \left( e^{\frac{n\pi}{a}y} - e^{-\frac{n\pi}{a}y} \right) = 2c_3 \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Las soluciones separadas  $X(x)Y(y)$  resultan ser en este caso de la forma (una para cada  $n \in \mathbb{N}$ )

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = 2c_1c_3 \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

o bien, llamando  $A_n = 2c_1c_3$ :

$$u_n(x, y) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

(b)  $c = 0$

En este caso, las ecuaciones para  $X(x)$ ,  $Y(y)$  son triviales

$$X''(x) = 0 = Y''(y),$$

con soluciones

$$X(x) = c_1x + c_2, \quad Y(y) = c_3y + c_4.$$

La aplicación de las condiciones de frontera en este caso da lo siguiente. De  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0$  es  $X'(0) = c_1 = 0$ , luego  $X(x) = c_2$ . De  $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0$  no resulta nada nuevo, pues  $\frac{\partial X}{\partial x}$  es idénticamente nula.

Sin embargo, en este caso la condición adicional  $u(x, 0) = 0$ , a diferencia de lo que ocurriría en el caso de la ecuación del calor y de ondas, no implica  $Y(y) = 0$ , sino sólo  $Y(0) = 0$ , que ahora equivale a  $c_4 = 0$ , de manera que una posibilidad es

$$Y(y) = c_3y.$$

Por tanto, en el caso  $c = 0$  aparece una nueva solución:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) = c_2c_3y.$$

Por conveniencia, llamemos  $A_0 = c_2c_3$ ; nos queda así la solución

$$u(x, y) = A_0y.$$

(c)  $c > 0$ ,  $c = -\lambda^2$  con  $\lambda > 0$ .

En este caso resulta:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \\ Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0 \end{cases}$$

con soluciones

$$\begin{cases} X(x) = c_1e^{\lambda x} + c_2e^{-\lambda x} \\ Y(y) = c_3 \cos(\lambda y) + c_4 \sin(\lambda y). \end{cases}$$

Al imponer  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0$  ó, equivalentemente,  $X'(0) = 0$ , resulta  $\lambda(c_1 - c_2) = 0$  y como  $\lambda > 0$ , necesariamente  $c_1 = c_2$ . Así,  $X(x) = c_1(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$ . Ahora, de  $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0$  es  $X'(a) = 0$ , que se traduce en que  $c_1\lambda(e^{\lambda a} - e^{-\lambda a}) = 0$ . La posibilidad  $c_1 = 0$  nos lleva a la solución trivial  $X(x) = 0$ , por lo que la descartamos. Como  $\lambda > 0$ , nos queda  $e^{\lambda a} = e^{-\lambda a}$ , que por la inyectividad de la exponencial equivale a  $\lambda a = -\lambda a$ , o bien  $2\lambda a = 0$ . Esto implica un absurdo, pues  $\lambda, a > 0$ . Por tanto, en este caso no existen soluciones separadas de la forma  $X(x)Y(y)$ .

Como en los casos de la ecuación del calor y la de ondas, la linealidad de la ecuación y el hecho de que las condiciones de frontera sean homogéneas, nos dice que podemos sumar todas las soluciones que hemos obtenido para obtener la solución

$$u(x, y) = A_0y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right). \quad (6.21)$$

Lo único que falta por determinar son los coeficientes  $A_0, A_n$ . Para esto, recurrimos a la condición faltante  $u(x, b) = f(x)$ . Imponiéndola,

$$u(x, b) = A_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = f(x).$$

Pero esto es muy parecido a la serie de Fourier en cosenos de  $f(x)$  en  $]0, a[$  (véase (4.8)). De hecho, por unicidad:

$$\frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx = \frac{a_0}{2} = A_0 b$$

y

$$\frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = a_n = A_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

de donde

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{ab} \int_0^a f(x) dx \\ A_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (6.22)$$

Por tanto, la solución a la ecuación de Laplace en un rectángulo queda completamente determinada en función de los datos del problema.

## 6.4. Problema de Dirichlet en el disco. El núcleo de Poisson

La técnica de separación de variables puede adaptarse a otro tipo de geometrías en el dominio de la función incógnita  $u(x, y)$ . En tales casos es conveniente realizar un cambio de variables a un sistema coordenado que refleje fácilmente esa geometría. Como ejemplo, consideremos la ecuación de Laplace  $\Delta u(x, y) = 0$  cuando  $(x, y) \in D = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 < 1\}$ . Obviamente, un sistema apropiado es ahora el de las coordenadas polares.

El problema de Dirichlet consiste en hallar una función  $u(r, \theta)$  armónica en  $D$  y continua en la frontera  $\partial D = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$ , tal que toma valores prefijados en  $\partial D$ :

$$\begin{cases} \Delta u(r, \theta) = 0 \\ u(1, \theta) = f(\theta). \end{cases}$$

**Nota 6.3.** Supondremos en lo que sigue que  $f(\theta)$  es una función periódica de clase  $\mathcal{C}^2(-\pi, \pi)$ .

La ecuación de Laplace en coordenadas polares se escribe como

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0. \quad (6.23)$$

Aplicando el método de separación de variables, buscaremos soluciones en la forma

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta),$$

lo que conduce a

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0,$$

y a la existencia de una constante  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = c = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Esto se separa en dos ecuaciones

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' - cR = 0 \\ \Theta'' + c\Theta = 0. \end{cases}$$

Notemos que, por hipótesis,  $u = f$  está acotada sobre  $\partial D$  (pues  $f$  es continua y  $\partial D$  compacto), de modo que debemos excluir las soluciones exponenciales para  $\Theta$ . También debemos excluir las soluciones lineales, pues no son periódicas en  $\partial D$ . En otras palabras, debemos tomar  $c = \lambda^2 > 0$ , con  $\lambda > 0$ . Resulta entonces de la segunda ecuación que

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos(\lambda\theta) + c_2 \sin(\lambda\theta).$$

Ahora bien, como en  $r = 1$   $u(1, \theta) = R(1)\Theta(\theta) = f(\theta)$  que es periódica, debe ocurrir  $\Theta(\theta) = \Theta(0)$ , de donde debe ser  $\lambda = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Para  $R$  tenemos entonces la ecuación (de tipo Euler)

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0,$$

que tiene una singularidad en  $r = 0$  y admite soluciones acotadas en un entorno suyo de la forma  $R(r) = kr^n$ , como es inmediato comprobar. Por tanto, combinando las soluciones obtenidas, tenemos

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \quad (6.24)$$

Utilizando la condición de frontera  $u(1, \theta) = f(\theta)$ , resulta

$$f(\theta) = u(1, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

que no es otra cosa más que el desarrollo de Fourier de  $f$ . Por unicidad de los coeficientes, debe ser

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad (6.25)$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta. \quad (6.26)$$

Es muy fácil ver, utilizando (6.23), que cada término

$$u_n(r, \theta) = r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

es una función armónica. Además la serie que define a  $u(r, \theta)$  y las que se obtienen de ella derivando término a término una y dos veces, convergen uniformemente en  $D$  (donde  $0 < r < 1$ )<sup>3</sup>. Por el teorema 3.14, al derivar dos veces se obtiene la serie de los laplacianos de las  $u_n$ , que por ser armónicas se anulan. Por tanto,  $u(r, \theta)$  es armónica. Nos falta comprobar que

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(r, \theta) = f(\theta). \quad (6.27)$$

Para ello, escribimos  $u(r, \theta)$  explícitamente,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \, ds + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_{-\pi}^{\pi} f(s) (\cos ns \cos n\theta + \sin ns \sin n\theta) \, ds \right). \quad (6.28)$$

---

<sup>3</sup>Nótese que

$$|r^n a_n| + |r^n b_n| = r^n (|a_n| + |b_n|) \leq |a_n| + |b_n|,$$

por ser  $0 < r < 1$ , y puede entonces aplicarse el teorema 5.18 junto con el criterio de mayoración de Weierstrass para concluir la convergencia uniforme. El mismo razonamiento sirve para las derivadas de orden superior.

Como la serie que aparece en esta expresión es uniformemente convergente, podemos intercambiarla con la integral de modo que, aplicando la fórmula del coseno de una resta de ángulos,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - s) \right) f(s) ds.$$

La función de dos variables

$$\mathbf{P}(r, \theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta$$

se denomina *núcleo de Poisson*. Vamos a obtener una expresión para ella que no contiene sumatorios.

**Proposición 6.4.** *El núcleo de Poisson puede expresarse como*

$$\mathbf{P}(r, \theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \theta}. \quad (6.29)$$

*Demostración.* Si ponemos  $z = re^{i\theta}$ , es claro que  $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$  y que

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \right).$$

Como  $0 < r < 1$ , también sabemos que  $0 < |z| < 1$ . Por tanto, podemos usar la suma de la serie geométrica (nótese que comienza en  $n = 0$ )

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

para escribir

$$\operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1 + z}{1 - z} \right).$$

Ahora, un simple cálculo muestra que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} &= \operatorname{Re} \frac{(1 + re^{i\theta})(1 - re^{i\theta})}{(1 - re^{i\theta})(1 - re^{i\theta})} \\ &= \operatorname{Re} \frac{1 + re^{i\theta} - re^{-i\theta} - r^2}{1 - re^{i\theta} - re^{-i\theta} + r^2} \\ &= \operatorname{Re} \frac{1 - r^2 + 2ir \sin \theta}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \theta}. \end{aligned}$$

□

**Nota 6.5.** Notemos que, en términos del núcleo de Poisson, la solución a la ecuación de Laplace en el disco es

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}(r, \theta - s) f(s) ds, \quad (6.30)$$

para  $0 \leq r < 1$ .

También es importante observar que el núcleo de Poisson es singular para  $r = 1$  y  $\theta = 0$ , por lo que no podemos calcular el límite en (6.27) directamente. Pero podemos proceder con un truco.

<sup>4</sup>Como veremos más adelante, este tipo de integrales se conoce como una *convolución*.

**Lema 6.6.** *Se cumple*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}(r, \theta - s) ds = 1. \quad (6.31)$$

*Demostración.* Si consideramos la función constante  $f \equiv 1$ , es claro a partir de (6.28) que también  $u(r, \theta) = 1$ , para cualquier  $0 \leq r < 1$ . Por tanto, el enunciado se sigue de (6.30).  $\square$

Ahora, usamos que  $f$  es en particular continua en el compacto  $\mathbf{S}^1 = \{(r = 1, \theta) : -\pi \leq \theta \leq \pi\}$ , luego uniformemente continua, para encontrar, dado un  $\varepsilon > 0$ , un  $\delta > 0$  tal que

$$|f(\theta) - f(s)| < \varepsilon,$$

siempre que  $|\theta - s| < \delta$ . Además, de la expresión explícita (6.29) se ve que si  $|\xi| > \delta$ , es el denominador no nulo y  $\mathbf{P}(1, \xi) = 0$ , de modo que podemos encontrar un número  $r_0 > 0$  tal que si  $|\theta - s| \geq \delta$  y  $r_0 < r < 1$ , entonces  $\mathbf{P}(r, \theta - s) < \varepsilon$ . Con todo esto, tenemos que si  $r_0 < r < 1$ ,

$$\begin{aligned} |u(r, \theta) - f(\theta)| &\leq \frac{1}{\pi} \left( \int_{(|\theta-s| \geq \delta) \cap (-\pi, \pi)} + \int_{(|\theta-s| < \delta) \cap (-\pi, \pi)} \right) \mathbf{P}(r, \theta - s) |f(\theta) - f(s)| ds \\ &< \frac{1}{\pi} 2\pi\varepsilon \left( 2 \max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |f(\theta)| \right) + \varepsilon \\ &= \left( 1 + 4 \max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |f(\theta)| \right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Con esto, queda claro que  $\lim_{r \rightarrow 1} u(r, \theta) = f(\theta)$  y, por tanto, que (6.24) junto con (6.25) y (6.26) proporciona la solución al problema de Dirichlet en el disco.

**Nota 6.7.** Es importante destacar que el núcleo  $\mathbf{P}(r, \theta)$  sólo depende del operador  $\Delta$  y del dominio (en este caso, el disco). Además, la solución  $u$  del problema, de acuerdo con la nota 6.5, se expresa como una integral de convolución del núcleo  $\mathbf{P}(r, \theta)$  con el término fuente  $f$ . Como veremos más adelante, esta es una propiedad general.

Dado que el núcleo  $\mathbf{P}(r, \theta)$  depende de manera esencial del dominio de la ecuación, una pregunta natural es: ¿cuál es la propiedad geométrica que debe tener un dominio para que exista un núcleo del operador  $\Delta$  en él?. La respuesta la da la llamada *condición de Lebesgue*: el dominio debe ser tal que para todo punto de su frontera exista una bola con centro en su exterior tal que sea tangente a la frontera en un solo punto. Esto excluye la presencia de recovecos angulosos (como la “aguja de Lebesgue”) en la frontera.

## 6.5. Separación de variables en problemas con fuentes y no homogéneos

Como ya se ha mencionado, el método de separación de variables puede adaptarse para trabajar con problemas en los que hay presente fuentes (términos adicionales) en las ecuaciones del calor, de ondas o de Laplace. La idea ahora es construir la solución a partir de la del problema homogéneo mediante “variación de parámetros” en los coeficientes. Un ejemplo bastará para ilustrar la técnica.

**Ejemplo 6.8.** Consideremos el problema de la propagación del calor en una barra de longitud  $L$  cuyos extremos se mantienen a temperatura constante, sobre la que actúa un foco de calor  $Q(x, t)$  y cuya distribución inicial de temperatura es  $f(x)$ , es decir:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \kappa u_{xx}(x, t) + Q(x, t), & \text{con } t > 0, x \in ]0, L[ \\ u(x, 0) = f(x), & \text{con } x \in ]0, L[ \\ u(0, t) = 0 = u(L, t). \end{cases}$$

Por simplicidad, supondremos que las funciones  $Q$  y  $f$  poseen el grado de regularidad necesario para que las series de Fourier que aparezcan converjan adecuadamente (puntual o uniformemente, según sea el caso).

Ya vimos (ecuaciones (6.7) y (6.8)) que la solución del problema *homogéneo* se expresa como

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa t},$$

donde  $A_n = b_n$  son los coeficientes del desarrollo en senos de  $f$ . Llamando

$$A_n(t) = b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa t}$$

resulta que la solución al problema homogéneo tiene el aspecto

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Esto motiva que busquemos las soluciones al problema *no homogéneo* en la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

donde debemos determinar los coeficientes  $u_n(t)$ . Para ello, consideremos el desarrollo en serie de senos de  $f(x)$  y  $Q(x, t)$  (en este segundo caso tratando a la variable  $t$  como un parámetro), obtenido extendiendo de manera impar ambas funciones primero al intervalo  $] -L, L[$  y luego por periodicidad a todo  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{y} \quad Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

siendo, obviamente,

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad \text{y} \quad Q_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L Q(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (6.32)$$

Sustituyendo en  $u_t(x, t) = \kappa u_{xx}(x, t) + Q(x, t)$  resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( u'_n(t) + \kappa \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 u_n(t) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Igualando términos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u'_n(t) + \kappa \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 u_n(t) = Q_n(t).$$

Cada una de estas ecuación lineal ordinaria de primer orden se complementa con unas condiciones iniciales que resultan de

$$u_n(0) = b_n,$$

de modo que finalmente se tiene, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , un problema de Cauchy

$$\begin{cases} u'_n(t) + \kappa \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 u_n(t) = Q_n(t) \\ u_n(0) = b_n, \end{cases}$$

con solución inmediata:

$$u_n(t) = b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa t} + \int_0^t Q_n(s) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa (t-s)} ds.$$

Por tanto, la solución al problema con fuentes será

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa t} + \int_0^t Q_n(s) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa(t-s)} ds \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

con los coeficientes calculados en (6.32). △

**Nota 6.9.** Es obvio que esta misma línea de razonamientos se puede aplicar sin mayor dificultad al caso de otro tipo de condiciones de contorno o iniciales siempre que sean homogéneas (véase el ejercicio 5), así como a problemas semejantes para la ecuación de ondas (véase el ejercicio 6) o la de Laplace (ejercicio 17).

El otro caso en el que el método de separación de variables necesita de alguna modificación es aquél en que hay condiciones de contorno no homogéneas, pues entonces tampoco es posible justificar la superposición de soluciones. Pero la técnica es sumamente flexible y puede tratar estos casos con cierto éxito.

**Ejemplo 6.10.** Consideremos el siguiente problema para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x, t), & x \in ]0, L[, t \in ]0, \infty[ \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, L] \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in [0, L] \\ u(0, t) = p(t), & t \in [0, \infty[ \\ u(L, t) = q(t), & t \in [0, \infty[. \end{cases}$$

Físicamente, el término  $F(x, t)$  representa una fuerza actuando sobre el medio vibrante (por ejemplo, si  $F(x, t) = -ku_t(x, t)$ , puede verse como un término de rozamiento que amortigua las oscilaciones). Si pensamos en las oscilaciones de una cuerda, las condiciones sobre  $u(0, t)$  y  $u(L, t)$  nos dicen que los extremos no están fijos, sino que se mueven sobre las curvas  $p(t)$ ,  $q(t)$ .

Buscaremos una solución en la forma

$$u(x, t) = v(x, t) + \tilde{v}(x, t).$$

Sustituyendo en la ecuación de ondas con fuente, resulta la ecuación

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = F - \tilde{v}_{tt} + a^2 \tilde{v}_{xx};$$

además, tenemos las condiciones iniciales y de contorno, que en este caso se escriben

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= f(x) - \tilde{v}(x, 0) \\ v_t(x, 0) &= g(x) - \tilde{v}_t(x, 0) \\ v(0, t) &= p(t) - \tilde{v}(0, t) \\ v(L, t) &= q(t) - \tilde{v}(L, t). \end{aligned}$$

A la vista de estas ecuaciones, si queremos reducir el problema a uno con condiciones de contorno homogéneas (que sabemos resolver por separación de variables), resulta evidente que debemos escoger  $\tilde{v}$  de manera que

$$\begin{aligned} \tilde{v}(0, t) &= p(t) \\ \tilde{v}(L, t) &= q(t), \end{aligned}$$

lo cual se puede conseguir de manera sencilla tomando

$$\tilde{v}(x, t) = p(t) + \frac{x}{L}(q(t) - p(t)). \tag{6.33}$$



Notemos que

$$\tilde{v}_{xx}(x, t) = 0.$$

Entonces, con esta elección, el problema a resolver se reduce a uno para  $v(x, t)$  que ya tiene condiciones de contorno homogéneas:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = F - \tilde{v}_{tt} \\ v(x, 0) = f(x) - \tilde{v}(x, 0) \\ v_t(x, 0) = g(x) - \tilde{v}_t(x, 0) \\ v(0, t) = 0 \\ v(L, t) = 0. \end{cases} \quad (6.34)$$

△

## 6.6. Problemas correctamente planteados

Un problema de ecuaciones en derivadas parciales usualmente consta de una ecuación que hay que resolver para una función incógnita  $u$ , sujeta esta función incógnita a una o varias condiciones subsidiarias que pueden ser de varios tipos (condiciones iniciales, de frontera, mixtas, etc.). Llamemos  $\Gamma$  al conjunto de condiciones y sea  $L$  el operador que determina la ecuación a resolver, en la forma

$$Lu = 0 \quad (6.35)$$

El problema dado por ((6.35)) y las condiciones  $\Gamma$  se dice que está *correctamente planteado* (en el sentido de Hadamard) si:

- (1) Tiene al menos una solución.
- (2) La solución en (1) es única.
- (3) La solución  $u$  depende *continuamente* de los datos  $\Gamma$ .

Naturalmente, en cada caso concreto hay que precisar qué se entiende por “dependencia continua”, pues los espacios funcionales involucrados varían en cada problema. Por otra parte, las condiciones (1), (2) tienen un significado claro. Para entender lo que quiere decir (3), analizaremos el tipo de fenómenos que pueden aparecer en un problema mal planteado.

**Ejemplo 6.11** (Hadamard). Sea  $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  el operador de Laplace y planteemos la ecuación  $Lu = 0$  en una región  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ; es decir: buscamos funciones  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfagan la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega. \quad (6.36)$$

En el caso en que  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y > 1\}$  (el semidisco unidad superior), podríamos tomar

$$B = \{(x, 0) : |x| < 1\}$$

e imponer en  $B$  las condiciones (de tipo Cauchy):

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= g(y), \end{aligned} \quad (6.37)$$

para todo  $x \in ]-1, 1[$ . Puede comprobarse, por sustitución directa, que para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene una solución particular a la ecuación de Laplace (6.36) de la forma

$$u_n(x, y) = n^{-\sqrt{n}} \sinh(ny) \cos(nx).$$

En este caso, las condiciones (6.37) llevan a

$$g(x) = \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, 0) = n^{-\sqrt{n}} \cosh 0 \cos nx = n^{-\sqrt{n}} \cos nx$$

y es inmediato comprobar que  $g(x)$  tiende uniformemente a 0 en  $] -1, 1[$ <sup>5</sup>. Lo mismo ocurre con todas las derivadas de  $g$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -n^{-\sqrt{n}+1} \sin nx \\ g''(x) &= n^{-\sqrt{n}+2} \cos nx \\ &\dots \end{aligned}$$

Sin embargo, se tiene que para todo  $0 < y \leq 1$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\sqrt{n}} \sinh(ny) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\sqrt{n}} e^{ny} = \infty, \end{aligned}$$

pues, al ser la función  $\log$  creciente monótona, basta con tomar logaritmos y aplicar continuidad, para llegar a  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log e^{ny} - \log n^{\sqrt{n}})$ , de donde,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (ny - \sqrt{n} \log n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n}y - \log n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \log \frac{e^{\sqrt{n}y}}{n}, \end{aligned}$$

y este último límite es obviamente infinito. △

Así pues, en este caso no hay dependencia continua con los parámetros del problema: por una parte, la solución  $u$  debe cumplir que  $u(0, 0) = 0$  y, por otra parte,  $u(0, y)$  se puede hacer mayor que cualquier valor prefijado (tomando un  $n$  suficientemente grande) para cualquier valor  $y > 0$ , por cercano que esté a 0. Físicamente, esta situación supone que pequeñas variaciones en las medidas iniciales para  $u$ , conducen a errores arbitrariamente grandes: el sistema así descrito sería *inestable*, una situación que debe evitarse en la práctica debido a la imposibilidad que conlleva de predecir el comportamiento del sistema.

## 6.7. Ejercicios

1. Resolver el problema del flujo de calor en una barra de longitud  $L$ , cuyos extremos se mantienen a temperatura constante e igual a 0, para las siguientes distribuciones iniciales de temperatura:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

b)

$$f(x) = 3 \sin x - 5 \sin(2x) + 2 \sin(3x)$$

2. Resolver el problema del flujo de calor en una barra de longitud  $L$  en la que el extremo en  $x = 0$  se mantiene a temperatura constante  $T = 0$  y el extremo en  $x = L$  está aislado térmicamente (es decir,

---

<sup>5</sup>En efecto,  $|g(x)| = |n^{-\sqrt{n}} \cos nx| \leq n^{-\sqrt{n}}$  para todo  $x \in ] -1, 1[$  y, claramente, dado un  $\varepsilon > 0$  existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > n_0$  se tiene  $n^{-\sqrt{n}} < \varepsilon$  independientemente del valor  $x \in ] -1, 1[$  considerado.

no hay flujo de calor a través suyo):

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ u_x(L, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

3. Resolver el problema de las vibraciones de una cuerda elástica de longitud en reposo  $L$ , sujeta por sus extremos, para las siguientes configuraciones y velocidades iniciales:

a) Cuerda pulsada (como en una guitarra):

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{a} & \text{si } 0 < x < a \\ \frac{h(L-x)}{L-a} & \text{si } a < x < L \end{cases}, \quad u_t(x, 0) = g(x) = 0.$$

b) Cuerda golpeada (como en un piano) con velocidad inicial  $v$ :

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} \frac{vx}{a} & \text{si } 0 < x < a \\ \frac{v(L-x)}{L-a} & \text{si } a < x < L. \end{cases}$$

4. Resolver la ecuación de Laplace en el rectángulo  $]0, \pi[ \times ]0, \pi[$  para las siguientes funciones  $u(x, \pi) = f(x)$ ,  $x \in ]0, \pi[$ :

a)

$$f(x) = 1$$

b)

$$f(x) = x$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

d)

$$f(x) = x^2$$

5. Resolver el siguiente problema para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = t, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = 1 + 3 \cos 4\pi x, & 0 < x < 1 \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0 \\ u_x(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

¿Cuál es la interpretación física de las condiciones de contorno?.

6. Consideremos el problema de una cuerda de longitud finita  $L$  sobre la que actúa una fuerza externa  $F(x, t)$ , con extremos fijos:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x, t), & 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(L, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Encontrar una fórmula general para la solución, en términos de los datos  $F, f, g$ .  
 (b) Aplicar los resultados del apartado anterior al caso de una cuerda de longitud  $L = 1$ , con  $F(x, t) = F$  (constante),  $f(x) = x(1 - x)$ ,  $g(x) = 0$ .

7. Resolver el siguiente problema para la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = t^2, & t \geq 0 \\ u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

8. Resolver el siguiente problema no homogéneo para la ecuación de ondas (donde  $F$  es una constante):

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = x(1 - x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = t, & t \geq 0 \\ u(1, t) = \sin t, & t \geq 0. \end{cases}$$

9. Resolver el siguiente problema (con condiciones de contorno no homogéneas) para la ecuación del calor, con  $T_1, T_2, T_3$  temperaturas constantes:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = T_1, & t > 0 \\ u_x(L, t) = T_2 \\ u(x, 0) = T_2 x + T_3, & 0 < x < L. \end{cases}$$

*Sugerencia:* Buscar soluciones de la forma  $u(x, t) = v(x, t) + \tilde{v}(x)$ , con  $\tilde{v}(x)$  la *solución estacionaria* (es decir, la solución independiente del tiempo que cumple con las condiciones de contorno<sup>6</sup>).

10. En el ejercicio precedente, uno de los extremos de la barra se encuentra a temperatura constante y el otro está aislado. La técnica de buscar soluciones como perturbaciones de la solución estacionaria también funciona cuando ambos extremos están aislados o sólo permiten un flujo prefijado, pero en este caso se debe cumplir alguna condición adicional. Por ejemplo, dado el problema

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = Q(x) \\ u_x(0, t) = T_1 \\ u_x(L, t) = T_2 \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

la solución de equilibrio  $\tilde{v}(x)$  satisface

$$\begin{cases} -a^2 \tilde{v}_{xx} = Q(x) \\ \tilde{v}'(0) = T_1 \\ \tilde{v}'(L) = T_2. \end{cases}$$

Integrando la primera de estas ecuaciones entre 0 y  $L$ , resulta la llamada *condición de compatibilidad*

$$-a^2(\tilde{v}'(L) - \tilde{v}'(0)) = -a^2(T_2 - T_1) = \int_0^L Q(s) ds,$$

---

<sup>6</sup>Aunque no necesariamente las condiciones iniciales, que no tienen sentido para una solución independiente de  $t$ .

que nos dice que los flujos  $T_1, T_2$  no se pueden fijar arbitrariamente (lo cual es físicamente razonable: si, por ejemplo, en un extremo se permite la entrada de mucho calor mientras que en el otro se restringe su salida, en el interior se irá produciendo un aumento progresivo de la temperatura y no podrá darse el equilibrio). Teniendo presente estas observaciones, consideremos el problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + x, & 0 < x < L, t > 0 \\ u_x(0, t) = b \\ u_x(L, t) = 7 \\ u(x, 0) = -\frac{x^3}{6} + \left(\frac{L^2}{2} + 8\right)x. \end{cases}$$

- Determinar los valores de la constante  $b$  para los cuales hay una distribución de temperaturas en equilibrio.
- Hallar las soluciones estacionarias para los valores encontrados de  $b$ .
- Para esos valores de  $b$ , calcular las soluciones  $u(x, t)$ .

11. Resolver el siguiente problema (con condiciones de contorno no homogéneas) para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin x + \frac{x}{\pi} + e^{-t} \left(\frac{x}{\pi} - 1\right), & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = e^{-t}, & t > 0 \\ u(\pi, t) = t \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

12. Resolver el siguiente problema para la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + h, & 0 < x < 1, t > 0, h \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(1 - \cos \pi x) \\ u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 2u_0. \end{cases}$$

13. Resolver el siguiente problema, que físicamente representa vibraciones en un medio elástico (con constante de recuperación  $a$ ), mediante separación de variables:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) - a^2 u(x, t), & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = g(x), & 0 < x < \pi \\ u(0, t) = 0 = u(\pi, t), & t > 0. \end{cases}$$

14. Estudiar la solución al problema de las oscilaciones amortiguadas

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx} - au_t(x, t), & 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), & t > 0. \end{cases}$$

15. Un fenómeno de gran interés en el estudio del movimiento ondulatorio es el de la *resonancia*. Se trata de la aparición de oscilaciones con una amplitud no acotada, las cuales obviamente son problemáticas cuando se presentan en una estructura como un puente, edificio, etc<sup>7</sup>. Un modelo mecánico simple en

---

<sup>7</sup>Un ejemplo particularmente dramático de este fenómeno se dió en Angers (Francia) en 1850, cuando un puente sobre el río Maine colapsó por las resonancias producidas al pasar marchando un batallón de soldados.

el que surgen resonancias es el de una cuerda con un extremo fijo y con una fuerza armónica actuando en el otro. El modelo matemático es el siguiente:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx} - a^2 u(x, t), & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 = u_t(x, 0), & 0 < x < \pi, u(0, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(\pi, t) = \sin wt, & t > 0. \end{cases}$$

Calcular las soluciones de este problema y estudiar para qué valores de la frecuencia  $w$  aparecen resonancias.

16. El método de Fourier también puede aplicarse al estudio de la ecuación de ondas en dimensiones superiores. Consideremos por ejemplo las vibraciones de una membrana elástica rectangular que ocupa la región  $D = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$ , modeladas por el problema para la función  $u(x, y, t)$

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, & (x, y) \in ]0, a[ \times ]0, b[, t > 0 \\ u(x, y, 0) = \phi(x, y), & (x, y) \in [0, a] \times [0, b] \\ u_t(x, y) = \psi(x, y), & (x, y) \in [0, a] \times [0, b] \\ u(0, y, t) = 0 = u(a, y, t), & y \in [0, b], t \geq 0 \\ u(x, 0, t) = 0 = u(x, b, t), & x \in [0, a], t \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Proponer una solución de la forma  $u(x, y, t) = v(x, y)T(t)$  y reducir el problema a una ecuación diferencial ordinaria con condiciones iniciales para  $T$  y un problema de contorno para  $v(x, y)$ .
- (b) El problema de contorno para  $v(x, y)$  puede resolverse por el método de Fourier, buscando soluciones de la forma  $v(x, y) = X(x)Y(y)$ . Probar que los valores propios para  $X$  son  $\mu_m = m^2\pi^2/a^2$ , con funciones propias de la forma  $X_m(x) = d_m \sin(m\pi x/a)$ , mientras que para  $Y_n$  son  $\nu_n = n^2\pi^2/b^2$ ,  $Y_n(y) = e_n \sin(n\pi y/b)$ , respectivamente, con  $m, n \in \mathbb{N}$ .
- (c) Probar que, aplicando formalmente el principio de superposición, se llega a una solución en forma de serie doble

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} (A_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn} \sin \lambda_{mn} t),$$

donde  $\lambda_{mn} = \pi \sqrt{m^2/a^2 + n^2/b^2}$ .

- (d) Utilizando relaciones de ortogonalidad generalizadas y las condiciones de contorno, probar que los coeficientes  $A_{mn}, B_{mn}$  deben estar dados por

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \phi(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

y

$$B_{mn} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^a \int_0^b \psi(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

- (e) Físicamente, la solución obtenida representa el sonido generado por un tambor rectangular. A la vista de la expresión para las funciones propias asociadas a cada valor propio  $\lambda_{mn}$ , explicar por qué el sonido de un tambor carece de la armonía de instrumentos como el piano o la guitarra.
17. La ecuación de Laplace con fuentes,  $\Delta u(x, y) = \rho(x, y)$ , se denomina *ecuación de Poisson*. Típicamente, el término  $\rho(x, y)$  representa una densidad de carga, masa, etc. Resolver el siguiente problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson:

$$\begin{cases} \Delta(x, y) = \sin y & 0 < x, y < \pi \\ u(0, y) = 0 = u(\pi, y) & 0 < y < \pi \\ u(x, 0) = 0 = u(x, \pi) & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

18. Resolver el siguiente problema mixto para la ecuación de Laplace, dando una interpretación física de las condiciones de frontera:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & 0 < x, y < 1 \\ u(x, 0) = x, & 0 < x < 1 \\ u(x, 1) = 0, & 0 < x < 1 \\ u_x(0, y) = 0, & 0 < y < 1 \\ u_x(1, y) = y, & 0 < y < 1. \end{cases}$$

19. Resolver el siguiente problema no homogéneo para la ecuación de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x, y < \pi \\ u(x, 0) = 0 \\ u(x, \pi) = \frac{1}{4} \sin x - \frac{3}{4} \sin 3x \\ u(0, y) = 0 \\ u(\pi, y) = \sin 3y. \end{cases}$$

20. Resolver el siguiente problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un sector circular:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & x, y > 0, 0 < x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, 0) = u(0, y) = 0, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ u(x, y) = 2xy, & x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

21. Resolver el problema de Poisson en un anillo:

$$\begin{cases} \Delta u(r, \theta) = \sin \theta & 1 < r < 2, 0 \leq \theta < 2\pi \\ u_r(1, \theta) = \theta = u(2, \theta). \end{cases}$$

22. Determinar la única solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < r < 1, \theta \in ]0, \pi[ \\ u(1, \theta) + 2u_r(1, \theta) = 4 \sin \frac{3\theta}{2} \\ u(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0. \end{cases}$$

¿Está el problema bien planteado si se cambia  $2u_r(1, \theta)$  por  $-2u_r(1, \theta)$ ?

# 7

## Teoremas de existencia, unicidad y estabilidad

La solución de una ecuación en derivadas parciales obtenida mediante el método de Fourier, reviste un carácter formal debido al uso del principio de superposición con un número infinito de soluciones. Por supuesto, ya hemos desarrollado las herramientas teóricas que nos permiten justificar todos los pasos que llevan a la solución, así que en este capítulo probamos que las soluciones formales son, de hecho, soluciones clásicas en varios casos ilustrativos. Que tales soluciones son las buscadas estará garantizado por los teoremas de unicidad.

Por último, trataremos el importantísimo tema de la estabilidad, parte esencial de un correcto planteamiento siguiendo a Hadamard, y un requisito sin el cual las soluciones encontradas carecerían de interés físico, pues corresponderían a situaciones de impredecibilidad.

Las referencias principales para este capítulo son los textos [5, 9]. Como lectura complementaria se recomienda [8].

### 7.1. Existencia de solución a la ecuación del calor

El método de separación de variables para un problema como el de la ecuación de la ecuación del calor, se basa en tomar soluciones del tipo  $u_n(x, t) = X(x)T(t)$  (una para cada  $n \in \mathbb{N}$ ) y formar la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x, t),$$

afirmando que esta también es una solución del problema original. Veamos que, en efecto, así ocurre. Consideremos las soluciones obtenidas para el problema de calor que tienen la forma

$$u_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt},$$

de modo que la serie a considerar es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}$$

donde, como se vió en la sección 6.1, los coeficientes  $A_n$  están dados por los coeficientes de Fourier en senos para  $f$  (definida originalmente en  $]0, L[$ ) que se obtiene prolongando de forma impar al intervalo  $] -L, L[$ , y



de ahí a todo  $\mathbb{R}$  con periodo  $2L$ , de manera que la serie de Fourier de  $f$  en  $]0, L[$  viene dada por:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Así, lo que sabemos es que

$$A_n = b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Obviamente el hecho de que  $u(x, t)$  sea una serie convergente o no, depende de las características de  $f$ . Aquí supondremos que  $f$  es continua en  $]0, L[$  y que  $f'$  está definida en  $]0, L[$  salvo en un número finito de puntos. La prueba de que  $u(x, t)$  es solución tiene tres partes:

- (a) La serie  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x, t)$  converge uniformemente.
- (b) La función  $u(x, t)$  es diferenciable con respecto a ambas variables y cumple la ecuación del calor.
- (c) La función  $u(x, t)$  cumple las condiciones de contorno.

Analicemos cada una por separado.

- (a) Tenemos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x, t)$$

donde

$$|u_n(x, t)| = |A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}| \leq |A_n| e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \leq |A_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Podremos entonces aplicar el criterio de Weierstrass con  $M_n = |A_n|$ . Para esto necesitamos que  $\sum_{n=1}^{+\infty} |A_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$  sea convergente, pero eso es consecuencia de que  $f$  es continua en  $]0, L[$  y con derivada definida salvo en un conjunto finito de puntos, pues como se vió en la sección 5.4, si  $\tilde{a}_n$  son los coeficientes de Fourier de  $f'$  (los  $\tilde{b}_n=0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ) es

$$M_n = |A_n| = |b_n| = \frac{|\tilde{a}_n|}{n} \leq \frac{\tilde{a}_n^2}{2} + \frac{1}{2n^2}, \quad (7.1)$$

luego

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{a}_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

de nuevo por la desigualdad de Bessel y por ser  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$ .

- (b) Ahora queremos ver que  $u(x, t)$  puede derivarse las veces que sea necesario. En concreto queremos ver que ésta derivación se puede realizar término a término:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t).$$

Para probar (7.2), ya que sabemos que  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x, t)$  converge uniformemente (luego puntualmente), será suficiente con probar que los miembros derechos convergen uniformemente (por el teorema 3.14).

Ahora bien, ocurre que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{n\pi}{L} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} &= -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} &= -k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \end{aligned} \quad (7.3)$$

de donde, acotando,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t) \right| &\leq \frac{n\pi}{L} |A_n| e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \\ \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) \right| &\leq \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 |A_n| e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \\ \left| \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) \right| &\leq k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 |A_n| e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}. \end{aligned}$$

Llamemos (para aplicar el criterio de Weierstrass)

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{n\pi}{L} |A_n| e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \\ \tilde{M}_n &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 |A_n| e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}. \end{aligned}$$

Sabemos, por (7.1), que  $|A_n| < \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^2 + \frac{\pi^2}{6}) < \infty$ , luego los  $|A_n|$  están acotados independientemente de  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces la convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{M}_n$  se reduce (omitiendo factores irrelevantes) a estudiar la de  $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^2}$ . Aplicando el criterio del cociente para series numéricas 2.27:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{n e^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0 < 1$$

y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)^2}}{n^2 e^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2n+1}} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 0 < 1,$$

luego  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{M}_n$  convergen y por tanto  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} u(x, t)$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} u(x, t)$  convergen uniformemente, verificándose (7.2).

Con esto, es inmediato que  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$  cumple la ecuación del calor, pues por (7.2) y por ser cada  $u_n(x, t)$  solución,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} u(x, t) = k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} u(x, t) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(c) Falta comprobar que se cumplen las condiciones de contorno, pero esto es inmediato por cómo se definieron los coeficientes  $A_n = b_n$ :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x).$$

**Nota 7.1.** Un análisis semejante se puede realizar para el caso de la ecuación de Laplace. Como veremos en la sección 7.2, en el caso de la ecuación de ondas el análisis requiere imponer sobre  $f, g$  unas condiciones bastante restrictivas, pero en el caso de la ecuación de Laplace los razonamientos son similares a los de la ecuación del calor.

## 7.2. Existencia de solución a la ecuación de ondas

Vamos a estudiar la existencia de soluciones a la ecuación de ondas desde dos perspectivas complementarias, la del método de Fourier y la de D'Alembert, quien encontró una manera ingeniosa de expresar la solución sin usar series. La equivalencia entre ambos métodos se analiza en el ejercicio 3.

### 7.2.1. El método de Fourier

En el análisis del problema de una cuerda con extremos fijos mediante la técnica de separación de variables,

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (x, t) \in ]0, L[ \times ]0, \infty[ \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in ]0, L[ \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in ]0, L[ , \end{cases}$$

se obtenían soluciones formales del tipo

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left( A_n \cos\left(\frac{na\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{na\pi}{L}t\right) \right),$$

en las que hay que determinar los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$ . Los  $A_n$  se pueden identificar con los coeficientes del desarrollo en senos de la extensión impar de  $f$  al intervalo  $] -L, L[$ , y los  $B_n$  se identifican con una constante  $L/na\pi$  multiplicada por los coeficientes del desarrollo en senos de la extensión impar de  $g$  al intervalo  $] -L, L[$ . Se considera entonces una superposición de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

que debemos comprobar satisface todas las condiciones del problema original. Llegados a este punto nos interesará separar este problema en dos subproblemas. Consideremos las series dadas por

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{na\pi}{L}t\right) \quad (7.4)$$

y

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{na\pi}{L}t\right). \quad (7.5)$$

Por lo expuesto anteriormente, tenemos esperanzas de que (7.4) sea la solución al problema

$$\begin{cases} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & x \in ]0, L[, t \in ]0, +\infty[ \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), & t \in ]0, +\infty[ \\ u(x, 0) = f(x), & x \in ]0, L[ \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in ]0, L[ , \end{cases} \quad (7.6)$$

mientras que (7.5) lo sea del

$$\begin{cases} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & x \in ]0, L[, t \in ]0, +\infty[ \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), & t \in ]0, +\infty[ \\ u(x, 0) = 0, & x \in ]0, L[ \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in ]0, L[. \end{cases} \quad (7.7)$$

Por superposición de soluciones, una vez probado esto  $u = u_1 + u_2$  será la solución del problema original, que es lo que queríamos. Sin embargo, estos dos subproblemas no son en absoluto triviales. Comenzando por el primero (7.6), observamos que si se hace la hipótesis sobre  $f$  de ser continua y con derivada continua a trozos, podemos asegurar que la convergencia en (7.4) es uniforme en ambas variables  $(x, t)$ , puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{na\pi}{L}t\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$$

y esta última serie converge por (5.18). Por tanto, vemos que  $u_1(x, t)$  cumple todas las condiciones de contorno e iniciales de (7.6) excepto  $(u_1)_t(x, 0) = 0$ . Para comprobar esta propiedad, debemos poder derivar la serie término a término, pero esto está garantizado por la convergencia uniforme. Así, derivando en (7.4) y aplicando el teorema 5.18,

$$(u_1)_t(x, 0) = -\frac{a\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{na\pi}{L}0\right) = 0.$$

Por lo que respecta a  $u_1$ , el único paso que nos queda por ver es que satisface la propia ecuación de ondas homogénea. Esto requiere que podamos derivarla dos veces con respecto a  $t$  y a  $x$  y que las series resultantes sean uniformemente convergentes a  $(u_1)_{tt}$  y  $(u_1)_{xx}$  respectivamente; la presencia de las derivadas segundas implica que debemos añadir hipótesis sobre  $f$  para poder aplicar el teorema 5.18. Se comprueba entonces inmediatamente que

$$(u_1)_{tt} = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{na\pi}{L}t\right) = a^2 (u_1)_{xx}.$$

Para que esta serie converja uniformemente y se justifique la derivación término a término, por el criterio de Weierstrass basta con que sea convergente

$$\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |A_n|,$$

y dada la relación que existe entre los coeficientes de una función y los de su derivada (teorema 5.18), esta convergencia se da si  $f''$  es continua y  $f'''$  continua a trozos (pues lo que aparece aquí es básicamente la serie de Fourier de  $f''$ ).

En definitiva, si  $f$  y  $f''$  son continuas y  $f'$ ,  $f'''$  son continuas a trozos, (7.4) con los coeficientes  $A_n$  dados en (6.12) es una solución al problema (7.6). Nos falta ver que (7.5) con unos coeficientes  $B_n$  apropiados es solución del problema (7.7). Los mismos razonamientos que acabamos de hacer sirven para justificar las derivaciones respecto a  $x$  y  $t$  en  $g$ , pero en este caso, como el coeficiente  $B_n$  es igual a  $b_n$  (coeficiente del desarrollo en senos de la extensión de  $g$ ) multiplicado por un factor  $1/n$  (véase (6.15)), al derivar dos veces resulta

$$\begin{aligned} a^2 (u_2)_{xx} &= (u_2)_{tt} = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{na\pi}{L}t\right) \\ &= a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{L}{na\pi}\right) b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{na\pi}{L}t\right) \\ &= a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{na\pi}{L}t\right). \end{aligned}$$

De nuevo por el teorema de Weierstrass, esta serie será uniformemente convergente (justificándose así todos los pasos) si converge

$$\frac{a\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|,$$

para lo cual sólo se requiere que  $g$  sea de clase  $C^1$  (en particular,  $g'$  continua) y que  $g''$  sea continua a trozos.

**Nota 7.2.** En el análisis precedente, aparecen unas propiedades muy restrictivas sobre  $f$  y  $g$  que no se cumplirán en muchas aplicaciones prácticas (donde, por ejemplo, aparecerán pulsos triangulares como configuraciones iniciales que no tienen primera derivada continua). Las fórmulas siguen siendo válidas en estos casos, que pueden considerarse como límites de situaciones descritas por funciones que sí cumplen los requisitos que hemos pedido. La teoría apropiada para trabajar propiamente con estas situaciones es la de las *distribuciones* o *funciones generalizadas*, que trataremos brevemente en un capítulo posterior (siguiendo a W. O. Bray: A journey into PDEs, Proposition 6.4, donde se ve que condiciones menos restrictivas sobre  $f$  y  $g$ —que  $f$  sea continua con derivada continua a trozos y que  $g$  sea continua a trozos— garantizan que la  $u(x, t)$  construída por el método de Fourier es una solución débil).

### 7.2.2. El método de D'Alembert

Consideremos el problema para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & (x, t) \in ]0, L[ \times ]0, \infty[ \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in ]0, L[ \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in ]0, L[. \end{cases} \quad (7.8)$$

Se trata del problema de la cuerda pulsada que ya conocemos (véase el ejercicio 3 del capítulo precedente). Recordemos de la sección precedente que la estructura del problema impone ciertas condiciones de compatibilidad a la función  $\phi$  (y otras similares a una eventual función  $\psi$  tal que fuese  $u_t(x, 0) = \psi$ ), derivadas de imponer la condición de que la solución  $u$  sea una solución clásica, esto es, continua en  $D = [0, L] \times [0, \infty[$  y de clase  $C^2$  en  $]0, L[ \times ]0, \infty[$ :

$$\begin{aligned} \phi(0) = u(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} u(0, t) = 0 \\ \phi(L) = u(L, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} u(L, t) = 0 \\ \phi''(0) = u_{xx}(0, 0) = u_{tt}(0, 0) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} u(0, t) = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} 0 = 0 \\ \phi''(L) = u_{xx}(L, 0) = u_{tt}(L, 0) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} u(L, t) = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Estas condiciones se supondrá en lo que sigue que se cumplen sin volver a mencionarlo.

D'Alembert<sup>1</sup> comenzó por considerar únicamente la ecuación  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  (en la que renombramos el coeficiente  $a$  como  $c$  para coincidir con las notaciones habituales en Física), sin preocuparse por las condiciones adicionales. Introduciendo las nuevas variables (llamadas *características*)

$$\begin{aligned} \xi &= x + ct \\ \eta &= x - ct, \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Su nombre real era Jean Baptiste Le Rond d'Alembert. Fué un hijo no reconocido de madre de familia media-baja, Claudine de Tencin, y el duque Leopold d'Arenberg. Sus padres lo abandonaron en la puerta de la iglesia de Saint-Jean-Le-Rond, en Paris, de modo que al ser bautizado tomó su nombre de San Juan Bautista, a quien la iglesia estaba dedicada (actualmente se encuentra derruida). Aunque su padre nunca lo reconoció como hijo legítimo, encargó a uno de sus ayudantes, el caballero Louis Destouches, que se encargara de pagar su educación, para lo cual le dejó un cuantioso fondo económico. Tras un tiempo usando su apellido como d'Arenberg, finalmente lo cambió a la forma D'Alembert, con la que hoy es conocido.

resulta inmediato comprobar que la regla de la cadena conduce a

$$u_{tt} = c^2 u_{\xi\xi} - 2c^2 u_{\xi\eta} + c^2 u_{\eta\eta},$$

y

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

de modo que

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 u_{\xi\eta},$$

y así la ecuación de ondas en las nuevas variables es simplemente

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Esta ecuación implica que  $u_\eta$  no depende de  $\xi$ , esto es, que  $u_\eta = G(\eta)$ , con  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  arbitraria de clase  $\mathcal{C}^1$ . Integrando otra vez,  $u(\xi, \eta) = f(\xi) + \int G(\eta) d\eta$ , de nuevo con  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  arbitraria de clase  $\mathcal{C}^2$ , o bien,

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

Regresando a las variables originales, vemos que las soluciones a la ecuación de ondas  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$  se pueden expresar como

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct). \quad (7.9)$$

En principio, los términos  $f(x + ct)$ ,  $g(x - ct)$  representan ondas que matienen su forma y se desplazan hacia la derecha y la izquierda, respectivamente. Notemos que en  $t = 0$ ,

$$\phi(x) = u(x, 0) = f(x) + g(x).$$

En particular, si elegimos las funciones arbitrarias  $f$  y  $g$  como iguales, resulta que

$$\phi(x) = 2f(x),$$

(notemos que en este paso se requiere que sea  $\phi$  de clase  $\mathcal{C}^2$ ) así que la solución al problema (7.8) se podrá escribir como

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)). \quad (7.10)$$

Realmente, como  $\phi$  está sólo definida en  $[0, L]$ , debemos considerar alguna forma de extenderla a todo  $\mathbb{R}$ . Como además queremos que se satisfagan las condiciones de frontera  $u(0, t) = 0 = u(L, t)$ , debe cumplirse que  $\phi(0) = 0 = \phi(L)$ , como ya vimos. Esto sugiere que tomemos la extensión periódica impar de  $\phi$ , llamémosla  $\tilde{\phi}$ . Por tanto, consideraremos la función  $u : \mathbb{R} \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\tilde{\phi}(x + ct) + \tilde{\phi}(x - ct)),$$

y comprobaremos que es una solución al problema (7.8). En primer lugar, es obvio que por construcción se tiene  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ . Por ser  $\tilde{\phi}$  impar, es

$$u(0, t) = \frac{1}{2} (\tilde{\phi}(ct) + \tilde{\phi}(-ct)) = \frac{1}{2} (\tilde{\phi}(ct) - \tilde{\phi}(ct)) = 0,$$

luego se satisface la condición inicial, y por tener periodo  $2L$ ,

$$\begin{aligned} u(L, t) &= \frac{1}{2} (\tilde{\phi}(L + ct) + \tilde{\phi}(L - ct)) \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{\phi}(L + ct) + \tilde{\phi}(L - ct - 2L)) \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{\phi}(L + ct) + \tilde{\phi}(-L - ct)) \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{\phi}(L + ct) - \tilde{\phi}(L + ct)) = 0. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} (\tilde{\phi}(x) + \tilde{\phi}(x)) = \tilde{\phi}(x),$$

luego  $u(x, 0) = \phi(x)$  en  $[0, L]$ , y

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{1}{2} (\tilde{\phi}(x+ct) + \tilde{\phi}(x-ct)) \\ &= \frac{1}{2} (c\tilde{\phi}'(x) - \tilde{\phi}'(x)). \end{aligned}$$

De este modo,  $u(x, t)$  es solución al problema (7.8), bajo la condición  $\phi \in \mathcal{C}^2([0, L])$ .

**Nota 7.3.** Del análisis de los pasos seguidos en el método de D'Alembert se ve fácilmente que el método, aunque proporciona una solución en forma explícita muy sencilla, es difícilmente generalizable a dimensiones superiores o al caso en que las condiciones de contorno no son homogéneas, por lo que su aplicabilidad es más limitada que la del método de Fourier.

### 7.3. Principios del máximo y del mínimo para la ecuación del calor

La prueba de la unicidad y estabilidad de las soluciones a la ecuación del calor en una barra finita, con temperaturas fijas en los extremos, se apoya en el siguiente resultado.

**Teorema 7.4** (Principio del máximo). Sean  $L, T > 0$  y denotemos  $D = [0, L] \times [0, T]$ ,

$$U = (\{0\} \times [0, T]) \cup ([0, L] \times \{0\}) \cup (\{L\} \times [0, T]).$$

Si  $u$  es una función continua en  $D$ , de clase  $\mathcal{C}^2$  en  $D \setminus U^2$  y tal que es solución de la ecuación del calor  $u_t = \kappa u_{xx}$  en  $D \setminus U$ , entonces, alcanza su máximo en la frontera  $U$ ,

$$\max_D u = \max_U u.$$

*Demostración.* Denotemos  $M = \max_D u$  y  $m = \max_U u$  (existen por ser  $u$  continua y  $D, U$  ambos compactos). Es obvio que  $M \geq m$ . Supongamos que  $M > m$  y veamos que se llega a un absurdo, con lo cual se tendrá la equivalencia del enunciado.

Si  $M > m$  existirá un punto  $(x_0, t_0) \in D \setminus U$  tal que  $u(x_0, t_0) = M$ . Definimos la función

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M - m}{2L^2} (x - x_0)^2.$$

Observamos que para cualquier  $(x, t) \in U$  se cumple que

$$v(x, t) \leq m + \frac{M - m}{2L^2} L^2 = \frac{1}{2}(m + M) < M.$$

También se tiene que

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) + \frac{M - m}{2L^2} (x_0 - x_0)^2 = u(x_0, t_0) = M,$$

así que el máximo de  $v(x, t)$  en  $D$  es mayor o igual que  $M$ . De nuevo, como  $D$  es compacto, este máximo se alcanza. Sea  $(x_1, t_1) \in D$  el punto donde  $v(x, t)$  alcanza su máximo; acabamos de ver que  $(x_1, t_1) \notin U$ . Si es

---

<sup>2</sup>Las soluciones con estas propiedades, es decir, tales que  $u \in \mathcal{C}(D) \cap \mathcal{C}^2(D \setminus U)$ , se llaman *soluciones clásicas* a la ecuación del calor.

$(x_1, t_1) \in \text{int}(D)$ , entonces, por la caracterización de extremos de funciones de dos variables en términos del hessiano,

$$v_t(x_1, t_1) = 0 = v_x(x_1, t_1) \quad \text{y} \quad v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0.$$

Si el extremo se alcanza en el segmento horizontal superior (que no está en  $U$ ),  $(x_1, t_1) \in [0, L] \times \{T\}$ ,

$$v_t(x_1, t_1) \geq 0, \quad v_x(x_1, t_1) = 0 \quad \text{y} \quad v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0.$$

En cualquier caso, ocurre que

$$v_t(x_1, t_1) - \kappa^2 v_{xx}(x_1, t_1) \geq 0. \quad (7.11)$$

Ahora bien, por la definición de  $v(x, t)$  y el hecho de que  $u(x, t)$  es solución a la ecuación del calor  $u_t - \kappa^2 u_{xx}$ , se deduce que

$$v_t(x_1, t_1) - \kappa^2 v_{xx}(x_1, t_1) = -\frac{\kappa^2}{L^2}(M - m) < 0,$$

lo cual contradice (7.11). □

**Corolario 7.5** (Principio del mínimo). *En las condiciones del teorema precedente 7.4, se cumple que*

$$\min_D u = \min_U u.$$

*Demostración.* Basta con observar que

$$\min_D u = -\max_D(-u) = -\max_U(-u) = \min_U u.$$

□

La unicidad de la solución también se sigue de manera inmediata.

**Corolario 7.6** (Unicidad de la solución clásica). *En las condiciones del teorema 7.4, si  $u_1, u_2$  son dos soluciones de la ecuación del calor, entonces,  $u_1 = u_2$ .*

*Demostración.* Basta con aplicar los principios del mínimo y del máximo a la función  $u = u_1 - u_2$  la cual, por hipótesis, se anula en  $U$ . Así:

$$\max_D u = 0 = \max_U u \quad \text{y} \quad \min_D u = 0 = \min_U u,$$

de donde se sigue que  $u = 0$  en  $D$ . □

Finalmente, abordamos el problema de la estabilidad.

**Corolario 7.7** (Estabilidad de la solución clásica). *En las condiciones del teorema 7.4, si  $g_1, g_2 \in \mathcal{C}([0, L])$  y  $h_i, k_i \in \mathcal{C}([0, T])$  (con  $i \in \{1, 2\}$ ) son tales que, para un  $\varepsilon > 0$  prefijado de antemano,*

$$\begin{aligned} |g_1(x) - g_2(x)| &\leq \varepsilon, \quad \text{en } [0, L], \\ |h_1(t) - h_2(t)| &\leq \varepsilon, \quad \text{en } [0, T], \\ |k_1(t) - k_2(t)| &\leq \varepsilon, \quad \text{en } [0, T], \end{aligned}$$

*entonces, dadas dos soluciones clásicas  $u_1, u_2$  que cumplan*

$$\begin{aligned} u_i(x, 0) &= g_i(x), \quad \text{en } [0, L], \\ u_i(0, t) &= h_i(t), \quad \text{en } [0, T], \\ u_i(L, t) &= k_i(t), \quad \text{en } [0, T], \end{aligned}$$

*se tiene que, para todo  $(x, t) \in D$ ,*

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon.$$



*Demostración.* Se sigue inmediatamente de las hipótesis sobre las funciones  $g_i, h_i, k_i$  (que dan los valores sobre la frontera  $U$ ) y de los principios del máximo y del mínimo que, para cualquier  $(x, t) \in D$ ,

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\leq \underset{U}{\text{mín}}(u_1 - u_2) \\ &= \underset{D}{\text{mín}}(u_1 - u_2) \\ &\leq u_1(x, t) - u_2(x, t) \\ &\leq \underset{D}{\text{máx}}(u_1 - u_2) \\ &= \underset{U}{\text{máx}}(u_1 - u_2) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Nota 7.8.** El análisis que hemos hecho se adapta sin mayor dificultad al caso de las funciones armónicas (soluciones clásicas de la ecuación de Laplace), véanse los ejercicios 1 y 2 de este capítulo.

## 7.4. La integral de energía en la ecuación de ondas

Si una partícula de masa  $m > 0$  se mueve en una dimensión bajo la acción de una fuerza de tipo gradiente  $F = -V'(x)$  (con  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable), es bien conocido que la energía mecánica total, definida como función implícita del tiempo por  $E(t) = m\dot{x}(t)^2/2 + V(x(t))$  (donde  $\dot{x}(t) = dx/dt$ ), es constante. La prueba es directa, usando la regla de la cadena y la ecuación de Newton  $m\ddot{x} = F = -V'$ :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{m}{2} \frac{d\dot{x}^2}{dt} + \frac{dV(x(t))}{dt} \\ &= m\dot{x}\ddot{x} + V'(x(t))\dot{x} \\ &= \dot{x}(m\ddot{x} + V') = 0. \end{aligned}$$

Esta misma idea puede aplicarse a sistemas continuos, como el caso de una cuerda. Ahora el papel de energía total, entendida como suma de energía cinética (“un medio de la masa por la velocidad al cuadrado”) y energía potencial (“masa por la constante gravitacional por la altura”), para el caso de una cuerda de longitud  $L$  lo juega la función *integral de energía*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (c^2 u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)) \, dx.$$

**Nota 7.9.** Notemos que si  $u(x, t)$  es una solución clásica de la ecuación de ondas<sup>3</sup>, es una función de clase  $\mathcal{C}^2$  en  $t > 0$ , de modo que  $E(t)$  es una función diferenciable de  $t$  en ese intervalo.

**Teorema 7.10.** *Si  $u(x, t)$  es una solución a la ecuación de ondas con extremos fijos a 0 en el intervalo  $[0, L]$  (es decir, condiciones de contorno homogéneas), la integral de energía se conserva, esto es,*

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

*Demostración.* Se trata de un cálculo directo, teniendo en cuenta que la regularidad de las funciones que intervienen permite aplicar los teoremas de derivación bajo el signo integral, la regla de la cadena e integración por partes:

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L (c^2 u_x u_{xt} + u_t u_{tt}) \, dx = c^2 u_x u_t \Big|_0^L - \int_0^L c^2 u_t u_{xx} \, dx + \int_0^L u_t u_{tt} \, dx. \quad (7.12)$$

<sup>3</sup>Es decir, continua en todo el dominio del problema y de clase  $\mathcal{C}^2$  en su interior.

Ahora, observemos que de la condición inicial  $u(0, t) = 0$ , para todo  $t \geq 0$ , se sigue que  $u_t(0, t) = 0$ . Análogamente, de  $u(L, t) = 0$  resulta  $u_t(L, t) = 0$ . Con esto, la ecuación (7.12) queda como

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^L u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx = 0.$$

□

**Corolario 7.11** (Unicidad de la solución clásica). *La solución clásica al problema de ondas*

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \in ]0, L[, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, L] \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in [0, L] \\ u(0, t) = h(t), & t \geq 0 \\ u(L, t) = k(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

es única.

*Demostración.* Sean  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$  dos soluciones clásicas al problema de ondas. Entonces, la diferencia  $v = u_1 - u_2$  es solución al problema con condiciones homogéneas

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0, & x \in ]0, L[, t > 0 \\ v(x, 0) = 0, & x \in [0, L] \\ v_t(x, 0) = 0, & x \in [0, L] \\ v(0, t) = 0, & t \geq 0 \\ v(L, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

El teorema de conservación de la integral de energía nos asegura que

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (c^2 v_x^2(x, t) + v_t^2(x, t)) dx = E(0).$$

Ahora bien, como  $v_t(x, 0) = 0$  y  $v_x(x, 0) = 0$  (pues  $v(x, 0) = 0$  para todo  $0 \leq x \leq L$ ), es claro que  $E(0) = 0$ , de donde  $E(t) = 0$  para todo  $t > 0$ . Pero como se trata de una integral con integrando mayor o igual que cero (por ser suma de cuadrados), necesariamente es  $c^2 v_x^2(x, t) + v_t^2(x, t) = 0$  para todo  $t > 0$ , lo cual implica que

$$v_x(x, t) = 0 = v_t(x, t),$$

para todo  $t > 0$  y  $0 < x < L$ . A su vez, esto lleva a que sea  $v(x, t)$  constante, y como se tiene la condición inicial  $v(x, 0) = 0$ , resulta finalmente  $v(x, t) = 0$ . □

La fórmula de D'Alembert permite también dar una prueba muy sencilla de la estabilidad de la solución al problema con condiciones de contorno homogéneas.

**Corolario 7.12** (Estabilidad de la solución clásica). *Si  $u_1$ ,  $u_2$  son soluciones clásicas respectivas a los problemas de ondas*

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \in ]0, L[, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi_i(x), & x \in [0, L] \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in [0, L] \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(L, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

para  $i \in \{1, 2\}$ , entonces, para cualquier intervalo de tiempo  $[0, t]$ , dado un  $\varepsilon > 0$  siempre se puede encontrar un  $\delta > 0$  tal que si  $|f_1(x) - f_2(x)| < \delta$ , sea  $|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon$ . En otras palabras, la única solución al problema, es estable.

*Demostración.* Es inmediata a partir de la fórmula de D'Alembert (7.10) y las hipótesis:

$$\begin{aligned} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| &\leq \frac{1}{2} (|\phi_1(x + ct) - \phi_2(x + ct)| + |\phi_1(x - ct) - \phi_2(x - ct)|) \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

de modo que dado  $\varepsilon > 0$  basta con tomar  $\delta = \varepsilon$ . □

## 7.5. Ejercicios

1. Probar el principio del máximo para las funciones armónicas. Como consecuencias, deducir el principio del mínimo y la unicidad y estabilidad de las soluciones a la ecuación de Laplace en un dominio acotado  $D \subset \mathbb{R}^2$ .
2. Estudiar la estabilidad de las soluciones a la ecuación de Poisson  $\Delta u = f$  en un dominio acotado  $D \subset \mathbb{R}^2$ .
3. Comprobar que, bajo condiciones apropiadas que garanticen que ambos métodos son aplicables, las soluciones al problema de ondas proporcionadas por Fourier y D'Alembert son iguales.
4. Generalizar la solución de D'Alembert al caso del problema de ondas con velocidad inicial (cuerda golpeada)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & (x, t) \in ]0, L[ \times ]0, \infty[ \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in ]0, L[ \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in ]0, L[. \end{cases}$$

5. Para una cuerda con extremos fijos que vibra en un medio viscoso, con coeficiente de resistencia  $k > 0$ , el problema de determinar sus oscilaciones amortiguadas se modela mediante

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} + k u_t = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L \\ u_t(x, 0) = g(x), & 0 < x < L \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), & t > 0. \end{cases}$$

- (a) Probar que la energía total se disipa (esto es, disminuye con el tiempo).
  - (b) Probar que la solución es única.
  - (c) Probar que la energía total está acotada en función de los datos iniciales.
6. La integral de energía proporciona una condición suficiente para asegurar la unicidad de la solución, pero esta condición no es necesaria. Consideremos el problema dado por

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin x, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = 2 \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = 0 = u(\pi, t). \end{cases}$$

- (a) Probar que tiene una única solución (utilizando los resultados de la subsección 7.2.1).
- (b) Calcular explícitamente la solución del apartado precedente.
- (c) Probar que para la solución hallada, la integral de energía no es constante (de hecho, cumple que  $E(t) = \pi(1 + \cos t) \geq 0$ ).

7. Probar la estabilidad de la solución al problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & (x, t) \in ]0, L[ \times ]0, \infty[ \\ u(0, t) = 0 = u(L, t), & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in ]0, L[ \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in ]0, L[. \end{cases}$$

8. La ecuación de Klein-Gordon para una partícula relativista de masa  $m$  y espín 0, confinada en una dimensión, es<sup>4</sup>

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) - m^2 u(x, t),$$

donde  $0 < x < L$ . Suponiendo condiciones de contorno homogéneas (esto es,  $u(0, t) = 0 = u(L, t)$ ), probar que la integral de energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (u_t^2(x, t) + c^2 u_x^2(x, t) + m^2 u^2(x, t)) \, dx,$$

se conserva. ¿Qué puede decirse acerca de la unicidad de las soluciones a la ecuación de Klein-Gordon?

---

<sup>4</sup>Obsérvese la semejanza formal de esta ecuación con la de vibraciones en un medio elástico, analizadas en los ejercicios 13 y 15 del capítulo 6. La diferencia entre ambas estriba en la interpretación física.



# 8

## La transformada de Fourier

En capítulos anteriores hemos visto la forma en la que el análisis de Fourier puede usarse para resolver problemas de ecuaciones en derivadas parciales cuando el dominio de definición del problema es acotado. La clave para ello reside en que esta acotación permite imponer condiciones de contorno que, a su vez, determinan un subconjunto discreto de valores propios que seleccionan las soluciones elementales que se superponen para dar la solución. Cuando el dominio es no acotado, este procedimiento falla. En general, aparece un continuo de valores propios admisibles y debe considerarse una integral en lugar de una suma. Aparece entonces la transformada de Fourier que, junto con la convolución, es una de las herramientas más potentes para el estudio de ecuaciones en derivadas parciales.

Para este capítulo se ha seguido muy de cerca la presentación de [3] y [7]. En [1] se da un enfoque más computacional, con numerosos ejemplos de interés en ingeniería.

### 8.1. Motivación y definición

Si se intenta aplicar el método de separación de variables al problema de la conducción del calor en una varilla de longitud infinita conocida la distribución inicial de temperaturas (problema de Cauchy)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

escribiendo  $u(x, t) = X(x)T(t)$  y sustituyendo se llega a las ecuaciones que ya conocemos,  $X''(X) + \lambda X(x) = 0$  y  $T'(t) + \lambda T(t) = 0$ . Con el análisis habitual determinamos que las soluciones válidas se dan en el caso  $\lambda \geq 0$ , para el cual las raíces del polinomio característico son complejas. Así, las soluciones elementales válidas son

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

En el caso acotado, en este momento imponíamos las condiciones de contorno para seleccionar un conjunto numerable de autovalores  $\lambda$ . Aquí no tenemos esa posibilidad, nuestra única información se refiere al valor inicial  $u_0(x) = u(x, 0)$ . Por tanto, aplicando el principio de superposición estrictamente, nos vemos obligados a considerar soluciones de la forma

$$u(x, t) = \int_0^\infty (A(\lambda)e^{-\lambda t} \cos(\sqrt{\lambda}x) + B(\lambda)e^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\lambda}x)) d\lambda.$$

El cambio  $y = \sqrt{\lambda}$  transforma esta expresión en

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} (A(y)e^{-y^2 t} \cos(yx) + B(y)e^{-y^2 t} \sin(yx)) dy.$$

Haciendo las extensiones (par e impar, respectivamente)

$$a(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}A(y), & \text{si } y \geq 0, \\ \frac{1}{2}A(-y), & \text{si } y < 0, \end{cases}$$

y

$$b(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}B(y), & \text{si } y \geq 0, \\ -\frac{1}{2}B(-y), & \text{si } y < 0, \end{cases}$$

e introduciendo  $c(y) = a(y) + ib(y)$ , unos cálculos sencillos que se dejan como ejercicio conducen a una expresión muy sugerente para la solución:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(y)e^{-y^2 t} e^{iyx} dy.$$

Esto es el análogo del principio de superposición. Ahora, para resolver el problema tendríamos que determinar las *funciones*  $c(y)$  de manera que se satisfaga la condición inicial

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} c(y)e^{iyx} dy = u_0(x).$$

Formalmente, una solución consiste en tomar una integral de la forma

$$c(y) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)e^{-iyx} dx,$$

lo cual motiva la definición de transformada de Fourier.

**Definición 8.1.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Su transformada de Fourier es la función compleja de variable real dada por

$$\widehat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt. \quad (8.1)$$

**Nota 8.2.** Otras notaciones para la transformada de Fourier son  $F(w)$  ó  $\mathcal{F}(f)(w)$ .

Tal y como se ha definido la transformada, nada asegura que exista. Como  $|e^{-iwt}| = 1$ , se tiene que

$$|\widehat{f}(w)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt,$$

y vemos que una condición suficiente para que exista es que  $f$  sea absolutamente integrable en  $\mathbb{R}$ , lo cual se denota como  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . De hecho, es posible probar que la transformada también está definida cuando se toman funciones de cuadrado integrable,  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , que son aquellas para las cuales

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

La transformada de Fourier se puede interpretar como un operador, es decir, una aplicación que transforma funciones en funciones. Bajo este punto de vista, una primera propiedad importantísima de este operador es su linealidad.

**Proposición 8.3.** Si  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , entonces

$$(\alpha f + \beta g)(w) = \alpha \widehat{f}(w) + \beta \widehat{g}(w).$$

*Demostración.* Es una consecuencia inmediata de la linealidad de la integral. □

**Ejemplo 8.4.** Consideremos el *impulso rectangular* representado en la figura para  $T = \pi$ ,

$$p_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

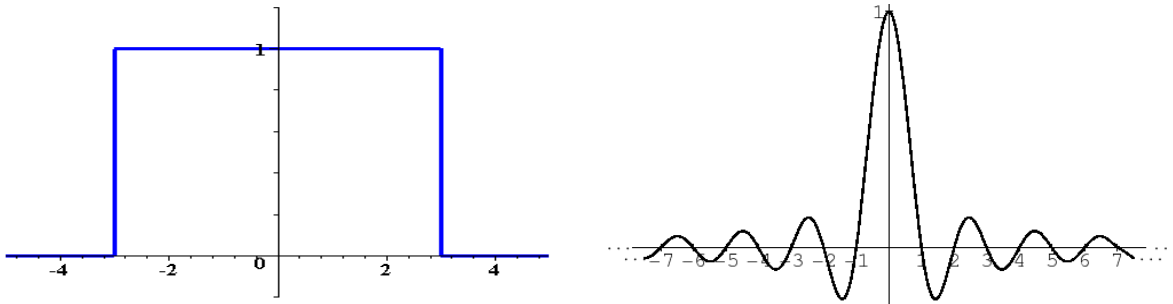
Su transformada de Fourier se puede calcular por integración directa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_T(t) e^{-iwt} dt = \int_{-T}^T e^{-iwt} dt = \frac{1}{-iw} e^{-iwt} \Big|_{-T}^T = \frac{1}{-iw} (e^{-iwT} - e^{iwT}) = \frac{2}{w} \sin wT.$$

En términos de la función  $\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen } \pi x}{\pi x}$ , el resultado se puede reescribir como

$$\widehat{p}_T(w) \frac{2}{w} \sin wT = 2T \text{sinc}\left(\frac{wT}{\pi}\right). \quad (8.2)$$

△



Impulso rectangular y su transformada

**Ejemplo 8.5.** Para la función definida por

$$f(t) = e^{-|t|},$$

tenemos el cálculo directo

$$\begin{aligned} \widehat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-iwt} e^{-t} dt + \int_0^{\infty} e^{-iwt} e^{-t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-t(1+iw)} dt + \int_0^{\infty} e^{t(1-iw)} dt \\ &= \frac{1}{1+iw} + \frac{1}{1-iw} \\ &= \frac{2}{1+w^2}. \end{aligned}$$

△

Junto con la transformada de Fourier, se introduce la *antittransformada*. Se trata de otro operador, inverso de la transformación de Fourier en el siguiente sentido.

**Teorema 8.6** (de inversión). *Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  es una función sección suave a pedazos, para cada  $t \in \mathbb{R}$  se cumple que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{iwt} dw = \pi(f(t+) - f(t-)).$$



En particular, si  $f$  es continua en  $t$ , se tiene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{iwt} dw.$$

Se define entonces la antitransformada de Fourier de una función  $F(w)$ , denotada  $\mathcal{F}^{-1}(F)(t)$ , como

$$\mathcal{F}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dw.$$

**Nota 8.7.** Un par de funciones  $(f, \widehat{f})$  se denomina un par transformada-antitransformada, y se suele denotar  $f \leftrightarrow \widehat{f}$ .

El teorema de inversión tiene una consecuencia muy importante: permite probar que la transformada de Fourier es (bajo ciertas condiciones) un operador inyectivo, de modo que si conocemos la transformada de Fourier de una cierta función, sabemos que ésta está unívocamente determinada.

**Proposición 8.8.** Si  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  son continuas y suaves por pedazos, y cumplen que para todo  $w \in \mathbb{R}$  es

$$\widehat{f}(w) = \widehat{g}(w),$$

entonces,

$$f(t) = g(t),$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* La función diferencia  $h = f - g$  claramente es de  $L^1(\mathbb{R})$ , continua y suave por pedazos. Por linealidad y la hipótesis,

$$\widehat{h} = \widehat{f} - \widehat{g} = 0,$$

luego, por el teorema de inversión,  $h = 0$ , lo cual implica  $f = g$ . □

**Ejemplo 8.9.** Consideremos una función gaussiana  $f(t) = be^{-at^2}$ . Calculemos su transformada de Fourier, aplicando directamente la definición y completando cuadrados:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} be^{-at^2} e^{-iwt} dt \\ &= b \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+iwt)} dt \\ &= b \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+iwt)} e^{-\frac{w^2}{4a}} e^{\frac{w^2}{4a}} dt \\ &= b \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+iwt-\frac{w^2}{4a})} e^{-\frac{w^2}{4a}} dt \\ &= b \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{at+\frac{iw}{2\sqrt{a}}})^2} e^{-\frac{w^2}{4a}} dt \end{aligned}$$

Ahora, hacemos el cambio de variable lineal  $\sqrt{at+\frac{iw}{2\sqrt{a}}} = y$ :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(w) &= be^{-\frac{w^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{b}{\sqrt{a}} e^{-\frac{w^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \\ &= b\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}. \end{aligned}$$

En definitiva: *la transformada de una gaussiana es otra gaussiana*. Si  $f(t) = be^{-at^2}$ , entonces

$$\widehat{f}(w) = b\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}. \quad (8.3)$$

Esta curiosa propiedad permite calcular fácilmente las antitransformadas de gaussianas. Por ejemplo, ¿Cuál es la antitransformada de  $F(w) = e^{-kcw^2}$  ( $k, c \in \mathbb{R}$ )?. En primer lugar, debe ser

$$b\sqrt{\frac{\pi}{a}} = 1,$$

de donde  $b$  quedará determinado una vez que conozcamos  $a$ :

$$b = \sqrt{\frac{a}{\pi}}.$$

Para calcular  $a$ , usamos que debe ser  $kc = 1/4a$ , luego

$$a = \frac{1}{4kc}.$$

Con todo esto, resulta que si  $F(w) = e^{-kcw^2}$ , entonces

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(w)\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi kc}}e^{-\frac{t^2}{4kc}}. \quad (8.4)$$

△

En todos los ejemplos que hemos tratado, es inmediato comprobar que las transformadas cumplen la propiedad asintótica  $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \widehat{f}(w) = 0$ . Esto no es una casualidad, sino que puede probarse con toda generalidad. Es la versión continua del Lema de Riemann-Lebesgue que se vió en el apartado 5.3.

**Proposición 8.10.** *Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continua por pedazos, si  $F(\omega)$  es su transformada de Fourier se cumple que*

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} F(\omega) = 0.$$

*Demostración.* En la definición de transformada, hacemos el cambio de variable afín  $x = s - \pi/\omega$  (para un  $\omega \in \mathbb{R}$  fijo), de manera que

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(s - \frac{\pi}{\omega}\right) e^{-i\omega\left(s - \frac{\pi}{\omega}\right)} ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(s - \frac{\pi}{\omega}\right) e^{-i\omega s} e^{i\pi} ds \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(s - \frac{\pi}{\omega}\right) e^{-i\omega s} ds. \end{aligned}$$

Sumando esta expresión para  $F(\omega)$  con la original  $F(\omega) = \int f(s) \exp(-i\omega s) ds$ , resulta

$$2F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(s) - f\left(s - \frac{\pi}{\omega}\right)\right) e^{-i\omega s} ds,$$

de donde, acotando en valor absoluto:

$$|F(\omega)| = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(s) - f\left(s - \frac{\pi}{\omega}\right)\right) e^{-i\omega s} ds \right| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(s) - f\left(s - \frac{\pi}{\omega}\right)\right| ds.$$

Las funciones que hay dentro de la integral son continuas salvo en un conjunto de medida nula. En cada intervalo  $[-\delta, \delta]$  definen una integral uniformemente convergente, de manera que se puede intercambiar  $\lim_{|\omega| \rightarrow +\infty}$  con  $\int_{-\infty}^{+\infty}$  y:

$$\lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} |F(\omega)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(s) - f\left(s - \lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{\omega}\right) \right| ds = 0.$$

□

**Nota 8.11.** En esta misma línea de resultados, también es posible probar que la transformada  $\widehat{f}(\omega)$  es una función *acotada* de  $\omega$ , sin más que pedir que  $f$  sea integrable. En efecto:

$$|\widehat{f}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt.$$

## 8.2. Propiedades de la transformada de Fourier

Veamos algunas propiedades de la transformada de Fourier que permiten su cálculo eficiente. La primera de ellas es fundamental para las aplicaciones a las ecuaciones en derivadas parciales.

**Proposición 8.12.** Sea  $f \in C^k(\mathbb{R})$ . Si  $f, f', \dots, f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces para cada  $n = 1, \dots, k$  se tiene que

$$\widehat{f^{(n)}}(w) = (iw)^n \widehat{f}(w).$$

*Demostración.* Haremos la prueba para  $n = 1$ . El caso general se sigue por inducción. Por la definición de transformada

$$\widehat{f'}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f'(t) dt = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L e^{-i\omega t} f'(t) dt.$$

Integrando por partes,

$$\int_{-L}^L e^{-i\omega t} f'(t) dt = \left| e^{-i\omega t} f(t) \right|_{t=-L}^{t=L} + i\omega \int_{-L}^L e^{-i\omega t} f(t) dt,$$

de donde, tomando límites y teniendo en cuenta que si una función  $f \in C^1(\mathbb{R})$  es absolutamente integrable, entonces  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$  (además de que  $e^{-i\omega t}$  es acotada), resulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f'(t) dt = i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

□

Otras propiedades son también importantes en Física o Ingeniería, como la llamada propiedad de traslación.

**Proposición 8.13.** Sea  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Entonces, se cumple que

$$\widehat{f(t)e^{iw_0 t}} = \widehat{f}(w - w_0).$$

*Demostración.* Es inmediata a partir de la definición:

$$\widehat{f(t)e^{iw_0 t}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iw_0 t} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(\omega - w_0)t} dt = \widehat{f}(w - w_0).$$

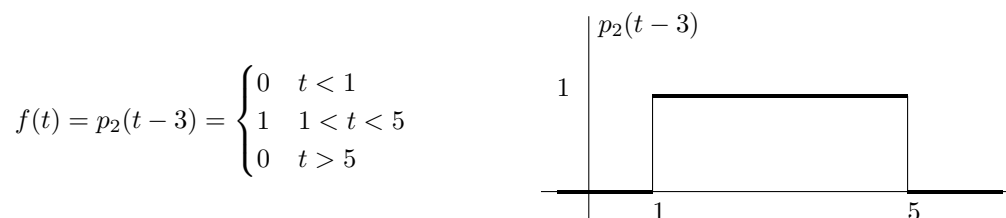
□

La tabla 8.1 contiene una lista de las propiedades más relevantes de la transformada de Fourier. En los ejercicios se ven aplicaciones de ellas.

Propiedad	$\widehat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w)e^{iwt}dw$
Linealidad	$af(t) + bg(t)$	$a\widehat{f}(w) + b\widehat{g}(w)$
Derivación en tiempo	$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n \widehat{f}(w)$
Derivación en frecuencia	$(-it)^n f(t)$	$\frac{d^n}{dw^n} \widehat{f}(w)$
Traslación en tiempo	$f(t - t_0)$	$e^{-iwt_0} \widehat{f}(w)$
Traslación en frecuencia	$f(t) e^{i\omega_0 t}$	$\widehat{f}(w - w_0)$
Modulación	$f(t) \cos \omega_0 t$	$\frac{1}{2} (\widehat{f}(w - w_0) + \widehat{f}(w + w_0))$
Cambio de escala	$f(at)$	$\frac{1}{ a } \widehat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$
Simetría	$f(-t)$	$\widehat{f}(-w)$
Conjugación compleja	$\overline{f(t)}$	$\overline{\widehat{f}(-w)}$
Dualidad	$\widehat{\widehat{f}}(t)$	$2\pi f(-w)$

Tabla 8.1. Propiedades de las transformadas de Fourier

**Ejemplo 8.14.** Consideremos el impulso rectangular



Aplicando la propiedad de traslación al par transformada-antitransformada  $p_2(t) \longleftrightarrow \frac{2}{\omega} \sin 2\omega$  resulta:

$$\widehat{p_2(t-3)} = e^{-i3w} \widehat{p_2(t)} = e^{-i3w} \frac{2}{w} \sin 2w = \frac{1}{iw} e^{-i3w} (e^{i2w} - e^{-i2w}) = \frac{1}{iw} (e^{-iw} - e^{-i5w}).$$

y también

$$\widehat{p_2(t+2)} = e^{i2w} \widehat{p_2(t)} = e^{i2w} \frac{2}{w} \sin 2w.$$

△

**Ejemplo 8.15.** La transformada de Fourier de la función  $f(t) = \frac{1}{t} \sin t$  se puede calcular aplicando la propiedad de dualidad al par  $p_1(t) \longleftrightarrow \frac{2}{w} \sin w$ , pues ella nos asegura que  $\frac{2}{t} \sin t \longleftrightarrow 2\pi p_1(-w)$  y como  $p_T$  es par,

$$\widehat{\frac{1}{t} \sin t} = \pi p_1(w).$$

△

**Nota 8.16.** En la teoría de la transformación de Fourier también aparece una versión de la fórmula de Parseval, relacionando las energías de una señal y de su transformada. En este contexto, adopta la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(w)|^2 dw.$$

También como ocurría con las series, esta relación puede usarse para calcular integrales (véanse los ejercicios).

### 8.3. El producto de convolución

Como mencionamos en la introducción al capítulo, la transformada de Fourier revela toda su utilidad en conjunción con otra operación, el producto de convolución entre funciones.

**Definición 8.17.** Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Su *producto de convolución* es la función dada por

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s) ds. \quad (8.5)$$

El dominio de  $f * g$ , obviamente, es el conjunto de valores  $s \in \mathbb{R}$  para los cuales existe la integral. Un criterio sencillo pero práctico que garantiza esa existencia es que una cualquiera de las funciones  $f$  ó  $g$  sea acotada. En efecto, si por ejemplo es  $f$  tal que existe una  $C > 0$  con  $|f(s)| < C$  para todo  $s$ , entonces,

$$|(f * g)(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)||g(t-s)| ds \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-s)| ds = C \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)| ds < \infty.$$

Por linealidad de la integral, el producto de convolución es distributivo, es decir, para todas  $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$  tales que las convoluciones existen, y para todas constantes  $\alpha, \beta$ :

$$f * (\alpha g + \beta h) = \alpha f * g + \beta f * h.$$

La siguiente propiedad es también importante.

**Proposición 8.18.** *El producto de convolución, cuando está definido, es conmutativo.*

*Demostración.* No hay más que hacer un simple cambio de variable  $y = x - t$  en la definición:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y) dy = (g * f)(x).$$

□

**Ejemplo 8.19.** Recordando que la función escalón unidad está dada por

$$u(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } z > 0 \\ 0, & \text{si } z < 0, \end{cases}$$

vamos a calcular el producto de convolución de las funciones

$$f(t) = e^{-at}u(t) = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

y

$$g(t) = e^{-bt}u(t) = \begin{cases} e^{-bt} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

para  $a, b > 0$ . Notemos que

$$g(t-s) = e^{-b(t-s)}u(t-s) = \begin{cases} e^{b(s-t)} & s < t \\ 0 & s > t \end{cases}.$$

Como consecuencia,  $(f * g)(t) = 0$  para  $t < 0$ , pues cualquiera que sea  $s$  o bien  $f(s) = 0$  o bien  $g(t-s) = 0$ . Análogamente, para  $t > 0$  el producto  $f(s)g(t-s)$  sólo es distinto de cero para los valores  $0 < s < t$ , con lo cual ya podemos calcular:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s) ds = \int_0^t e^{-as}e^{b(s-t)} ds = e^{-bt} \int_0^t e^{-as}e^{bs} ds = e^{-bt} \frac{e^{(b-a)s}}{b-a} \Big|_0^t = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$$

si  $a \neq b$ . Por lo tanto

$$(f * g)(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}u(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

△

Enunciamos ahora el resultado central de la teoría. No daremos la demostración, que está más allá del objetivo de estas notas introductorias.

**Teorema 8.20** (de convolución). *Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  continuas y acotadas. Entonces,  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$  y, además,*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} * \widehat{g}.$$

En el capítulo siguiente veremos cómo utilizar este resultado para resolver ecuaciones en derivadas parciales. Por ahora, nos contentaremos con observar que puede utilizarse para calcular transformadas inversas.

**Ejemplo 8.21.** Vamos a determinar la transformada inversa de

$$F(w) = \frac{1}{(1 + iw^2)^2}.$$

En el ejemplo 8.5 vimos que si  $f(t) = e^{-|t|}$ , su transformada es

$$\widehat{f}(w) = \frac{2}{1 + w^2}.$$

Así que la función dada se expresa, aplicando el teorema de convolución, como

$$F(w) = \widehat{f}(w) \cdot \widehat{f}(w) = \widehat{f * f}(w).$$

Directamente de la definición,

$$\widehat{f * f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-|x-t|} dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x e^t e^{t-x} dt + \int_x^0 e^t e^{x-t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{x-t} dt, & \text{si } x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^0 e^{-t} e^{x-t} dt + \int_0^x e^{-t} e^{t-x} dt + \int_x^{\infty} e^{-t} e^{t-x} dt, & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

o sea:

$$\widehat{f * f}(x) = \begin{cases} (1-x)e^x, & \text{si } x \leq 0 \\ (1+x)e^{-x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En definitiva:

$$\mathcal{F}^{-1}(F)(x) = (1 + |x|)e^{-|x|}.$$

## 8.4. Ejercicios

1. Calcular la transformada de Fourier de las funciones siguientes:

a)

$$f(t) = e^{-|t|}$$

b)

$$f(t) = \begin{cases} ie^{iat} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (a \in \mathbb{C}, \text{Im}(a) > 0)$$

2. Calcular la antitransformada de Fourier de la función  $F(\omega)$  dada por

$$F(\omega) = \begin{cases} e^{j\omega} & \text{si } |\omega| \leq 2\pi \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

3. Sabiendo que  $\frac{1}{a^2 + t^2} \leftrightarrow -\frac{\pi}{a}e^{a|\omega|}$ , con  $\text{Re}(a) < 0$  forman un par transformada-antitransformada, calcular la antitransformada de la función  $2e^{-|\omega|} + 3e^{-2|\omega|}$ .

4. Sabiendo que  $\frac{t}{(a^2 + t^2)^2} \leftrightarrow \frac{i\omega\pi}{2a}e^{a|\omega|}$ , con  $\text{Re}(a) < 0$ , calcular la antitransformada de la función  $\frac{\omega}{(1 + \omega^2)^2}$ .

5. Probar que si  $f(t)$  es solución de la ecuación diferencial  $x''(t) - t^2x(t) = \lambda x(t)$ , entonces su transformada de Fourier  $\hat{f}(w)$  también es solución.

6. Calcular la transformada de Fourier de  $f(t) = e^{a|t|}$ ,  $\text{Re}(a) < 0$ .

Deducir

a) la antitransformada de Fourier de  $e^{a|\omega|}$ ,  $\text{Re}(a) < 0$ ,

b) la transformada de Fourier de  $\frac{1}{a^2 + t^2}$ ,  $\text{Re}(a) < 0$ ,

c) la transformada de Fourier de  $\frac{t}{(a^2 + t^2)^2}$ ,  $\text{Re}(a) < 0$ ,

d) la antitransformada de Fourier de  $\frac{\omega}{(a^2 + \omega^2)^2}$ ,  $\text{Re}(a) < 0$ .

7. Sea  $f(t) = t$  si  $0 < t < 1$  y  $f(t) = 0$  en otro caso.

a) Calcular la transformada de Fourier  $\hat{f}(w)$ .

b) Sea  $q_1(t)$  la función triangular:  $q_1(t) = t + 1$  si  $-1 < t < 0$ ,  $q_1(t) = 1 - t$  si  $0 < t < 1$  y  $q_1(t) = 0$  en otro caso. Utilizando que  $q_1(t) = f(t+1) + f(1-t)$  deducir su transformada de Fourier  $\hat{q}_1(w)$ .

c) Dar una función tal que su transformada de Fourier sea  $iw\hat{q}_1(w)$ .

8. Calcular el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin bt \cos tx}{t} dt.$$

Deducir

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}.$$

9. Probar:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 at}{t^2} dt = a\pi$$

10. Calcular la transformada de Fourier de la función:

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$

Aplicar el resultado anterior al cálculo de la integral siguiente:

$$\int_0^{+\infty} \left[ \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \right] \cos \frac{x}{2} dx.$$

11. Calcular la transformada de Fourier de

$$f(t) = \cos \frac{7t}{2} \cos \frac{3t}{2}$$

12. Hallar la antittransformada de Fourier de la función escalón unidad  $u(w)$ .

13. Encontrar las funciones que satisfacen la ecuación integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)f(t) dt = e^{-x^2}.$$

14. Calcular la transformada de Fourier de la solución al problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in \mathbb{R}, 0 < y < 1, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(x, 1) = f(x). \end{cases}$$





# 9

## Ecuaciones en derivadas parciales sobre dominios no acotados

En este capítulo aplicamos las técnicas adquiridas en el estudio de la transformada de Fourier a la solución de ecuaciones en derivadas parciales definidas en dominios no acotados. Como ya se ha señalado repetidamente, en este caso no es posible fijar unas condiciones de contorno que determinen una colección numerable de autovalores y aparecen soluciones en forma de integral. La transformada de Fourier permite reducir el cálculo de la solución al de una ecuación algebraica para la transformada (por la propiedad de derivación en tiempo y espacio. La transformada inversa, junto con el producto de convolución, nos permitirá recuperar la solución al problema original.

Discutiremos problemas homogéneos y problemas con fuentes, en este último caso usando principalmente el principio de Duhamel, siguiendo a [3, 7]. Además de éstas, otras referencias imprescindibles son [8, 10, 11].

### 9.1. Transformadas parciales

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio conexo y  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Denotaremos por  $\text{pr}_1$  y  $\text{pr}_2$  las proyecciones canónicas sobre el eje OX y el eje OY respectivamente. Para el propósito de estas notas, diremos que la función  $u$  es *regular* si

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} u(x,y) = 0 \tag{9.1}$$

y, además, para cada  $x \in \text{pr}_1(\Omega)$  y para cada  $y \in \text{pr}_2(\Omega)$  existen las transformadas de Fourier de las funciones (de una variable)  $u(x, \cdot)$ ,  $u(\cdot, y)$  y las de todas sus derivadas (aunque no es imprescindible, supondremos aquí que *tanto  $u$  como sus derivadas parciales a distintos órdenes son funciones continuas a pedazos*).

Se tiene una serie de importantes resultados sobre la acción de la transformada de Fourier aplicada a una función regular  $u(x, y)$  y sus derivadas.

(a)  $\mathcal{F}_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) (\omega, y) = i\omega \mathcal{F}_x(u)(\omega, y)$

Sea  $y_0 \in \text{pr}_2(\Omega)$ . Por ser  $u$  regular, podemos tomar la transformada de Fourier de  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0)$  respecto de

$x$ , la cual denotaremos por  $\mathcal{F}_x$ . Se tiene, integrando por partes y aplicando (9.1):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\omega, y_0)\right)(\omega, y_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0)e^{-i\omega x} dx \\ &= e^{-i\omega x}u(x, y_0)\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y_0)e^{-i\omega x} dx \\ &= i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y_0)e^{-i\omega x} dx \\ &= i\omega \mathcal{F}_x(u(x, y_0))(\omega, y).\end{aligned}$$

Esto es para cada  $y_0 \in \text{pr}_2(\Omega)$  fijo. Variando  $y_0$  en  $\text{pr}_2(\Omega)$ , obtenemos

$$\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(\omega, y) = i\omega \mathcal{F}_x(u)(\omega, y).$$

(b)  $\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\omega, y) = -\omega^2 \mathcal{F}_x(u)(\omega, y)$

Sea  $y_0 \in \text{pr}_2(\Omega)$ . Llamemos

$$v(x, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_0).$$

Tomando  $u = v$  en (a), resulta (para este  $y_0 \in \text{pr}_2(\Omega)$  fijo):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\omega, y_0)\right)(\omega, y_0) &= i\omega \mathcal{F}_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\omega, y_0)\right)(\omega, y_0) \\ &= (i\omega)^2 \mathcal{F}_x(u(x, y_0))(\omega, y_0) \\ &= -\omega^2 \mathcal{F}_x(u(x, y_0))(\omega, y_0).\end{aligned}$$

De nuevo variando  $y_0 \in \text{pr}_2(\Omega)$ , es:

$$\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\omega, y) = -\omega^2 \mathcal{F}_x(u)(\omega, y).$$

**Nota 9.1.** Es inmediato generalizar este resultado (por inducción) y probar que, si  $u$  es regular:

$$\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)(\omega, y) = (i\omega)^n \mathcal{F}_x(u)(\omega, y).$$

(c)  $\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(\omega, y) = \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{F}_x(u)(\omega, y)$

Consideremos ahora un  $x_0 \in \text{pr}_1(\Omega)$  fijo y formemos la función en  $\text{pr}_2(\Omega)$  dada por  $u(x_0, y)$ . Por hipótesis,  $u(x_0, y)$  admite transformada de Fourier, al igual que su derivada  $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y)$ . Su transformada respecto a  $x$  es

$$\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y)\right)(\omega, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y)e^{-i\omega x} dx.$$

Como  $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y)e^{-i\omega x}$  es una función continua respecto de  $y$ , se puede aplicar el teorema de Leibniz e intercambiar la derivada con la integral:

$$\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y)\right)(\omega, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_0, y)e^{-i\omega x} dx.$$

Esto es cierto para todo  $x_0 \in \text{pr}_1(\Omega)$ . Variando este punto:

$$\mathcal{F}_x\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(\omega, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y)e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{F}_x(u)(\omega, y).$$

## 9.2. El problema de Cauchy para la ecuación del calor

Los resultados precedentes nos permitirán aplicar la teoría de la transformación de Fourier al estudio de algunos problemas de ecuaciones en derivadas parciales formulados sobre dominios no acotados, para los cuales no es factible aplicar el método de separación de variables como vimos en apartados anteriores (pues ahora no se pueden fijar las condiciones en los extremos del dominio).

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tomando transformadas de Fourier respecto de  $x$  resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_x(u)(\omega, t) = -\kappa \omega^2 \mathcal{F}_x(u)(\omega, t).$$

Si consideramos  $\omega$  como un parámetro, esto es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en  $t$ , con solución inmediata:

$$\mathcal{F}_x(u)(\omega, t) = C e^{-\kappa \omega^2 t}. \quad (9.2)$$

Para determinar la constante  $C$  utilizamos la condición inicial en  $t = 0$ :

$$\mathcal{F}_x(u(x, 0))(\omega, 0) = \mathcal{F}_x(f(x))(\omega, 0) = C \cdot 1 = C,$$

esto es:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = C.$$

Sustituyendo en (9.2):

$$\mathcal{F}_x(u)(\omega, t) = \mathcal{F}_x(f)(\omega) e^{-\kappa \omega^2 t}.$$

Ahora, como la transformada de una gaussiana es una gaussiana (recuérdese el Ejemplo 8.9), podemos poner

$$e^{-\kappa \omega^2 t} = \mathcal{F}_x \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \right) (\omega),$$

con lo cual

$$\mathcal{F}_x(u)(\omega, t) = \mathcal{F}_x(f)(\omega) \mathcal{F}_x \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \right) (\omega).$$

Por el teorema de convolución:

$$u(x, t) = f(x) * \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \right). \quad (9.3)$$

La correspondiente integral se puede expresar más fácilmente con el cambio de variable

$$\frac{(x-s)^2}{4\kappa t} = z^2;$$

en efecto, lo que queda es:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\kappa t}} ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - 2z\sqrt{\kappa t}) e^{-z^2} dz. \end{aligned}$$

**Nota 9.2.** Lo importante de este proceso se encuentra codificado en la fórmula (9.3): *la solución al problema de Cauchy para la ecuación del calor se obtiene tomando la convolución de la condición inicial con la función gaussiana*

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp \left( -\frac{x^2}{4\kappa t} \right).$$

Esta función, por motivos obvios, se denomina el *núcleo de la ecuación del calor*.

### 9.3. Características. Dominios de dependencia

En esta sección profundizaremos en las propiedades de las curvas características asociadas a la ecuación de ondas, que recordemos están dadas por

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= x + ct \\ \eta(x, t) &= x - ct.\end{aligned}$$

**Nota 9.3.** Las ideas que expondremos acerca de las discontinuidades tendrán solamente un carácter heurístico, dado que usaremos la solución de D'Alembert que se dedujo bajo unas condiciones de regularidad de las funciones involucradas bastante restrictivas. Aunque estas propiedades pueden justificarse rigurosamente en el contexto de la teoría de distribuciones, no lo haremos aquí porque supondría desviarnos demasiado del objetivo del curso. Sin embargo, las ideas involucradas acerca de las discontinuidades son lo suficientemente importantes como para que hagamos al menos una breve mención de ellas.

Consideremos el problema más simple, con una cuerda infinita que únicamente En primer lugar, observemos que las características son las líneas a través de las cuáles se propagan las discontinuidades de la configuración inicial. Si se tiene que  $u(x, 0) = f(x)$  presenta discontinuidades en los puntos  $\{a_1, \dots, a_k\}$ , entonces sabemos por la solución de D'Alembert<sup>1</sup> que la solución

### 9.4. El problema de Laplace en un semiplano

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ |u(x, y)| < M, & \forall y > 0. \end{cases} \quad (9.4)$$

Tomando transformadas de Fourier respecto a  $x$ , resulta:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathcal{F}_x(u)(\omega, y) - \omega^2 \mathcal{F}_x(u)(\omega, y) = 0, \quad (9.5)$$

que, considerando a  $\omega$  como parámetro, puede verse como una ecuación diferencial ordinaria para  $\mathcal{F}_x(u)(\omega, y)$ . Su solución general tiene la forma

$$\mathcal{F}_x(u)(\omega, y) = A(\omega)e^{-\omega y} + B(\omega)e^{\omega y}. \quad (9.6)$$

En este punto utilizaremos la condición de acotación sobre  $u(x, y)$ . Tomando<sup>2</sup>  $\lim_{y \rightarrow +\infty}$  en (9.6), resulta que debe ser (pues en la variable  $y$  el comportamiento de  $\mathcal{F}_x(u)(\omega, y)$  es el de  $u(x, y)$ , con  $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0$ )  $B(\omega) = 0$  si  $\omega > 0$  y  $A(\omega) = 0$  si  $\omega < 0$ . Podemos tomar entonces una solución a (9.5) en la forma

$$\mathcal{F}_x(u)(\omega, y) = C(\omega)e^{-|\omega|y}. \quad (9.7)$$

Por otra parte, tenemos la condición de frontera  $u(x, 0) = f(x)$ . Tomando transformadas en ella,  $\mathcal{F}_x(u(x, 0))(\omega) = \mathcal{F}_x(f(x))(\omega)$  y sustituyendo en (9.7):

$$\mathcal{F}_x(u(x, 0))(\omega) = \mathcal{F}_x(f(x))(\omega) = C(\omega),$$

<sup>1</sup>Asumiendo, como se ha mencionado, que la forma de la solución sigue siendo válida aún sin suponer regularidad.

<sup>2</sup>Como  $y > 0$ , sólo este límite tiene sentido:  $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} = \lim_{y \rightarrow +\infty}$ .

así que podemos reescribir (9.7) como

$$\mathcal{F}_x(u)(\omega, y) = \mathcal{F}_x(f(x))(\omega)e^{-|\omega|y}. \quad (9.8)$$

Pero ya vimos en un ejemplo anterior que

$$e^{-|\omega|y} = \mathcal{F}_x\left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)(\omega),$$

luego (9.8) es

$$\mathcal{F}_x(u)(\omega, y) = \mathcal{F}_x(f(x))(\omega)\mathcal{F}_x\left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)(\omega).$$

Aplicando el teorema de convolución, la solución buscada es

$$u(x, y) = f(x) * \frac{2y}{x^2 + y^2} = 2y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)}{(x-s)^2 + y^2} ds.$$

## 9.5. El problema de Cauchy con fuentes: Principio de Duhamel

Para tratar el caso en que existen fuentes, una técnica muy útil es el llamado *Principio de Duhamel*, que es una generalización directa de una interesante propiedad de las soluciones a un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Consideremos el problema de Cauchy

$$(P_1) \quad \begin{cases} y'(x) + ay(x) = q(x), & x \in ]0, \infty[ \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

con  $a \in \mathbb{R}$ . Ésta es una ecuación de primer orden lineal muy sencilla, con solución

$$y(x) = e^{-u(x)} \left( \int_0^x q(s)e^{u(s)} ds \right),$$

donde el factor integrante está dado en este caso por

$$u(x) = \int a dx = ax.$$

Así pues, la solución es

$$y(x) = \int_0^x e^{-a(x-s)} q(s) ds. \quad (9.9)$$

Ahora, pensemos en un problema aparentemente no relacionado con  $(P_1)$ , el de resolver

$$(P_2) \quad \begin{cases} z'(x; s) + az(x; s) = 0, & x \in ]0, \infty[ \\ z(0; s) = q(s). \end{cases}$$

En este problema, la prima sigue denotando derivación con respecto a  $x$ , y se toma  $s$  como un parámetro. La diferencia con el problema original  $(P_1)$  es que ahora *la fuente  $q$  aparece en las condiciones iniciales*. Este nuevo problema  $(P_2)$  tiene una solución inmediata,

$$z(x; s) = q(s)e^{-ax}. \quad (9.10)$$

Comparando (9.9) con (9.10) vemos que se cumple el llamado Principio de Duhamel: *la solución al problema con fuentes  $(P_1)$  es la integral sobre el parámetro  $s$  de la solución al problema homogéneo  $(P_2)$  trasladada por  $-s$ ,*

$$y(x) = \int_0^x z(x-s, s) ds.$$

El principio de Duhamel se extiende al caso de problemas en derivadas parciales. Lo ilustraremos con un ejemplo.

**Ejemplo 9.4.** Consideremos el problema de Cauchy para la ecuación del calor con fuentes

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \kappa u_{xx}(x, t) + q(x, t), & x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Aplicando el principio, la solución propuesta será

$$u(x, t) = \int_0^t z(x, t-s, s) ds,$$

con  $z(x, t; s)$  la solución del problema homogéneo que tiene las fuentes en las condiciones iniciales

$$\begin{cases} z_t(x, t) = \kappa z_{xx}(x, t), & x \in \mathbb{R}, \\ z(x, 0; s) = q(x, s). \end{cases}$$

Este último problema ya lo sabemos resolver (lo vimos en la sección 9.2): su solución viene dada en términos del núcleo del calor (véase la nota 9.2):

$$z(x, t; s) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t-s)q(y, s) dy.$$

La solución al problema original que proporciona el principio de Duhamel es, pues:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t-s)q(y, s) dy ds.$$

△

## 9.6. Ejercicios

1. Estudiar el problema de Cauchy para la ecuación de ondas, tanto en ausencia de fuentes como en presencia de ellas.
2. Enunciar el principio de causalidad para la ecuación de Klein-Gordon. Deducir que la velocidad de propagación está acotada por  $c$ .
3. Hallar la solución al problema de valores iniciales para la *ecuación de convección*

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

4. Resolver, mediante el principio de Duhamel, el problema

$$\begin{cases} u_t = \kappa u_{xx} + q(x, t), & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

# Lecturas recomendadas

- [1] J. L. Andrés-Yebra: *Análisis de Fourier*. Notas de la Universitat Politècnica de Catalunya.
- [2] T. Apostol: *Análisis Matemático* (2a. Ed.). Reverté (1996).
- [3] J. C. Bellido, A. Donoso, S. Lajara: *Notas para un curso de ecuaciones en derivadas parciales*.
- [4] J. de Burgos: *Cálculo infinitesimal*. Alhambra Universidad (1990).
- [5] A. Cañada Aguilar: *Series de Fourier y aplicaciones*. Pirámide (2002).
- [6] H. P. Hsu: *Análisis de Fourier*. Addison-Wesley (1987).
- [7] J. D. Logan: *Applied Partial Differential Equations*. Springer Verlag (2004).
- [8] T. Myint-U: *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, 2nd Ed. North-Holland (1980).
- [9] F. Periago: *Teoría de campos y ecuaciones en derivadas parciales*. H. Escarabajal Editores (2003).
- [10] A. Tijonov, A. Samarsky: *Ecuaciones de la Física Matemática*. Editorial Mir (1972).
- [11] E. C. Zachmanoglou, D. W. Thoe: *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*. Dover (1986).