



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ



**FACULTAD DE CIENCIAS**

**“EL OBJETO DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO  
COMO APOYO PARA LA ENSEÑANZA  
PRESENCIAL DE MATEMÁTICAS EN  
SECUNDARIA”**

**TESIS**

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**LICENCIADA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA**

PRESENTA:

**ELENA DE LOS ÁNGELES LEDEZMA RODRÍGUEZ**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. NEHEMÍAS MORENO MARTÍNEZ**

**SAN LUIS POTOSÍ**

**SEPTIEMBRE 2020**



FORMATO DE AUTORIZACIÓN PARA LA IMPRESIÓN FINAL DE LA TESIS

SECRETARIA GENERAL

FACULTAD DE CIENCIAS

Nombre: Elena de los Angeles Ledezma Rodriguez

Clave: 0228287

Fecha: 17 - Marzo - 2020

Carrera: Lic. en Matematica Educativa

Especialidad: \_\_\_\_\_

Generación: 2013

Título de la Tesis:

El objeto de Aprendizaje matemático como  
apoyo para la enseñanza presencial de  
matemáticas en secundaria

Asesor: Dr. Nehemias Moreno Martinez

Adscripción del Asesor: \_\_\_\_\_

SINODALES ASIGNADOS

Presidente: Dr. Alberto Melgardo Ramos

Secretario: Dr. Noe Samuel Sánchez Martínez

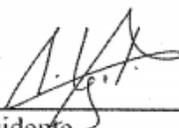
Formato de Autorización para la Impresión Final de la Tesis, Facultad de Ciencias,  
UASLP

Vocal: M. en Ing. Edgar Alfonso Pérez García

Suplente: Dr. Nehemias Moreno Martínez

Por medio de la presente atestiguamos que después de leer el documento de tesis puesto a nuestra consideración, no tenemos recomendaciones o sugerencias a su contenido y damos nuestra aprobación para que se impriman las versiones finales del mismo.

Firmas:

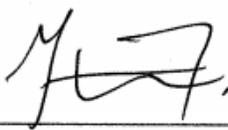
  
\_\_\_\_\_  
Sinodal Presidente

  
\_\_\_\_\_  
Sinodal Secretario

  
\_\_\_\_\_  
Sinodal Vocal

  
\_\_\_\_\_  
Sinodal Suplente

Vo.Bo.

  
\_\_\_\_\_  
Secretario General



SECRETARIA  
GENERAL

# ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS

RESUMEN

INTRODUCCIÓN

<b>CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES.....</b>	<b>6</b>
<b>Introducción.....</b>	<b>7</b>
<b>1.1 Las TIC y la enseñanza de las matemáticas .....</b>	<b>7</b>
<b>1.2 Tratamiento de la proporcionalidad en libros de tercero de secundaria.....</b>	<b>11</b>
<b>1.3 Investigaciones sobre la comprensión de la proporcionalidad en el nivel básico.....</b>	<b>15</b>
<b>1.4. La importancia de un nuevo modelo tecnológico abierto como apoyo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.....</b>	<b>20</b>
<b>CAPÍTULO 2. MARCO REFERENCIAL.....</b>	<b>22</b>
<b>Introducción.....</b>	<b>23</b>
<b>2.1 Teoría del Construccionismo.....</b>	<b>23</b>
<b>2.2 Teoría de la Carga Cognitiva.....</b>	<b>24</b>
<b>2.3 Recurso Educativo Abierto.....</b>	<b>29</b>
<b>2.3.1 Definición.....</b>	<b>29</b>
<b>2.3.2 Características.....</b>	<b>30</b>
<b>2.3.3 Repositorios.....</b>	<b>31</b>
<b>2.4 Objeto de aprendizaje.....</b>	<b>31</b>
<b>2.4.1 Definición.....</b>	<b>31</b>
<b>2.4.2 Características.....</b>	<b>33</b>
<b>2.4.3 Consideraciones para su construcción.....</b>	<b>34</b>
<b>2.5 Las teorías computacionales y las tecnologías en el aprendizaje de las matemáticas.....</b>	<b>35</b>
<b>CAPÍTULO 3. DESARROLLO DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS DE APRENDIZAJE.....</b>	<b>37</b>

<b>Introducción.....</b>	<b>38</b>
<b>3.1 Teoría de representaciones semióticas.....</b>	<b>38</b>
<b>3.2 Modelo para la generación de un Objeto de Aprendizaje Matemático.....</b>	<b>42</b>
<b>3.3 Propuesta de modelo para Objetos de Aprendizaje Matemáticos.....</b>	<b>43</b>
<b>3.3.1 Diseño.....</b>	<b>43</b>
<b>3.3.2 Elementos.....</b>	<b>45</b>
<b>CAPÍTULO 4. PROBLEMA, HIPÓTESIS Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN.....</b>	<b>47</b>
<b>Introducción.....</b>	<b>48</b>
<b>4.1 Problema de investigación.....</b>	<b>48</b>
<b>4.2 Hipótesis de investigación.....</b>	<b>48</b>
<b>4.3 Objetivos de la investigación.....</b>	<b>49</b>
<b>CAPÍTULO 5. METODOLOGÍA.....</b>	<b>51</b>
<b>Introducción.....</b>	<b>52</b>
<b>5.1 Participantes.....</b>	<b>52</b>
<b>5.2 Diseño de la investigación.....</b>	<b>53</b>
<b>5.2.1 Esquema de las etapas de aplicación del Objeto de Aprendizaje Matemático.....</b>	<b>53</b>
<b>CAPÍTULO 6. RESULTADOS.....</b>	<b>67</b>
<b>Introducción.....</b>	<b>68</b>
<b>6.1 Logros obtenidos en el Objeto de Aprendizaje de registro numérico en ambos grupos.....</b>	<b>68</b>
<b>6.2 Respuestas después de la aplicación del Objeto de Aprendizaje con representación de la proporcionalidad a través de gráficos .....</b>	<b>71</b>
<b>6.3 Efecto de la aplicación del Objeto de Aprendizaje de la conversión de registros .....</b>	<b>74</b>
<b>6.4 Evaluación final.....</b>	<b>78</b>

<b>CAPÍTULO 7. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN.....</b>	<b>82</b>
<b>Introducción.....</b>	<b>83</b>
<b>7.1 Interpretación de los resultados obtenidos en el Objeto de Aprendizaje que usa la representación numérica.....</b>	<b>84</b>
<b>7.2 Interpretación de los datos alcanzados de la aplicación del Objeto de Aprendizaje de registro de representación gráfica.....</b>	<b>85</b>
<b>7.3 La interpretación de resultados entre conversión de registros numérico y gráfico .....</b>	<b>86</b>
<b>7.4 Interpretación de evaluación final .....</b>	<b>88</b>
<b>CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES.....</b>	<b>90</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>96</b>

## **AGRADECIMIENTOS**

A mi Director de Tesis el Dr. Nehemías Moreno Martínez, por apoyarme en la realización de esta investigación, guiarme en todo momento y motivarme para terminar mi trabajo.

A mis profesores y sinodales el M. I. Edgar Alfonso Pérez García, Dr. Alberto Molgado Ramos y al Dr. Noé Sánchez Martínez.

Al personal y alumnos de la Escuela Secundaria Técnica No. 1, por permitir realizar mi investigación en la institución, a la subdirectora del plantel Fabiola Cristales y a la maestra a cargo de los grupos Adriana Sixtos, por apoyarme y creer en mi investigación.

A mis principales motores, Felipe, Amelia, Felipe de Jesús y Angélica María, por siempre motivarme a completar mis estudios de licenciatura, por todo el amor y apoyo que he recibido, por ser el mejor ejemplo de vida y por enseñarme a nunca darme por vencida.

Y por último, a mis amigos y profesores de la licenciatura que han sido parte de mi formación en todos los aspectos.

Gracias por todo.

## RESUMEN

Actualmente, en muchas escuelas hacer uso de la tecnología en el salón de clases implica sólo utilizar recursos como proyector y presentaciones en Power Point, o bien, si el profesor elabora y emplea en clase algún recurso tecnológico, (applets, simulaciones, software de graficación, entre otros) parte de sus creencias acerca del aprendizaje de las matemáticas mediante la tecnología. En general, no existe un modelo teórico que garantice el aprendizaje de las matemáticas con medios tecnológicos que considere los aspectos ontológicos y epistemológicos de las matemáticas que se enseñan en el aula, por ejemplo, el uso de los signos y la manera en la que éstos se dotan de significado. Lo que si hay son modelos teóricos de tipo cognitivo que se encuentran centrados en el sujeto, de manera concreta, en el procesamiento de la información que proveen los recursos tecnológicos. En el marco de estas teorías cognitivas, se habla actualmente de los Objetos de Aprendizaje (OA) cuyo sustento teórico plantea que para la enseñanza de cierto contenido escolar un OA tiene que ser organizado con los siguientes elementos: objetivo, actividades de aprendizaje y evaluación. Sin embargo, es posible diseñar el OA con la misma estructura para abordar contenidos de otras asignaturas, por ejemplo, es posible elaborar un OA para Historia del mismo modo que para Matemáticas, lo cual plantea un gran problema debido a que no se considera las características específicas de la actividad matemática como la cuestión de la significación matemática de los diversos símbolos, expresiones algebraicas, gráficos y otros registros de representación.

En relación con la noesis y semiosis que se establece en la actividad matemática, esta investigación plantea dos hipótesis, la primera de ellas habla sobre la posibilidad de organizar los OA considerando la Teoría de Representaciones Semióticas (TRS) de R. Duval, con objeto de tomar en cuenta los aspectos ontológicos y epistemológicos implicados en la comprensión del tema de “La Proporcionalidad” (contenido matemático que se estudia en tercero de secundaria). Para esto, se plantean las siguientes preguntas: ¿cómo se organizan los OA para lograr el aprendizaje del contenido de proporcionalidad? y ¿qué Recursos

Educativos Abiertos (REA) ayudan a la construcción de los Objetos de Aprendizaje Matemáticos (OAM)?. La segunda hipótesis nos habla sobre el efecto que puede causar en los alumnos la nueva organización de los OA ahora llamado OAM puesto que la organización de los recursos educativos que conforman los OA se apoyan en la Teoría de la Matemática Educativa y no únicamente en una teoría cognitiva general del aprendizaje. Las preguntas para esta segunda hipótesis son las siguientes: ¿cómo ayuda el OAM al aprendizaje del tema de proporcionalidad por parte del estudiante de secundaria? y ¿cuáles son las ventajas y desventajas de apoyar la enseñanza presencial del contenido de la proporcionalidad mediante OAM?

Con base en lo anterior, se planteó como objetivo general diseñar un modelo teórico que permitiese tomar en cuenta los OA y la TRS, para apoyar la comprensión de las matemáticas en el nivel secundaria. La TRS nos dice que una persona aprende matemáticas llevando a cabo tres procesos indispensables, el primero de ellos es la comprensión de un concepto matemático en un tipo de representación semiótica, por ejemplo representación numérica, el segundo proceso es la comprensión del mismo concepto pero esta vez en un segundo tipo de representación semiótica, por ejemplo representación algebraica, y por último, la correspondencia o conversión entre un registro y otro, es decir, el significado de elementos en ambos registros de representación. El uso de la TRS permitió organizar a los OA de una forma estructurada que condujo al diseño de un modelo en el que un OA es usado para el tratamiento en el registro numérico, un segundo OA para trabajar en el registro gráfico y un tercer y último Objeto para la conversión entre los registros, es decir, la significación del concepto matemático entre ambos registros de representación. La materialización de este modelo, llamado OAM, se implementó con estudiantes de secundaria que cursaban el tercer año para el apoyo de las clases presenciales en el tema de Proporcionalidad. Se utilizó la plataforma Schoology y diferentes REA como videos, imágenes, audios, foros, etc. En grandes rasgos, el resultado obtenido fue que los alumnos que recibieron apoyo del OAM mejoraron en aspectos de argumentación y en la comprensión de la proporcionalidad representada en diferentes contextos.

## INTRODUCCIÓN

Durante el curso Recursos Educativos Abiertos y diseños didácticos perteneciente al plan de estudios para la licenciatura en Matemática Educativa de la Facultad de Ciencias, UASLP, el profesor pidió realizar una serie de Objetos de Aprendizaje (OA) que se pudieran almacenar en la plataforma Schoology para el aprendizaje de un tema en matemáticas, la idea del profesor fue utilizar teorías de la Matemática Educativa para el diseño de los OA, sin embargo, después de diferentes investigaciones se encontró que existen algunos problemas en la enseñanza de las matemáticas con medios tecnológicos y que no se tiene un modelo de enseñanza base que junte la Matemática Educativa y la tecnología, es decir, no hay un método de diseño de actividades con el que se aprenda matemáticas con apoyo de medios tecnológicos.

Al término del curso se propuso el diseño de un modelo teórico, para la generación sistemática de Objetos de Aprendizaje (OA) apoyado en la Teoría de Representaciones Semióticas (TRS) (teoría de la Matemática Educativa). A dicho modelo se le asignó el nombre de Objeto de Aprendizaje Matemático (OAM), el cual fue diseñado con la intención de solucionar el problema educativo antes mencionado. En otras palabras, el OAM apoyaría en el aprendizaje de las matemáticas gracias a la organización de los recursos educativos abiertos con base en los lineamientos de una teoría de la Matemática Educativa.

El principal propósito de esta investigación es probar si el modelo propuesto para el OAM con la teoría de Representaciones Semióticas funciona y que ayuda a los alumnos a aprender las matemáticas, en particular, el tema de proporcionalidad.

Esta investigación se compone de 8 capítulos, el primero de ellos describe todos los antecedentes más importantes del uso de la tecnología dentro del salón de clase, además, se realizó una investigación a cerca de diferentes libros que se utilizan en el nivel secundaria en el estado de San Luis Potosí para la enseñanza de la proporcionalidad, esto con el fin de analizar el discurso matemático escolar que se emplea en una de las fuentes de información más importantes para el docente y para el alumno, el libro de texto. Para finalizar el primer capítulo, se analiza una

serie de artículos con los que investiga la forma en la que los alumnos aprenden el tema de proporcionalidad en nivel educativo mencionado anteriormente. En el segundo capítulo, se aborda el marco referencial utilizado, en el cual se describen elementos de algunas teorías relacionadas con el uso de la tecnología, qué es un recurso educativo abierto, la definición y elementos de los OA, usados en las teorías computacionales.

En el tercer capítulo, se presenta en primer lugar la teoría y algunos elementos que componen a la teoría de Matemática Educativa empleada en esta investigación, la TRS de R. Duval, además, se presenta la propuesta de modelo para el OAM, características y algunas consideraciones para su aplicación. En el cuarto capítulo se describe el problema, hipótesis, preguntas y los principales objetivos que surgieron de esta investigación.

En el capítulo cinco se muestra la metodología utilizada para la investigación, además, se describe a los participantes, el diseño de la investigación, que fue dividida en tres etapas, y al finalizar se presenta la descripción de las actividades y recursos que forman parte del OAM. En el sexto capítulo se presentan los resultados obtenidos al implementar OAM a alumnos de tercero de secundaria en una escuela del estado de San Luis Potosí. En la implementación se empleó la plataforma Schoology para el apoyo al curso presencial de matemáticas. En el capítulo siete se aborda el análisis y discusión de los resultados que fueron obtenidos por los alumnos al hacer uso del OAM apoyado en el tema de proporcionalidad.

Para finalizar, en el capítulo ocho se describen las conclusiones obtenidas de la aplicación del modelo del OAM a alumnos de secundaria, en donde se responde a las preguntas de investigación propuestas en el capítulo cuatro.

# CAPÍTULO 1

## ANTECEDENTES



# Capítulo 1

## Antecedentes

### Introducción

En este capítulo se describen algunos elementos que motivaron el desarrollo de la investigación. Se presenta una breve revisión bibliográfica sobre el origen, desarrollo y el uso en el salón de clase de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), los cuales dieron origen a múltiples investigaciones en educación y tecnología. Actualmente, todas las investigaciones y propuestas realizadas para el uso de tecnologías dentro del aula han considerado en mayor grado teorías de tipo cognitivo, las cuales dejan fuera del marco de la educación matemática aspectos tales como la epistemología y la ontología del saber matemático.

Además, en el capítulo se describe a grandes rasgos el tratamiento didáctico y matemático que realizan algunos autores en libros de texto acerca del tema de proporcionalidad que es visto en tercero de secundaria. Dicho contenido será desarrollado en el marco de la propuesta de tecnología educativa que se realiza en este trabajo, la cual se apoya en una teoría proveniente de la matemática educativa, la teoría de Registros Semióticos de Duval.

### 1.1 Las TIC y la enseñanza de las matemáticas

Desde el siglo pasado, la utilización de las TIC ha cambiado el modo de vida en la población, son consideradas uno de los principales agentes de cambio en la sociedad (Domingo & Marqués, 2011). Comúnmente, utilizar una TIC se refiere al uso de una computadora, de un software o de algún aparato electrónico, es así como con la llegada de la computadora a las aulas desde la primera década de los 80's, surgió la tarea de integrar la tecnología al sistema educativo, y con ello, el desarrollo de investigaciones para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje (Area, 2002).

Luján & Salas (2009) mencionan que la aplicación de las TIC en el aula, se originó en los años 70's en Estados Unidos de América con el fin de capacitar a sus militares, aunque se trataba de una idea futurista por tratar de ordenadores muy caros y de difícil acceso, este suceso marcó la brecha para la teoría conductista y para muchos investigadores, considerando nuevas teorías cognitivas y constructivistas.

Bajo estas condiciones, los investigadores en educación reconocieron que la teoría conductista limitaban el desarrollo del pensamiento de los estudiantes que se enfrentaban al cambio, gracias a este descubrimiento muchos investigadores se mostraron interesados en desarrollar teorías que resolvieran problemas educativos basados en teorías del aprendizaje de la psicología cognitiva, en la década de 1980 Papert, Novak, Ausubel, Minsky, Gowin, Hanesian y Resnick, entre muchos más investigadores, hicieron apertura de una nueva línea de investigación que se fundamentaba en teorías cognitivas y psicogenéticas relacionadas con las tecnologías de la información (Luján & Salas, 2009).

Por otro lado, considerar hacer uso de TIC en las aulas de México implicó un reto aún mayor, tener acceso a ellas. Diversas modalidades y programas educativos contribuyeron para introducir las TIC, por ejemplo, Telesecundaria (1968), Enciclomedia (SEP, 2006), Habilidades Digitales para Todos (SEP, 2009), Programa de Inclusión Digital (SEP, 2016), entre otros.

Sin embargo, el periódico en línea Expansión (Vargas, 2014) habla sobre la realidad de México y el uso de las TIC. Según el artículo solo el 10% de los profesores pertenecientes al nivel básico están capacitados para utilizar correctamente las TIC como apoyo educativo, menciona que la solución está en apoyar a los profesores con cursos en los que se trabaje para superar este problema; *“No es suficiente que el maestro tenga una computadora o una Tablet, si se quiere retener al mejor para enseñar tecnología hay que pensar en mejorar sus condiciones de enseñanza... Lo que necesitan las escuelas es crear espacios para que los maestros ensayen el conocimiento tecnológico sin miedo.”* (Vargas, 2014).

Pero, no sólo el desconocimiento por parte de los profesores afecta la inclusión de las TIC a las aulas ya que los recursos almacenados en sitios web, llamados repositorios, no son aptos para que una persona aprenda, porque el diseño está sobrecargado de información y no consideran elementos necesarios para que una persona adquiera conocimiento matemático, por ejemplo, los diferentes registros de representación de algún concepto matemático. Un ejemplo se encuentra en el repositorio ITSON (Ayala & García, 2010), con el que se pretende enseñar el concepto de media aritmética, se muestra un índice con los elementos que serán enseñados, se observa el objetivo del Objeto de Aprendizaje y posteriormente el contenido y al finalizar una evaluación, el contenido que muestra está fuera de contexto, las actividades y la evaluación son igual a los ejercicios que son explicados en el apartado del contenido lo cual conlleva a que el estudiante memorice el procedimiento sin comprender el problema que se está resolviendo.

Por otro lado, en el Modelo Educativo (SEP, 2017) en México se pretende que un estudiante egresado de la educación básica analice, compare y elija los recursos tecnológicos a su alcance y los aproveche con variedad de fines, de manera ética y responsable, y, además, que el alumno aprenda diversas formas para comunicarse y obtener información, seleccionarla, analizarla, evaluarla, discriminarla y organizarla. Por eso debe ser tomada en cuenta la creación y uso adecuado de diferentes recursos educativos de acceso abierto para contribuir en México a la mejora del aprendizaje de las matemáticas.

Al revisar diferentes artículos en los cuales se presenta la utilización de TIC para el aprendizaje de las matemáticas, en distintos grados educativos, se encontró que la gran mayoría sólo plantean la realización de prácticas apoyadas en software, por ejemplo Maple, MatLAB, entre otros simuladores diseñados por instituciones educativas, pero dichas prácticas no están sustentadas en ninguna teoría, ya sea psicológica o de matemática educativa, por ejemplo en los trabajos de Sánchez (2010) y Cruz & Puentes (2012), se realizan propuestas didácticas que suponen el desarrollo de competencias de los estudiantes, sin embargo, éstas no toman en cuenta alguna teoría educativa. Por otro lado, García, Barciela & Fernández (1998)

desarrollaron un software llamado Model-Lab que apoya cursos de ecología con el cuál se realizaron diferentes actividades que fueron aplicadas a estudiantes, dicho software y actividades no consideran alguna teoría educativa o tecnológica. Arratia, Martín & Pérez (2005) utilizaron una herramienta tecnológica, web 2.0, que consta de aplicaciones que permiten trabajar colaborativamente, se aplicó una estrategia de enseñanza para mejorar el aprendizaje de las Matemáticas que solo tiene sustento en una teoría para el aprendizaje colaborativo.

Al considerar que la implementación de videojuegos dentro del aula es una actividad más frecuente para muchos profesores, se hizo una revisión acerca de algunos videojuegos que son desarrollados para la enseñanza de matemáticas, por ejemplo, Rosas, Grau, Salinas, Correa, Nussbaum, López, Flores & Lagos (2011), mencionan que el diseño de un videojuego sólo debe considerar la contextualización del contenido educativo, es decir, diseñar un mundo virtual en el cual permita que el usuario se desenvuelva y cumplir el objetivo educativo, sin embargo, sólo se toman en cuenta el contenido temático del videojuego, sin hacer caso al proceso de construcción del aprendizaje de los usuarios.

El uso de videos educativos, también son considerados como herramientas tecnológicas que apoyan el proceso enseñanza-aprendizaje de contenidos matemáticos, fortalecen el análisis de resolución de problemas (Valls, Llinares, & Callejo, 2006). Algunos autores sólo consideran algunos elementos de la Teoría de la Carga Cognitiva (TCC), sin considerar la naturaleza de los contenidos que son presentados, por ejemplo, Angulo, Guijarro & de Llano (2010) y Valls, Llinares & Callejo (2006)

Con base en estas investigaciones y algunas otras, se observa que actualmente no se toman en cuenta a las teorías de Matemática Educativa para la construcción de Recursos Educativos Abiertos tecnológicos que logren apoyar el aprendizaje de las matemáticas, sustentar teóricamente los REA, tomar en cuenta la epistemología y ontología del saber matemático, así como la elaboración y la ejecución de algunas actividades necesarias y consideraciones que se deben tomar en cuenta para la

adaptación, según el contexto o situación estudiantil, de dichos recursos digitales dentro del aula.

En esta investigación de tesis se hace uso de la teoría de Representaciones Semióticas de Duval (TRS), perteneciente a las teorías de la Matemática Educativa, con la intención de interpretar al objeto tecnológico llamado Objeto de Aprendizaje (OA). Dicha interpretación da como resultado lo que llamaremos Objeto de Aprendizaje Matemático (OAM).

Los OAM serán aplicados a estudiantes que cursan el tercer año de secundaria y el contenido escolar que se usará en el diseño de los OAM es La Proporcionalidad. En la siguiente sección se hace revisión acerca el tratamiento en diferentes libros sobre dicho tema, con el objetivo de obtener información sobre cómo es abordado el tema desde diferentes posturas por los autores.

## 1.2 Tratamiento del tema de proporcionalidad en libros de tercero de secundaria

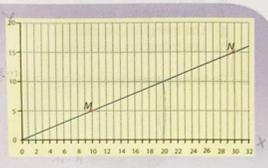
A continuación, se describen 3 propuestas de enseñanza sobre la proporcionalidad, dichas propuestas se obtuvieron de 3 libros de texto de matemáticas diferentes del nivel básico.

**Proporcionalidad y funciones**  
Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad

**Lección 5. Las gráficas I**

**Supera el reto**

En equipo, observen la gráfica y contesten en su cuaderno las preguntas que se plantean.



- ¿Cuál es la ordenada del punto M?
- Si Manuel se encuentra ubicado en el punto M y el valor de la abscisa es 10, ¿cuál es el valor de la ordenada?
- Si Nadia se encuentra en el punto N, ¿cuál es el valor de la abscisa? ¿cuál es el de la ordenada?
- Identifiquen el valor de la ordenada y abscisa del punto intermedio entre Manuel y Nadia.

Resuelvan en equipo las siguientes situaciones.

- Considerando que la gráfica anterior representa el desplazamiento de un ciclista a una velocidad constante, las abscisas (coordenadas x) representan el tiempo en minutos y las ordenadas (coordenadas y) la distancia recorrida en km.
  - ¿Cuál será la distancia recorrida por el ciclista cuando han transcurrido 10 minutos?
  - ¿Qué distancia habrá recorrido el ciclista al cabo de 20 minutos?
  - ¿A qué distancia del punto de origen se encuentra el ciclista después de 30 minutos?
  - ¿Cuántos kilómetros ha recorrido pasados 40 minutos?
  - ¿Cómo podrían obtener el tiempo que el ciclista tardará en recorrer 60 km? ¿Y al recorrer 100 km? ¿Cuántos km recorre en un minuto?
  - Completan la siguiente tabla con base en sus respuestas.

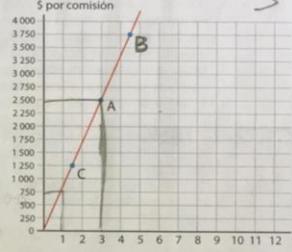
Tiempo (min)	1	10	20	30	40	50	60
Distancia (km)		5			20		

a)

**Idea matemática**

El tipo de relación entre dos magnitudes que se ha estudiado en esta lección recibe el nombre de variación directamente proporcional. Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar una, aumenta la otra en la misma medida o razón.

- En equipos, lean y resuelvan en su cuaderno las siguientes cuestiones.
  - El papá de Luis compra 5 boletos para entrar a una feria y le cobran \$10 ¿Cuántos boletos puede adquirir con \$20?
  - Luis tiene 5 años de edad y su hermano tiene 10, ¿qué edad tendrán en 5 años más?
  - Considerando la gráfica del inicio de la lección, ¿cuál de las situaciones anteriores puede asociarse con dicha gráfica? ¿Por qué?
  - ¿Cuál de esas dos situaciones presenta una variación directamente proporcional? ¿Argumenten sus respuestas con el resto del grupo.
- Una empresa de seguros paga a sus vendedores una comisión por cada seguro que venden. La siguiente gráfica muestra las comisiones que ganaron tres vendedores en una semana de trabajo. Observa la gráfica y contesta de manera individual.
  - ¿Cuánto ganó en esa semana el vendedor A?, ¿cuántos seguros vendió?
  - ¿Cuánto ganó el vendedor B y cuánto el vendedor C?, ¿cuántos seguros vendió cada uno?
  - ¿Cuánto se gana de comisión por cada seguro que se vende?
  - ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en esta gráfica?
  - ¿Qué hiciste para encontrar la constante de proporcionalidad?
  - ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta relación?  $y = 750x$
  - ¿Cómo puedes saber cuánto gana un trabajador que vendió 45 seguros?  $y = 750 \cdot 45$



b)

Figura 1.1 Ejercicios de libro de texto de Ramírez, Castillo, Vergara, Flores & Azpeitia (2017)

En el libro de Ramírez, Castillo, Vergara, Flores & Azpeitia (2017) el tema se divide en tres secciones, en el primero de ellos sólo se ve el tema con gráficas (ver Figura 1.1, a y b), con 6 problemas de aplicación, en dichos problemas se hace una gran cantidad de preguntas con las que se debe interpretar la gráfica ya hechas.

Después se muestra únicamente la proporcionalidad en forma de tablas, son 2 problemas en los que a través de preguntas exploratorias se busca que el estudiante llene tablas, al final de la sección se muestran nuevamente gráficas, pero con el fin de recordar la información puesta en la primera parte, finalmente, se explica cómo identificar una tabla que representa proporcionalidad y cuál no.

c) En un laboratorio se observó la reproducción de una bacteria durante 6 horas y se registró en una tabla:

Horas	1	2	3	4	5	6
Número de bacterias	6	24	54	96	150	216

¿Cuál de las siguientes expresiones representa la reproducción de estas bacterias?

d) Se pretende cortar una lámina de madera con una superficie determinada, de tal manera que su largo mida 5 cm más que el doble de su ancho. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa esta variación? Completa la siguiente tabla para determinar la superficie de la lámina:

Ancho (cm)	5	6	7	8	9	10
Largo (cm)	15	17	19	21	23	25
Superficie (cm <sup>2</sup> )	75	102	133	168	207	250

e) El arquitecto Eduardo cuenta con un terreno cuadrangular para hacer una casa habitación. El terreno tiene cierta medida por lado, la cual se pretende disminuir en 5 m, como se muestra en la figura, para establecer el lugar de jardín y estacionamiento. ¿Cuál es la expresión que permite calcular la medida de la superficie del terreno destinada para la construcción de la casa habitación?

Figura 1.2 Ejemplo de libro de Ramírez, Castillo, Vergara, Flores & Azpeitia (2017) a) Información en tablas con ejemplo de problema con bacterias

Al final, en la sección tres se revuelve el tipo de representación de la proporcionalidad, es decir, en el primer problema se aborda el análisis de una tabla que involucra la relación entre la medida del lado de un cuadrado y su área, el segundo es el mismo tema, pero en el contexto de un proyector, en este problema se maneja una gran cantidad de preguntas exploratorias y se trabaja con la forma algebraica de la proporcionalidad. En un ejercicio posterior se toca el tema del crecimiento de una bacteria, su crecimiento no da datos lineales y tampoco se explica que esto no representa una relación de proporcionalidad (ver figura 1.2).

El tema de proporcionalidad en el libro de Escareño & López (2014) comienza con un problema de aplicación en relación a la venta de tacos y jugos, se hace una gran cantidad de preguntas donde pasa por la representación tabular, algebraica y al final gráfica, este problema si relaciona todas las representaciones de la proporcionalidad (ver Figura 1.3, a). El segundo problema presenta una gráfica y una tabla sin datos contextualizados (tiempo, volumen, distancia, etc.) para las cuales se presentan diferentes enunciados que deben ser relacionados con la tabla o la gráfica. Para el tercer problema se hace un ejercicio parecido al anterior, pero se utiliza la representación algebraica de la proporcionalidad. En los dos últimos problemas se utiliza la misma técnica, pero sólo con gráficas (ver Figura 1.3, b).

**Reconocimiento de situaciones de proporcionalidad**

¿Qué tipo de relación existe entre los datos que muestra cada gráfica? ¿Por qué? ¿Es suficiente con que la representación gráfica de una situación sea una recta, para que corresponda a una relación de proporcionalidad?

**4.1. Representaciones de relaciones de proporcionalidad**

Reúnete con un compañero para resolver los siguientes problemas.

1. Andrés atiende un negocio de tacos y jugos. Va de una mesa a otra anotando los pedidos de los clientes. La ilustración muestra seis órdenes que anotó en su libreta.

Orden	Tacos	Jugos	Total
1	4	2	\$ 34
2	1	1	\$ 11
3	3	-	\$ 18
4	4	1	
5	1	2	
6	5	3	

a) ¿Cuánto cuesta cada taco? \_\_\_\_\_

b) ¿Cuánto cuesta cada jugo? \_\_\_\_\_

c) ¿Cuál es el costo de la orden número 4? \_\_\_\_\_ ¿Y el de la número 5? \_\_\_\_\_

d) ¿Cómo pueden obtener el costo de la orden 6 a partir del costo de las órdenes 4 y 5? \_\_\_\_\_

e) Consideren los resultados que obtuvieron para completar las siguientes tablas.

Número de tacos (n)	Costo (c)
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Número de jugos (n)	Costo (c)
1	
2	
3	
4	
5	
6	

3. Las situaciones que aparecen a la izquierda se refieren a cantidades que varían en proporción directa. Relacionen cada una de ellas con la expresión algebraica de la derecha que le corresponde.

( ) Medida del lado de un cuadrado y su perímetro      a)  $y = 4x$

( ) Medidas del radio y de la circunferencia

( ) Número de gatos y número de patas      b)  $y = 6.28x$

4. Analicen la gráfica de la derecha.

a) ¿Cuál es el valor de y cuando el de x es 1? \_\_\_\_\_

b) ¿Cuál es el valor de y cuando el de x es 10? \_\_\_\_\_

c) ¿Cuál es el valor de y cuando el de x es 1.5? \_\_\_\_\_

d) Escriban en el recuadro una situación que se pueda representar con esta gráfica y la expresión algebraica que le corresponde.

e) Comprueben que los resultados que da la ecuación coinciden con los que muestra la gráfica. Por ejemplo, en la ecuación, ¿cuál es el valor de y cuando el de x es 5? \_\_\_\_\_ ¿Y cuando el valor de x es 10? \_\_\_\_\_

5. Analicen las siguientes gráficas.

a)

b)

• Relacionen las siguientes situaciones con la gráfica que le corresponde, anotándola como título de la gráfica.

( ) Relación entre las edades de María y Luis, si éste es 10 años mayor que María.

( ) Relación entre la distancia recorrida por un automóvil y los litros de gasolina que consume, si rinde 10 km por litro.

Figura 1.3 Ejercicios de libro de Escareño & López (2014)

En el último libro de matemáticas para tercero de secundaria (Arriaga, Benítez, & Cortés, 2008), al inicio el estudiante debe identificar puntos en el plano cartesiano para posteriormente comenzar con la primera actividad (ver Figura 1.4, a), la cual tiene un contexto de la velocidad de una vela que navega en el mar, en la que, en primer lugar, tiene que contestar una tabla con los datos dados en el problema y así

poder graficar la tabla, y finalizar con unas preguntas, este proceso es repetido desde la actividad 2 hasta la 8 sólo que se presentan con diferentes contextos. En la actividad 9 propone a los alumnos que analicen una serie de rectas en las cuales deben encontrar la razón de cambio de cada una de ellas y para finalizar proponen unas preguntas con respecto a la relación que existe entre ellas (ver Figura 1.4, b).

TEMA: REPRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN  
APARTADO 6: GRÁFICAS I

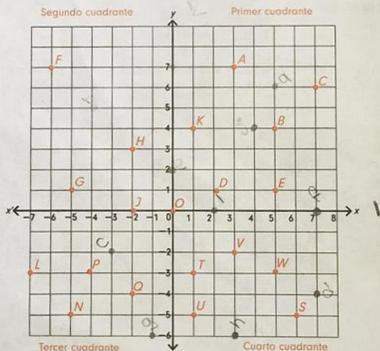
**CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES**  
Analizar la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal y relacionarla con la inclinación o pendiente de la recta que lo representa.

**Se sabe que:**  
René Descartes utilizó su nombre latinizado ('Cartesius'), de ahí el nombre de plano cartesiano.

**ACTIVIDAD PREVIA**  
En los cursos anteriores aprendimos a trazar algunas gráficas en el plano cartesiano. La mayoría de ellas fueron gráficas lineales o de primer grado. Utilizamos un plano cartesiano para ubicar puntos identificados por un par ordenado de elementos. Recordemos un poco:

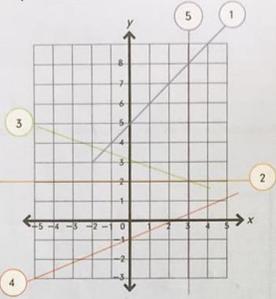
**RAZÓN ARITMÉTICA**  
Número que se obtiene al comparar, por diferencia, dos cantidades.

En el siguiente plano cartesiano se encuentran colocados algunos puntos. Determina las coordenadas de cada uno de ellos y exprésalos como par ordenado.



a)

En el siguiente plano cartesiano aparecen cinco rectas, determina la razón de cambio de cada una de ellas y contesta lo que se solicita.



Escribe la razón de cambio de cada recta.  
 $R_1$ : \_\_\_\_\_ ;  $R_2$ : \_\_\_\_\_ ;  $R_3$ : \_\_\_\_\_ ;  $R_4$ : \_\_\_\_\_ ;  $R_5$ : \_\_\_\_\_  
 ¿Cuál es la pendiente de  $R_2$ ?  
 \_\_\_\_\_  
 Explica el porqué de ese valor.  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Cuál es la pendiente de  $R_3$ ?  
 \_\_\_\_\_  
 Explica el porqué de ese valor.  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Qué sucede si un número se divide entre cero?  
 \_\_\_\_\_  
 Escribe la ordenada al origen de cada recta.  
 $R_1$ : \_\_\_\_\_ ;  $R_2$ : \_\_\_\_\_ ;  $R_3$ : \_\_\_\_\_ ;  $R_4$ : \_\_\_\_\_ ;  $R_5$ : \_\_\_\_\_

b)

Figura 1.4 Ejercicios de libro de Arriaga, Benítez & Cortés (2008)

Considerando en conjunto el tratamiento del tema de proporcionalidad a través de los libros de texto presentados previamente y la definición que se tiene de la TRS de Duval, el cual nos menciona, a grandes rasgos, que una persona aprende matemáticas a través de tres acciones fundamentales y son: el tratamiento en dos registros de representación del conocimiento matemático por separado y la tercera acción que consiste en la conversión entre ambos registros, desde esta perspectiva se observa que si bien los autores se apoyan en diferentes registros semióticos para presentar información y para interpretar la proporcionalidad, como lo son: tablas, información escrita, gráfica, etc., no lo hacen de una forma ordenada, es decir, presentan primero gráficas, luego tablas y otra vez gráficas, en los tres libros se

encuentran problemas que presentan de manera aislada la forma de presentar la información (gráfica o tabular) en problemas que sólo involucran gráficas sin asociarlas con su representación tabular o viceversa, por un lado, no se hace una conversión entre ellos pero si se realiza tratamiento en cada registro de representación. El único libro que separa el tema de proporcionalidad en su representación gráfica y tabular es en el libro de Ramírez, Castillo, Vergara, Flores & Azpeitia (2017) donde el tema está dividido en secciones en las que se enseña primero con gráficas después con tablas, pero no se hace la conversión, es decir, el significado de proporcionalidad en ambas representaciones (gráfica-tabular) no son asociadas para llegar de una representación a otra. En conclusión, los textos analizados no relacionan la forma en la que es presentada la proporcionalidad en sus diferentes representaciones (gráfica, numérica, algebraica, etc.), no realizan una conversión entre ellos. Todos los libros de textos proponen la exploración con preguntas para trabajar la proporcionalidad, pero algunas de ellas causan confusión ya que no están bien planteadas y se prestan a que se conteste cualquier cosa.

Los libros anteriores nos proporcionaron información acerca de cómo para diferentes autores es mejor dar los temas de interpretación de gráficas y proporcionalidad, sin embargo, existen trabajos de investigación que proponen cómo enseñar dichos temas, a continuación, se muestran algunos de ellos.

### **1.3 Investigaciones sobre la comprensión de la proporcionalidad en el nivel básico**

A continuación, se describen algunos artículos y trabajos que nos explican propuestas para el aprendizaje de la proporcionalidad en el nivel secundaria, este análisis se realiza con el propósito de obtener referencia de diferentes investigadores y los resultados obtenidos.

Wilhelmi (2017) en su ponencia llamada “Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria” describe los principales problemas que existe en la enseñanza del tema de proporcionalidad, menciona que no sólo debemos tomar en cuenta el conocimiento matemático (*dimensión epistémica*) sino también es necesario considerar diferentes dimensiones como la *dimensión cognitiva*, relacionada a los

procesos de aprendizaje del alumno, la *dimensión afectiva*, que conlleva a considerar todo tipo de emociones presentes en el proceso que se lleva a cabo al adquirir los nuevos conocimientos, la *dimensión mediacional*, es decir, los recursos y herramientas utilizadas para el aprendizaje, la *dimensión ecológica*, que tiene que ver con el contexto en el que se encuentran los estudiantes.

Wilhelmi (2017) menciona otro problema que existe en la enseñanza de la proporcionalidad y es la ruptura de continuidad en el currículo en educación básica. Durante la primaria el modo en el que es visto el tema es a partir del análisis de tablas que son creadas al presentarles alguna situación de la vida cotidiana, “*Las tablas permiten la organización eficaz de la información y resaltan la utilidad de determinar el valor que le corresponde a la unidad*” (Wilhelmi, 2017, pág. 5), sin embargo, en nivel secundaria se enseña la proporcionalidad como una regla de tres o su representación algebraica ( $y=mx$ ,  $m>0$ ) y se deja de lado el uso de tablas, lo cual implica *fenómenos didácticos* (Wilhelmi, Font, & Godino, 2005); *ilusión de la transparencia*, aparece cuando se da por hecho que un estudiante de secundaria sabe proporcionalidad después de que en su educación en primaria se abordó el tema en situaciones cotidianas, y sólo se trabaja con las nuevas formas en las que se representa la proporcionalidad, asumiendo que se crea una asociación inmediata entre los conocimientos adquiridos en ambos niveles de escolaridad, sugiere que se apliquen ejercicios que promuevan la relación que existe entre la construcción de tablas, regla de tres, pendiente y la función lineal. *Ilusión de la linealidad*, aparece cuando se introduce la proporcionalidad como un conocimiento aislado que no necesita ser analizado al realizar el mismo tipo de problemas, lo que provoca que sea muy técnico. *Ruptura longitudinal*, en secundaria no se aborda el tema considerando los aprendizajes obtenidos en primaria (creación de tablas, regla de tres), en secundaria se inicia algebraicamente con ecuaciones y funciones lineales utilizando como complemento la proporcionalidad. *Omisión transversal*, no se consideran los contextos en los que se puede aplicar la proporcionalidad.

Para resolver estos problemas, Wilhelmi (2017, pág. 8) propone que se siga los siguientes pasos;

- 1) *Organización de los valores conocidos y desconocidos en forma de tabla de valores.*
- 2) *Reducción a la unidad: determinación del valor de “y” al que le corresponde “x=1”.*
- 3) *Construcción de una tabla de valores “extensa” que contemple la información de 1) y de 2).*
- 4) *Representación en el plano cartesiano de los valores de la tabla 3), identificando unos valores en el eje “x” y “sus parejas” en el eje “y”.*
- 5) *Interpretación gráfica de la técnica “reducción a la unidad”: valor de y para x=1.*
- 6) *Determinación de la relación: “valor de y” = “valor de reducción a la unidad” “valor de x” Esta relación se establece en este paso en escritura natural, no formalizada.*
- 7) *Determinación de la fórmula de la función lineal ( $y=mx$ ,  $m>0$ ) que describe la situación, como un lenguaje simplificado y eficiente, donde la pendiente  $m$  representa el valor de reducción a la unidad.*
- 8) *Interpretación de la situación original en términos de la fórmula de la función lineal determinada: eficacia y coste.*
- 9) *Desarrollo de la noción de función lineal como familia dependiente del parámetro  $m$  ( $y=mx$ ,  $m$ ).*

A partir del análisis de los pasos propuestos por Wilhelmi (2017) se identifica que en educación primaria sólo se maneja los dos primeros momentos, pasando del primero al segundo. En secundaria se abarca los momentos 7, 3, 4 y 9, en ese orden, causando los problemas mencionados anteriormente.

Para finalizar Wilhelmi (2017) propone utilizar la Teoría del Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero, & Font, 2007) y así tener un proceso eficaz diseñado con base en responder preguntas en las dimensiones epistémico-ecológica, cognitivo-afectiva, interaccional-mediacional.

En el artículo de José María Gairín y Antonio M. Oller (2011), resaltan el tema de proporcionalidad desarrollando los antecedentes hasta la incorporación en el

currículo de la enseñanza de matemáticas. Después, se habla de las principales problemáticas que existen en los alumnos en el aprendizaje de la proporcionalidad, el primer de ellos es la dificultad para comprender los principales conceptos, el segundo es la deficiencia de conocimientos previos que tienen los alumnos, por último, la forma en la que es impartida el tema. El artículo se centra en tratar de proponer nuevas estrategias de enseñanza-aprendizaje para así resolver los tres problemas mencionados.

Gairín & Oller (2011) realizaron una exploración histórica, fenomenológica y epistemológica relacionada al concepto de proporcionalidad, además, consideraron las condiciones cognitivas en las que se encontraban los alumnos. Buscaron una propuesta para que los alumnos incrementen su comprensión en tres diferentes rasgos (Gairín & Oller, 2011, pág. 184);

*“- En el uso significativo de las estructuras multiplicativas que han estudiado con anterioridad.*

*- En la aprehensión de los aspectos conceptuales relacionados con la proporcionalidad.*

*- En la aplicación de dichos aspectos a la hora de resolver situaciones problemáticas relacionadas con la proporcionalidad.”*

El primero de ellos es enfocado en una recopilación de los conocimientos previos de los alumnos, en el segundo acerca de los conceptos que son adquiridos por los estudiantes y el tercero está vinculado con los aspectos necesarios para resolver problemas y ejercicios de proporcionalidad. A partir de ese momento, se hace la distinción entre *ideas relativas a aspectos conceptuales*, orientados a la resolución de problemas, e *ideas relativas a aplicaciones prácticas*.

Comenzando, las ideas relativas a aspectos conceptuales, es decir, se hace una breve descripción acerca de los elementos conceptuales esenciales de la proporcionalidad que se presentan al resolver un problema; 1) la proporcionalidad directa e inversa están separadas, histórico y matemáticamente, así que la propuesta es que se realice primero un análisis al concepto de magnitudes directamente proporcionales para después continuar de forma separado con

magnitudes inversamente proporcionales, 2) tiene que ver con la forma en las que se describen los problemas de proporcionalidad, la oración “*la magnitud A es directamente (o inversamente) proporcional a B*”, está mal planteado ya que sólo es válida cuando las dos cantidades se relacionan y es necesario agregar una condición que regule y haga cumplir la oración, 3) se propone diseñar actividades que involucren variables de continuidad, intercambio y búsqueda de valores unitarios, ya que históricamente fue como surgió el uso de la proporcionalidad, 4) gracias a las actividades de intercambio surge naturalmente el término “*tanto por uno...*” que da inicio cognitivamente al proceso realizado en la proporcionalidad, 5) la aplicación de problemas que involucren encontrar un dato desconocido, 6) descartar el uso de la proporcionalidad inversa en el aula, y a cambio utilizar ejemplos que sean visibles para los estudiantes, 7) encontrar la constante de proporcionalidad es la pauta para el desarrollo y resolución de problemas, sin embargo, en muchos casos es difícil de encontrar y se presta a utilizar únicamente magnitudes proporcionados por el problema, 8) para la proporcionalidad inversa es necesario saber obtener la constante de proporcionalidad y el significado de las operaciones que se realizan en cada problema.

En segundo lugar, se habla de las ideas relativas a aplicaciones prácticas, que se refieren a los contextos en el que la proporcionalidad es usada, 1) el empleo de la proporcionalidad en el porcentaje se busca que el estudiante identifique y comprenda el significado de porcentaje y no sólo el algoritmo.

Para finalizar, Gairín & Oller (2011) dicen que el proceso de enseñanza actual no es funcional para los estudiantes, dejan una serie de propuestas para abatir este problema; separar la enseñanza de proporción directa de la proporción inversa, poner énfasis en las magnitudes que son utilizadas y el significado de las operaciones, diseñar problemas que estén planteados correctamente para que exista la relación entre dos magnitudes, *utilizar el significado de razón como “tanto por uno”*, darle la importancia necesaria a la constante de proporcionalidad para resolver problemas de proporción inversa.

En conclusión, hacer uso de diferentes formas en las que se representa la proporcionalidad es crucial para que un estudiante aprenda, es importante que en secundaria se aborde el tema con un seguimiento y no se dé por hecho que los temas en primaria acerca de la proporcionalidad fueron aprendidos correctamente por los alumnos, es necesario considerarlos como base para seguir construyendo el tema. Al realizar la búsqueda sobre propuestas para implementar la proporcionalidad en el aula se notó que son escasas y las encontradas no aplican lo que exponen en su trabajo. Resaltan la importancia que tiene el contexto y utilizan problemas irreales que causan que el estudiante no comprenda las operaciones que involucran el proceso de solución de un problema de proporcionalidad.

#### **1.4 La importancia de un nuevo modelo tecnológico abierto como apoyo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**

Después del análisis previo, tanto en el empleo de la tecnología para la enseñanza de la matemática en el aula, así como de diferentes libros de texto en los que se aborda el tema de la proporcionalidad y algunos artículos que también exploran este tema, es notable la deficiencia que existe de recursos educativos en línea que permitan apoyar al estudiante en su aprendizaje y además los recursos que existen actualmente para el apoyo de las clases presenciales en Matemáticas no consideran ninguna teoría de la Matemática Educativa que apoye la organización de información necesaria para que una persona aprenda Matemáticas. Los programas educativos piden que exista este tipo de contenidos para que el alumno pueda desarrollarse y esté preparado para enfrentar el mundo actual y sin embargo no existen, o los que existen no están a disposición de todo usuario.

Por otro lado, los libros de texto comparten algunas deficiencias notorias en el diseño de las actividades, se propone que los estudiantes interpreten gráficas con ejemplos que son repetidos y no permiten que se exploren las ideas que tienen sobre cómo resolverlo, los ejercicios provocan que el estudiante se confunda y den una respuesta incorrecta ya que no se explica nada y sólo hacen que se contesten preguntas para tratar de leer la gráfica. En el libro de Ramírez, Castillo, Vergara, Flores & Azpeitia (2017) se optó por mostrar ejercicios con gráficas sin tomar en

cuenta elementos necesarios como tablas numéricas de información para facilitar la comprensión a los alumnos, sus ejercicios eran semejantes sin explicación. Por otro lado, Arriaga, Benítez & Cortés (2008) y Escareño & López (2014), si consideran el apoyo de tablas, gráficas y expresiones algebraicas pero no explican la razón de representar de diferentes formas la proporcionalidad, es decir, no se da al estudiante herramientas necesarias para comprender aún más el tema, esto resulta contraproducente ya que al estudiante no aprecia conexión entre diferentes tipos de representación de un objeto matemático.

Con base en lo anterior, se propone un modelo que integre el componente tecnológico con una teoría de Matemática Educativa para encontrar solución a la falta de uso de las TIC en el aula, apoyar al Modelo Educativo en México y, por otro lado, considerar la ontología y epistemología del saber matemático. Este nuevo modelo es llamado Objeto de Aprendizaje Matemático (OAM). Las investigaciones realizadas por Miguel R. Wilhelmi (2017), José María Gairín y Antonio M. Oller (2011), son el soporte para la creación del OAM basada en la TRS, ya que sustentan la importancia del manejo de diferentes registros para aprovechar al máximo el aprendizaje en matemáticas, además, que se establezca una relación entre dichos registros. Los resultados de las investigaciones sugieren que el estudiante aprende matemáticas haciendo uso de diferentes registros de representación y la correspondencia que existe entre ellos, por eso la estructura del OAM considera estos aportes.

# CAPÍTULO 2

## Marco referencial



# Capítulo 2

## Marco referencial

### Introducción

En este capítulo se describen algunos elementos que se refieren a los recursos tecnológicos abiertos llamados Objetos de Aprendizaje (OA), es decir, se discute qué son los Recursos Educativos Abiertos (REA), se describe a la construcción y las características de los OA y se presentan dos teorías, el construccionismo y la teoría de la carga cognitiva, que han sido empleadas como referentes teóricos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas mediante el desarrollo e implementación de objetos tecnológicos en el aula. La teoría de Carga Cognitiva es una de las teorías que sustentan el uso de la tecnología dentro del aula, señala específicamente, cómo es que el ser humano aprende las funciones que cumple una computadora, así como el desarrollo de características que debe de cumplir cualquier Recurso Educativo Abierto (REA) tecnológico.

### 2.1 Teoría del Construccionismo

Papert (1987) es considerado por muchos uno de los investigadores más importantes del Instituto Tecnológico de Massachusetts (*MIT* por las iniciales en idioma inglés, Massachusetts Institute of Technology), diseñó herramientas tecnológicas con el fin de apoyar el aprendizaje (Luján & Salas, 2009), además, una de sus aportaciones más importantes fue el desarrollo de una nueva teoría llamada Construccionismo, la cual, opina que un estudiante es constructor de su propio aprendizaje, diseñador de sus propias herramientas, Papert (1987) piensa que trabajar con computadoras permite que las personas modifiquen su forma de pensar.

Según Badilla & Chacón (2004) el Construccionismo pretende enseñar el lenguaje computacional y sugiere que los estudiantes programen en la computadora, además, distingue entre dos tipos de conocimiento, el matemático y el matético (conocimientos previos), además, se encuentran implícitos tres conceptos

fundamentales en la teoría construccionista: objetos para pensar, entidades públicas y micromundos. Los primeros se refieren a artefactos usados o construidos por una persona para entender el funcionamiento de otros objetos a partir de la composición de dicho artefacto, entidades públicas: Papert menciona que la construcción del aprendizaje es mejor cuando es del tipo público, es decir, cuando el estudiante puede mostrar, examinar, discutir, probar, admirar algún conocimiento permitiendo representarlo de forma visual o auditivamente. Y, por último, los micromundos; son constituidos por entidades públicas que usan objetos para pensar como herramientas (Badilla & Chacón, 2004).

## 2.2 Teoría de la carga cognitiva

La teoría de la Carga Cognitiva (TCC) trata de *alinear* el diseño de material educativo con la Arquitectura Cognitiva Humana (ACH) (Andrade, 2012).

Es una teoría del aprendizaje en contextos multimedia que se basa en tres postulados: 1) la información es adquirida y procesada a través de canales duales; 2) la memoria tiene capacidad limitada para la obtención de información por medio de cada canal; 3) procesamiento activo (Jiménez & Marín, 2012).

**Postulado 1:** está sustentado en la Teoría de Codificación Dual (TCD) de Paivio (1991) y en el modelo de Memoria Operativa (MO) de (Baddeley, 2003), las cuales plantean que se aprende mejor si la información es adquirida de forma conjunta en dos tipos de representación, la TCD propone el uso y combinación de diferentes formas de representación múltiple, por ejemplo, textos, videos, imágenes, gráficos, etc., específicamente la combinación de la información en forma de texto con imágenes, hacen que la información sea recordada y comprendida por el estudiante, además, plantea que el *sistema cognitivo humano* contiene dos subsistemas, verbal y de imágenes, en el verbal sólo es procesada las palabras, sin embargo, las imágenes son procesadas en ambos subsistemas, por eso es necesario integrar imágenes a la información en texto (Schnotz, 2002), por otro lado, el modelo MO propone dos sistemas, el *bucle fonológico* y la *agenda visoespacial* las cuales deben trabajar de manera conjunta, por un lado, el bucle

fonológico permite almacenar la información en forma verbal-acústica de una palabra, y por el otro la agenda viso-espacial permite adquirir y procesar información en forma visual y espacial (Fitzgerald & Gaviria, 2013)

**Postulado 2:** supone que cada alumno tiene una memoria de trabajo limitada la cual se enfrenta a distintas situaciones como la entrada de nueva información proveniente de diferentes procesos de aprendizaje (Andrade, 2012). Como la información es adquirida por medio del canal visual y el canal auditivo, la memoria de trabajo puede ser beneficiada si se utilizan varios canales al mismo tiempo y no sólo uno.

**Postulado 3:** sostiene que sólo se aprende si los nuevos conocimientos están relacionados con la información procesada en la memoria de largo plazo.

### **Arquitectura Cognitiva Humana**

A través del tiempo, uno de los retos más importantes para la educación es saber cómo el cerebro adquiere y procesa información, muchos investigadores han realizado analogías para describir este fenómeno, para los teóricos de la TCC es fundamental considerar atributos sobre cómo aprende el ser humano, solo así la enseñanza será efectiva. ACH es llamada a la forma en que están organizadas las estructuras y las funciones cognitivas dentro del cerebro (Sweller, 2008) y (Ávila, Aguayo, & Lama, 2013).

La TCC describe 3 tipos de memorias con las cuales se procesa información y se almacena dentro del cerebro; memoria sensorial, memoria de trabajo y memoria de largo plazo.

### **Memoria sensorial**

La memoria sensorial es la primera que está en contacto con la información, es adquirida gracias a diferentes canales sensoriales como, por ejemplo, el visual y el auditivo, considerados la clave para localizar diferente información del medio en el que nos encontramos, aunque la memoria sensorial se distingue por su almacenamiento de poco tiempo, esto no impide que se realice una de las actividades más importantes dentro del proceso de aprendizaje, ya que transforma

lo que percibe en información auditiva y visual (Andrade, 2012) en esta memoria la información no adquiere ningún significado y es procesada de manera independiente, sin embargo, la información que no es identificada y asociada a algún otro conocimiento es desechada por la memoria (Shaffer, Doube, & Tuovinen, 2003)

### **Memoria de trabajo**

En la memoria de trabajo se procesa la información que es adquirida en la memoria sensorial, su estancia es de periodos de tiempo cortos y es la que permite pensar lógicamente y resolver problemas, además es considerada como el paso intermedio entre la memoria sensorial y la memoria a largo plazo, su principal característica es su limitada capacidad de procesamiento (Shaffer, Doube, & Tuovinen, 2003).

Muchos autores defienden que presentar demasiada información a la memoria de trabajo puede sobrepasar su capacidad para procesar información lo cual implicaría no considerar toda la información de entrada y desecharla inmediatamente (Latapie, 2007).

### **Memoria de largo plazo**

La memoria de largo plazo es considerada como ilimitada, almacena cualquier tipo de información y es organizada en esquemas que componen a un sistema de información mayor. Una de sus características es que toda la información es organizada en esquemas, los cuales están conformados jerárquicamente en *unidades de información*.

A toda la información procesada dentro de la memoria que es utilizada para resolver un problema, la TCC decidió llamarla carga cognitiva, y describen los diferentes tipos de carga cognitiva, clasificadas por la relación que se tiene con los diferentes tipos de memoria.

### **Tipos de carga cognitiva**

*Carga cognitiva intrínseca*

Este tipo se refiere a la carga que se tiene frente el nivel de complejidad que tiene el conocimiento que se quiere enseñar, es decir, depende de dos cosas, por un lado, de la complejidad de la información y, por el otro, a los conocimientos que ya tiene el aprendiz (conocimientos previos), los cuales deben ser considerados como información que se encuentra dentro de la memoria de largo plazo, que influyen directamente en la memoria de trabajo. Por ejemplo, para generar el conocimiento de la multiplicación es necesario recurrir al tema de suma como conocimiento previo y para que los alumnos comprendan el proceso de la multiplicación.

#### *Carga cognitiva extrínseca*

Se refiere a toda aquella carga que satura la memoria de trabajo, se recomienda que se utilicen materiales que tengan relevancia para la información que se desea que el aprendiz adquiera. Por ejemplo, para abordar un tema es necesario sólo proporcionar los elementos necesarios en la clase y no relacionarlos con otro tipo de información.

#### *Carga cognitiva relevante*

Es la carga que está relacionada directamente con el aprendizaje de un conocimiento, los cuales se construyen a partir de un proceso cognitivo adecuado, se relaciona con la forma en que se presenta un material, la información y la actividad que se propone, por ejemplo, es necesario llevar un orden para presentar un tema, en matemáticas siempre se comienza con temas básicos y conforme pasa el tiempo la dificultad aumenta pero siempre se relaciona con el tema visto anteriormente.

### **Características para la presentación de información externa**

El desarrollo de elementos externos que garanticen la aceptación dentro de una estructura cognitiva es uno de los propósitos principales de la TCC, para ello, han desarrollado algunas características que deben ser consideradas para la elección de dichos elementos con el fin de no sobrecargar la memoria de trabajo y perjudicar

el proceso de aprendizaje aumentando la información organizada en esquemas dentro de la memoria a largo plazo.

Para ello (Andrade, 2012) ha propuesto algunos principios para el desarrollo de elementos externos dentro de la enseñanza.

### ***Principio de los problemas con solución libre***

La carga cognitiva de un aprendiz es mejor si el problema que es propuesto tiene más de una respuesta correcta, es decir, el estudiante llega a su propia solución. Con esto se pretende que la carga cognitiva no se sobre cargue, ya que es considerado como opuesto el quehacer del alumno al comparar el resultado con una búsqueda aleatoria sin realmente comprender lo que se realizó y la función que cumple.

### ***Principio de los ejemplos de problemas resueltos***

Este principio ofrece al alumno ejemplos de problemas resueltos como lo haría un experto en el tema, sólo así el alumno asociará la forma de solución con algunos problemas particulares, con el propósito de no buscar una solución por el método ensayo y error si no mejor se utilice esa carga para aprender a través de diferentes estrategias de solución.

### ***Principio sobre completar problemas***

Proponer problemas en los que el proceso de solución está incompleto, el estudiante será el encargado de completar parte de la respuesta, de esta forma el alumno llegará a un resultado concreto sin dar opciones aleatorias, de otra manera, aumentará la carga cognitiva.

### ***Principio de atención dividida***

En este principio se propone el uso de dos o más fuentes de información, las cuales no tienen mucha relación entre sí, deben ser presentadas de forma conjunta, asociada a la misma información, esta teoría propone la unión de información gráfica y la escrita, pero dicha información debe cuidar que tengan el mismo objetivo.

### ***Principio de modalidad***

Gracias a este principio se pretende usar distintos canales sensoriales para fortalecer la memoria de trabajo, los cuales deben ser integradas mentalmente. Además, se busca que la información escrita se realice manera auditiva, para que la memoria no se sobrecargue gracias a que es procesada de forma independiente.

### ***Principio de imaginación***

Se pide al estudiante que realice mentalmente los procedimientos que siguió para hacer alguna actividad o resolver algún problema, esto con el fin de estar consciente del trabajo y los pasos que se siguen, dicha acción permite guardar el proceso en la memoria de trabajo.

### ***Principio de interactividad***

Cuando se desea aprender información difícil, se propone que primero aprender algunos elementos de la información, y después que se reconozca la relación que existe entre ellos, ya que el tener demasiada información sin procesar, sobrecarga la memoria de trabajo.

## **2.3 Recurso Educativo Abierto**

### **2.3.1 Definición**

En el año 2002 la UNESCO definió como Recurso Educativo Abierto (REA) como: “[...] *materiales en formato digital que se ofrecen de manera gratuita y abierta para educadores, estudiantes y autodidactas para su uso y re-uso en la enseñanza, el aprendizaje y la investigación.*”. Es decir, un REA es todo materia que se acceda de manera abierta y gratuita en la enseñanza-aprendizaje como apoyo.

Un REA incluye foros, artículos de investigación digitales, videos, podcast, simulaciones, bases de datos, software, aplicaciones y muchos otros que cumplen la descripción de un REA (Santos Hermosa, Ferran Ferrer, & Abadal, 2012). Para Vidal, Alfonso, Zacca & Martínez (2013) pueden estar compuestos por;

- Contenidos educativos: objetos de aprendizaje, sonido, video, imágenes, animaciones, texto, artículos, libros digitales, etc.
- Herramientas: software, entrega (acceso), herramientas para crear y mejorar REA's, desarrollo de comunidades en línea de aprendizaje.
- Recursos de implementación: licencias de propiedad.
- Enlaces externos: observatorios y centros que promocionen recursos educativos abiertos.

### **2.3.2 Características**

Todo material educativo que cumpla las siguientes características es considerado REA según Santos-Hermosa, Ferran-Ferrer & Abadal (2012):

- Accesibilidad: el material se encuentra disponible para ser localizado y usado en cualquier momento.
- Reusabilidad: el material puede ser usado en cualquier lugar bajo las necesidades del usuario ya que carece de contexto.
- Interoperabilidad: el material tiene facilidad para ser usado en diferentes dispositivos electrónicos.
- Sostenibilidad: el material funciona correctamente sin considerar los cambios de versiones o software en donde se esté utilizando.
- Metadatos: el material tiene la posibilidad de ser indexado para su almacenamiento y búsqueda en diferentes plataformas.

Las características mencionadas algunas veces pueden o no ser consideradas en la creación de REA diseñados para el aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, el contexto debe ser tomado en cuenta para el diseño y creación de un REA y es claro que dentro del ámbito tecnológico esto no es utilizado por muchos de los diseñadores. El contexto sociocultural de México es muy diverso de tal manera que una herramienta tecnológica o recurso que puede ser usado en la Ciudad de México no causa el mismo efecto en estudiantes de otros lugares como Oaxaca o Chiapas, entonces es claro que un OA no puede ser reusable. Esta característica no es exclusiva de México ya que en otros países la cultura es completamente diferente a la nuestra.

### **2.3.3 Repositorios**

Después de la creación de diferentes REA, con licencia abierta, fue necesario facilitar la disponibilidad de los materiales a los usuarios y con la ayuda de plataformas denominadas repositorios se hizo posible. Todo material disponible en estas plataformas cumple las características de un REA, además, favorecen el acceso rápido a ellos mediante búsquedas apoyadas en metadatos (Wiley, 2000). Sin lugar a duda, este hecho permite que muchos autores compartan su trabajo por todo el mundo.

Al realizar una breve investigación sobre los diferentes repositorios que estaban disponibles para el contenido básico de matemáticas en México, se encontró una carencia de éstos. La mayoría de los repositorios encontrados son proporcionados por instituciones como el TEC de Monterrey, algunos otros no están disponibles de manera abierta. La mayoría de los repositorios encontrados estaban en inglés dando indicios de la falta de repositorios disponibles para los estudiantes y profesores de México. Existe una necesidad actualmente para desarrollar más repositorios para apoyar la educación en México.

## **2.4 Objeto de aprendizaje**

### **2.4.1 Definición**

A lo largo de la historia, la educación ha tenido que adecuarse a las nuevas necesidades que surgen en el ámbito social ya que es considerada como protagonista del desarrollo de una nueva sociedad. Gracias al auge de la tecnología en el siglo XX, la educación también se ha beneficiado con el uso de las TIC, inició con una la necesidad de inclusión para ayudar a mejorar el ámbito escolar. Actualmente, son consideradas como un potente recurso educativo (Belloch, 2012).

Para muchos profesores introducir tecnologías en el aula significó seguir el método tradicional para impartir clases e incluir la computadora para presentar diapositivas, pero esto no es el propósito de la tecnología en la educación, Ferreiro (2000) nos dice: *“no se trata de insertar lo nuevo en lo viejo, o seguir haciendo lo mismo con los nuevos recursos tecnológicos. Es innovar”* (pág. 116).

Lo que dio origen al uso un Objeto de Aprendizaje (OA), fue precisamente este tipo de problemáticas, ya que se requería un modelo que aportara al proceso de enseñanza aprendizaje fuera óptimo, esto involucraría aspectos de dominio, psicopedagógicos y tecnológicos (Callejas, Hernández, & Pinzon, 2011). Además, surgen como *“una estrategia educativa basada en la programación orientada a objetos, basándose en piezas independientes de instrucción que pueden ser reutilizadas en diversos contextos y que satisfacen los principios de encapsulado, abstracción y herencia”* (Rea, 2015, pág. 9).

Wayne (2000) fue el primero en hablar un OA, a partir de este momento diferentes organizaciones líderes en tecnología, se dedicaron a realizar investigaciones tomando en consideración la movilidad, interoperabilidad y automatización de un tema. Entre los años 1998 y 2003 las investigaciones se enfocan en proponer definiciones y aproximaciones de un OA. También se consideró definir nuevos conceptos relacionados a la unión de diversos objetos agrupados con un sólo objetivo de aprendizaje (Carías & Euceda, 2017).

Desde esos años las organizaciones se han encargado de involucrar más variantes con el uso de OA, por ejemplo, el diseño de diferentes plataformas que permitan ser usados en todo el mundo, además, se enfocan en estudiar y evaluar la importancia que ha adquirido el empleo de este recurso en el ámbito escolar.

Actualmente, no existe una definición sobre lo qué es un OA, sin embargo, es necesario saber cuáles fueron las principales concepciones que se tuvieron de él desde su comienzo, se sabe que la primera persona que utilizó este término fue Wayne Hodgins en el año 1992. Describió la función de cada objeto de aprendizaje a partir del uso de una metáfora; un día observó a su hijo manipular piezas de un juego llamado LEGO, la estructura de este permite que se puedan entrelazar y construir figuras más grandes (Gutiérrez, 2008). Es así como Wayne llega a la conclusión de que un OA es la unidad más pequeña que junto a otras permite que el aprendizaje se lleve a cabo (Serrano, 2010) describiendo también que cada una de ellas debe ser independiente y generar conocimientos por sí sola.

Wiley (2000) describe que son recursos digitales reutilizables con un único fin, ser apoyo para el aprendizaje:

*“Son los elementos de un nuevo tipo de instrucción basada en el computador y fundamentada en el paradigma computacional de “orientación al objeto”. Se valora sobre todo la creación de componentes (llamados “objetos”) que pueden ser reutilizados en múltiples contextos”* (Wiley, 2000, pág. 2)

Clara López Guzmán (2005) comenta que son elementos utilizados en la enseñanza o aprendizaje apoyados por una computadora y que su creación tiene la intención de que puedan ser usados en diferentes aplicaciones.

Por otro lado, del Moral & Cernea (2005) definen un OA como: *“aquellas unidades mínimas con significado por sí misma, constituidas por paquetes de información multiformato y con carácter interactivo”* (del Moral & Cernea, 2005, pág. 2)

A pesar de la infinidad de definiciones que existen alrededor de un OA, sólo una es reconocida y es la descrita por el Comité de Estándares de Tecnologías de Aprendizaje (IEEE. Comité de Estándares de Tecnología de Aprendizaje, 2002):

*“cualquier entidad, digital o no digital, que puede ser utilizada, reutilizada o referenciada durante el aprendizaje apoyado en la tecnología”.*

Llegando a la conclusión de que un objeto de aprendizaje es toda estructura mínima tecnológica diseñada con el fin de generar que una persona aprenda.

Como se observa, las principales definiciones van orientadas con dos áreas de conocimiento: la pedagógica y la tecnológica. La tecnológica tiene dos partes: la primera de ellas es intrínseca al OA, es decir, el desarrollo técnico del mismo OA y la otra tiene que ver con el desarrollo de plataformas donde se almacenan y permiten la distribución de OA (Serrano, 2010).

#### **2.4.2 Características**

Desde que se obtuvo una concepción de objeto de aprendizaje, fue necesario establecer una serie de características que ayuden a definir si algún recurso era

clasificado como un Objeto de Aprendizaje (OA), algunas de las principales descritas por Callejas, Hernández & Pinzón (2011) son:

- Flexibilidad: es usado en múltiples contextos, su actualización, búsqueda y gestión son de fácil acceso.
- Personalización: puede ser adaptado a las necesidades de cada usuario, con el fin de que sea usable en diferentes contextos.
- Modularidad: tienen la posibilidad de entregarlos en módulos y así mejora su distribución.
- Adaptabilidad: se adapta a los distintos estilos de aprendizaje.
- Reutilización: puede ser usado en contextos y propósitos educativos diferentes ayudando a crear nuevas secuencias formativas.
- Durabilidad: los objetos deben contar con buena vigencia o caducidad de la información.

Además, OA tiene diferentes componentes pedagógicos y son: objetivos, contenido, actividades de aprendizaje y evaluación. *“Las actividades de aprendizaje se basan en los objetivos de aprendizaje y dan sentido a los contenidos que están acompañados de una evaluación creando un ambiente de aprendizaje que facilita a los estudiantes la construcción de conceptos”* (Rea, 2015, pág. 20).

#### **2.4.3 Consideraciones para su construcción**

La construcción de un OA es compleja, necesita de un proceso que permita que se cumplan todas las características mencionadas anteriormente (Rea, 2015). Es necesario el desarrollo de componentes técnicos, académicos y metodológicos, para que el objeto sea coherente y cumpla su función principal, el aprendizaje, además, el desarrollo de una ficha o metadatos que nos permita el intercambio de este (COLOMBIA APRENDE, 2005).

Rea Cortés (2015) describe diferentes fases que deben ser seguidas para su construcción:

- 1) Planeación: se parte del análisis de las necesidades y características que se quieren abarcar.

- 2) Diseño: crear el objeto con objetivos, el contenido previamente diseñado y la evaluación requerida.
- 3) Elaboración: generar metadatos, almacenarlo en un repositorio.
- 4) Evaluación, interpretación y proyección: un grupo de expertos evalúa el objeto de aprendizaje, implementación en el aula.

## **2.5 Las teorías computacionales y las tecnologías en el aprendizaje de las matemáticas**

Después de todos los datos recabados, tanto en el primer capítulo como en el segundo, se pueden mencionar algunos puntos importantes que dieron origen a la idea principal de esta investigación y a los aportes que se harán a la Matemática Educativa:

- Es necesario incorporar las teorías de la Matemática Educativa para el desarrollo de estructuras tecnológicas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ya que actualmente no son consideradas, por el contrario, existe una teoría general llamada Construccinismo que indica como una persona aprende por medios tecnológicos, pero no considera las diferentes disciplinas y las formas en las que se aprende en cada una de ellas.
- La Teoría de Representaciones Semióticas (TRS) de la Matemática Educativa nos permite incorporar diferentes tipos de registros sobre un tema, en esta investigación será el tema de la Proporcionalidad,
- Las teorías computacionales existentes no proveen de las condiciones necesarias para la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo, el Construccinismo guía al estudiante a través de un pensamiento de tipo lógico matemático mediante la programación, sin embargo, no es suficiente para aprender matemáticas ya que las tecnologías no son el único instrumento para desarrollar la lógica matemática, existen otros aspectos relacionados con el pensamiento matemático como los conocimientos que intervienen en los problemas matemáticos: conceptos y sus propiedades, los

cuales deben ser presentados mediante diferentes registros de representación gracias a la teoría de la Matemática Educativa.

- Desde el planteamiento de la construcción de los OA, desde una perspectiva general, no consideran la epistemología del saber matemático, es decir, la manera en que se construye o se alcanza el conocimiento matemático, pues los principios y la estructura de los OA es siempre el mismo para la enseñanza de cualquier asignatura, como Biología, Física, Literatura, Matemáticas, a grandes rasgos, para las teorías computacionales una persona aprende igual cualquier disciplina.
- Considerar teorías de la Matemática Educativa para el aprendizaje de las matemáticas a través de medios tecnológicos es una investigación que se ha explorado poco y no hay muchas propuestas para comenzar un cambio dentro del ámbito educativo.

Cabe mencionar que este trabajo no está en contra de las diferentes teorías computacionales, lo que se trata de hacer es tomar en cuenta la ontología y epistemología del saber matemático en el desarrollo de los objetos o estructuras tecnológicas para apoyar de una mejor forma el aprendizaje. Por esta razón es que los Objetos de Aprendizaje Matemáticos que se proponen más adelante, mantienen los elementos sugeridos por las teorías computacionales. Lo que se trata de hacer es la unión de las teorías computacionales y la TRS.

# CAPÍTULO 3

**Desarrollo de Objetos de Aprendizaje**

**Matemáticos**



## Capítulo 3

### Desarrollo de Objetos de Aprendizaje Matemáticos

#### Introducción

En este capítulo se describe la teoría la Teoría de Representaciones Semióticas (TRS) (Duval, 1999); la cual sustenta el trabajo de investigación. Esta teoría, a grandes rasgos, señala que la comprensión de un concepto matemático considera distintos registros de representación de los objetos matemáticos y se realiza gracias al tratamiento matemático que se lleva a cabo en cada registro de representación y a la realización de un proceso de conversión (o correspondencia de significados) entre registros de representación.

Con base en la noción de comprensión de la TRS, se plantea la propuesta de un modelo teórico para la generación sistemática de un nuevo tipo de Objeto de Aprendizaje (OA), al que hemos llamado Objeto de Aprendizaje Matemático (OAM). Los OAM no son más que la materialización del modelo teórico a través de un recurso digital que incorpora y organiza al mismo tiempo un conjunto de Recursos Educativos Abiertos (REA) virtuales con la finalidad de lograr el aprendizaje de cierto contenido matemático. Consiste en organizar un conjunto de OA con base en los principios de una teoría de la Matemática Educativa, la TRS. En ese sentido, esta propuesta adquiere un nuevo nombre, una nueva estructura y nuevas características, favoreciendo el aprendizaje de la matemática escolar.

#### 3.1 Teoría de Representaciones Semióticas

Desde tiempos remotos, el término *representación* ha sido usado en diferentes contextos, con relación en las nociones de signos o símbolos que se encuentran en el mundo. Representar algo involucra interiorizar algún objeto en diferentes formas, generalmente lo hacemos a partir del uso de los sentidos, además, el conjunto de símbolos o signos suelen ser internos o externos, es decir, “aquellas que ocupan un lugar en la mente de los sujetos. Ellas nos permiten mirar el objeto en ausencia total

del significante perceptible; pueden ser conceptos, nociones, creencias, fantasías, guiones, modelos mentales, imágenes” (Tamayo, 2006, pág. 40).

Por otro lado, Lupiáñez & Moreno (2001) entienden por representación a las distintas notaciones matemáticas; simbólicas, gráficas o verbales, las cuales son usadas para expresar conceptos, procedimientos, características o propiedades que forman parte de las matemáticas.

En esta misma dirección, Duval (1993) entiende la representación semiótica como el producto obtenido al utilizar el signo correspondiente a una representación, el cual, contiene sus propias reglas de significado y de funcionamiento.

En particular, apoyado en esta noción de representación, Duval (2003) se interesó en el estudio del aprendizaje de las matemáticas, señalando la necesidad de conceptualizar, razonar, resolver y analizar contenido para que un concepto matemático sea aprendido por el estudiante. Considera la existencia de dos rasgos necesarios para la comprensión u obtención de habilidades matemáticas, el primero trata del manejo adecuado de diferentes registros de representación semiótica y el segundo considera que no todo objeto matemático es accesible a través de la visualización (Duval, 1999).

Duval (1993) señala que aprender matemáticas no consta sólo saber conceptos, más bien, hacer uso de representaciones semióticas hacen posible que el conocimiento matemático sea aprendido.

Duval (1999) planteó dos preguntas sustanciales para el análisis de las diferentes dificultades que se tienen para aprender dichos objetos matemáticos, la primera de ella es: *¿cómo sujetos en fase de aprendizaje no podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos sólo pueden tener relación con las representaciones semióticas?*, es decir, *¿cómo lograr que un estudiante no confunda un objeto matemático con su representación semiótica? Y en el caso opuesto: ¿cómo pueden adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos ligados con las representaciones semióticas si no tienen ya un*

*aprendizaje conceptual de los objetos representados?* (D' Amore, 2004, pág. 95), consideradas como parte de la paradoja de Duval.

Para la TRS aprender y enseñar matemáticas involucra realizar tratamientos y conversiones, diferenciar entre las funcionalidades de los registros de representación y cómo son coordinados.

Dentro de la matemática se encuentran implícitas notaciones simbólicas muy específicas, por ejemplo, la escritura algebraica de diferentes objetos, la lógica, escritura de números, etc., utilizadas para representar gráficos, figuras geométricas, diagramas, entre otros, a las diferentes formas de representar un objeto matemático son llamados registros de representación (Duval, 1999).

En el proceso de construcción de aprendizaje matemático se deben llevar a cabo tres actividades fundamentales: formación, son representaciones que surgen a partir de símbolos para representar un objeto; tratamiento, se lleva a cabo una transformación de la representación dentro del mismo registro; conversión, se produce al realizar una transformación de un registro a otro (Castro & Suavita, 2011).

En el presente trabajo, se tomaron en cuenta los siguientes elementos de la teoría de Duval: Objeto matemático, semiósis y noésis, registro semiótico, tratamiento y conversión. A continuación, se describen cada uno de ellos.

### **Objeto Matemático**

Para Duval (1995) un objeto matemático presenta dos características, (1) todo objeto matemático tiene diferentes registros de representación, (2) un objeto matemático no es perceptible con la vista (visualización), por ejemplo, la idea de la derivada no es algo que pueda ser percibido con los sentidos, es algo mental. Para comprender las propiedades de un objeto, en este caso el de la derivada, es fundamental analizar primero sus representaciones ya que ninguna de ellas proporciona la misma información y en conjunto hacen completa a la derivada o al objeto matemático. No debe confundirse el objeto matemático con su representación (Damisa & Ponzetti, 2015).

## **Semiósis y noésis**

Se entiende por semiótica a la disciplina científica encargada del estudio de los signos, Duval (1996) retoma el concepto y lo considera como la obtención mental representada por medio de signos de un objeto matemático y la noética como la obtención conceptual de un objeto matemático. La obtención conceptual de los conocimientos matemáticos se dan a partir de las siguientes consideraciones; 1) hacer uso de diferentes representaciones semióticas de un sólo objeto es una acción propia del ser humano, 2) la elaboración de nuevos sistemas semióticos está relacionado con la epistemología de los objetos matemáticos y los símbolos que lo componen, estas consideraciones explican lo que menciona Duval “no hay noesis sin semiosis, la semiosis determina las condiciones para que se lleve a cabo la noesis” (Duval, 1995; pág. 5), es decir, la semiosis es la característica necesaria para que se lleve a cabo la obtención conceptual de un objeto matemático (noesis) (D' Amore, 2004).

## **Registro semiótico**

Duval (1999) señala que un objeto matemático se puede representar en distintas formas semióticas, además, menciona que muy pocas investigaciones son dedicadas al cambio que existe entre las diferentes transformaciones en semiótica de los objetos matemáticos el cual es indispensable para el aprendizaje de las matemáticas, debe considerarse que una representación o registro cumple algunas funciones, la primera de ellas es la expresión, la forma en la que se presenta para todo el público, la segunda es la objetivación, es decir, lo que representa para cada quién y por último el tratamiento, que significa la modificación que se hace a la representación del objeto matemático (San Martín, 2007).

Un registro está compuesto por signos; símbolos, trazos, íconos, etc., asociados cada uno de ellos al significado externo e interno de cada objeto matemático, es así como un registro es considerado un medio de expresión (Guzmán, 1998).

## **Tratamiento**

Es llamado tratamiento a las acciones que se hacen dentro de un registro para modificar con reglas establecidas dentro del mismo sistema de representación y así obtener un cambio al inicial y mejorar la adquisición de conocimientos, por ejemplo, en matemáticas a la expresión  $+x + 2x$  se le puede realizar tratamiento y quedaría como  $+3x$ , en el que se trabaja con el registro algebraico y la modificación se realiza dentro del mismo registro (Hernández, Cervantes, Ordoñez, & García, 2017).

## **Conversión**

Duval (2005) llama conversión al conjunto de acciones que se llevan a cabo al realizar la transformación de un registro de representación en otro del mismo objeto matemático, el cual como principal característica es destacar la correspondencia que existe entre cada registro y así complementar el aprendizaje en el alumno, esta acción es llevada de forma externa al registro (San Martín, 2007).

Con base en los elementos teóricos señalados anteriormente, a continuación, se describe los elementos y la estructura del modelo teórico que proponemos en esta tesis, la cual permite la generación sistemática de Objetos de Aprendizaje Matemáticos.

### **3.2 Modelo para la generación de un Objeto de Aprendizaje Matemático**

Esta propuesta se enmarca en una línea de investigación donde se considera a un OAM desde distintas teorías de la Matemática Educativa, con base en dicha interpretación, la definición de OAM como la unidad mínima de aprendizaje queda fuera en el marco de dicha línea de investigación, pues se hace a un lado la perspectiva computacional de aprendizaje donde se toma la definición de un Byte “la unidad mínima de información” para definir un OA. Desde la perspectiva de la Matemática Educativa, la unidad mínima de aprendizaje carece de sentido y no se considera un OAM como la unidad mínima de aprendizaje más bien como una unidad que se apoya en la combinación de los REA y una teoría de la Matemática Educativa, el modelo del OAM cumple con los principios fundamentales de estos

dos sustentos, se interpreta a los OA desde la TRS de Duval permitiendo una reestructuración y resignificación de dicho objeto, dando lugar al OAM.

La combinación modifica completamente la estructura del modelo para cada teoría de la Matemática Educativa a utilizar, la resignificación del OA impacta en la estructura de dicho objeto. Por ejemplo, la TRS implica necesariamente otra estructura, la estructura del OAM-TRS, la Teoría Etnomatemática (TE) la estructura OAM-TE, y así sucesivamente con otras Teorías de la Matemática Educativa.

Para esta investigación de tesis la teoría utilizada es la de Representaciones Semióticas de Duval, el OA ya no es la unidad mínima de aprendizaje, en cada registro de representación se lleva a cabo un tratamiento matemático y didáctico el cual no está acorde a la estructura del OA.

### **3.3 Propuesta de modelo para Objetos de Aprendizaje Matemáticos**

A continuación, se muestran todos los elementos que componen el modelo propuesto diseñado para el aprendizaje de las matemáticas apoyado en la tecnología llamado OAM.

#### **3.3.1 Diseño**

A continuación, se muestra el diseño gráfico del modelo propuesto para un OAM con la TRS (ver Figura 3.1). Un OAM tiene un objetivo general el cual determina las representaciones que se utilizarán en las actividades de aprendizaje. Las actividades de aprendizaje están compuestas por 3 OA, el primero de ellos considera sólo un registro de representación, el segundo objeto de aprendizaje considera un segundo registro y el tercer objeto considera la conversión que existe entre un registro y otro o la correspondencia entre los dos registros. Aunque no se muestre en el esquema de la estructura del OAM, cada Objeto de Aprendizaje tiene un objetivo particular, el contenido, las actividades de aprendizaje y la evaluación de cada OA, corresponden a un tipo de representación semiótica del tema que se desea enseñar.



Figura 3.1 Modelo de Objeto de Aprendizaje Matemático desde la Teoría Representaciones Semióticas (OAM-TRS)

La estructura propuesta anteriormente no es la única, puede ser diseñada conforme a las necesidades de cada persona ya que existen ocasiones donde es necesario utilizar más de dos tipos de representaciones, en ese caso, la estructura cambia completamente, sin embargo, los elementos y el paso por cada registro es necesario que esté presente. El orden de los registros o representaciones que son utilizados para cada Objeto de Aprendizaje depende también del usuario. Es recomendado trabajar primero con la representación tabular, o numérica para seguir con la representación gráfica. Se trabaja de esta manera para que se logre una asociación más fácil y que sea comprendido para los alumnos.

Los OA pueden ser diseñados con el apoyo de diferentes REA, el uso de éstos nos permite obtener muchas alternativas para ser enseñado el tema. Por ejemplo, hacer uso de videos, audios, imágenes hace posible el diseño de diferentes OAM que ayude a que una persona aprenda el tema deseado.

La estructura propuesta anteriormente considera abatir la sobrecarga de información, la cual es uno de los principales problemas que se encontraron después de una revisión a los diferentes OA que están disponibles para la educación en México, ya que el descomponer el tema en sus diferentes representaciones y que exista una correspondencia entre ellos, nos permite enfrentar este problema latente en la enseñanza de las matemáticas.

Uno de los elementos esenciales para el diseño de los OA, es el contexto. Hacer uso de un contexto en las actividades de aprendizaje o en el contenido, permite que el tema tenga sentido y genere atracción para los estudiantes, que lo asocien con actividades que realizan todos los días o que conocen. Además, se apoya a las competencias y habilidades que debe de tener un alumno de diferentes niveles educativos pertenecientes al Modelo Educativo en México.

### **3.3.2 Elementos**

#### **Objetivo general**

Especificar el objetivo general que se desea cumplir por parte del estudiante. Es indispensable que se tenga en claro lo que debe aprender el alumno, a partir de esto se definen las actividades y los recursos que se utilizarán en los OAM.

#### **Actividades de aprendizaje**

Las actividades de aprendizaje están compuestas por tres OA.

#### **Objeto de aprendizaje 1 (OA1)**

Tiene un objetivo específico estrictamente relacionado con un tipo de registro de representación del tema que se quiera enseñar. Este objetivo será fundamental para el desarrollo del contenido y de las actividades, se utilizarán REA que favorezcan la enseñanza del tema en su registro de representación elegido y al final se realizará

una evaluación que apruebe si las actividades sirvieron para cumplir los objetivos propuestos al inicio del OA1.

### **Objeto de aprendizaje 2 (OA2)**

Como en el OA1 tiene un objetivo específico, contenido, actividades de aprendizaje y una evaluación, pero para este OA todo se relaciona con un segundo registro de representación semiótica del tema, los recursos utilizados apoyarán las actividades del segundo registro y la evaluación también cumplirá con este requisito.

### **Objeto de aprendizaje 3 (OA1->OA2)**

También llamado objeto de conversión, el cual tendrá los mismos elementos de los dos anteriores, objetivo, contenido, actividades de aprendizaje y evaluación, pero están dirigidos a la conversión de un registro de representación a otro, es decir, la correspondencia que existe entre cada uno de los registros que fueron utilizados en el OA1 y OA2.

En el esquema diseñado anteriormente, no muestra el elemento de objetivos, sin embargo, estos deben ser considerados por la persona que diseñe un OAM.

Para aterrizar las ideas anteriores, en la sección 2 del capítulo 5 se describe cómo se generó el OAM a partir del modelo OAM-TRS para el caso del aprendizaje de la proporcionalidad en el contexto del nivel educativo básico, secundaria.

La creación de un OAM con la TRS de Duval considerará principalmente los diferentes registros que se tienen de la proporcionalidad como lo son el gráfico, numérico, algebraico, verbal, entre otros., los recursos educativos que sean utilizados girarán en esta vertiente, es decir, diferentes REA que apoyen en el registro numérico, otros que apoyen el registro gráfico, etc.

El diseño estructural considera que una persona aprende matemáticas a partir del tratamiento en un primer registro y segundo registro y después de la conversión de un registro a otro (Duval, 1999).

# CAPÍTULO 4

## Problema, Hipótesis y preguntas de investigación



## Capítulo 4

### Problema, hipótesis, preguntas de investigación y objetivos de investigación

#### Introducción

A continuación, se describe el problema de la investigación, las hipótesis y preguntas, los cuales son el eje principal de esta investigación.

#### 4.1 Problema de investigación

Durante mucho tiempo se han desarrollado todo tipo de Recursos Educativos Abiertos (REA) destinados al apoyo tecnológico para un sin fin de disciplinas, el uso y diseño de Objetos de Aprendizaje (OA) comparten la misma estructura y siguen el mismo mecanismo de enseñanza para abordar temas de física, biología, etc., es decir, los OA no consideran las diferentes teorías exclusivas de la Matemática Educativa que nos indican cómo es que un individuo aprende matemáticas, esto es causado porque se apoyan únicamente en la Teoría Cognitiva. Además, la estructura y diseño de diferentes OA no consideran la ontología y epistemología de las matemáticas.

#### 4.2 Hipótesis de investigación

Actualmente muchas personas diseñan y proponen material multimedia, programas en plataformas o diferentes recursos que son utilizados por miles de personas para aprender matemáticas, después de diferentes investigaciones podemos afirmar que muchos de estos recursos no están diseñados bajo ningún sustento teórico por lo cual se presentan las siguientes hipótesis:

#### Hipótesis 1

En el aprendizaje del contenido de la proporcionalidad, los OA pueden ser organizados considerando elementos que provienen de la teoría de Registros Semióticos (TRS) de Duval proveniente de la Matemática Educativa.

### **Pregunta 1.1**

¿Cómo se organizan los OA para lograr el aprendizaje del contenido de proporcionalidad?

### **Pregunta 1.2**

¿Qué Recursos Educativos Abiertos (REA) ayudan a la construcción de los Objetos de Aprendizaje Matemáticos (OAM)?

## **Hipótesis 2**

El aprendizaje de los estudiantes de secundaria en el contenido de la proporcionalidad puede ser mejorado a través de la presentación organizada de OA, mediante la TRS en el llamado Objeto de Aprendizaje Matemático.

### **Pregunta 2.1**

¿Cómo ayuda el OAM al aprendizaje del tema de proporcionalidad por parte del estudiante de secundaria?, el OAM empleado como apoyo a la enseñanza presencial.

### **Pregunta 2.2**

¿Cuáles son las ventajas y desventajas de apoyar la enseñanza presencial del contenido de la proporcionalidad mediante OAM?

## **4.3 Objetivos de la investigación**

### **Objetivo general**

Caracterizar un modelo teórico - tecnológico para la enseñanza del contenido de la proporcionalidad que incorpore la organización de OA y una teoría proveniente de la Matemática Educativa, en particular la TRS de Duval.

### **Objetivos específicos**

- Analizar cómo se presenta en los textos y cómo es enseñado en el aula el contenido de proporcionalidad.
- Analizar cómo se aprende la proporcionalidad según la TRS.

- Diseñar con base en la noción de aprendizaje de la TRS y elaborar OA donde se aborde el tema de proporcionalidad en tres registros de representación.
- Organizar los OA elaborados e implementar como apoyo a la educación presencial con alumnos de tercero de secundaria.
- Analizar los resultados de la implementación y reflexionar del impacto del OAM en el aprendizaje del contenido de proporcionalidad.

# CAPÍTULO 5

## Metodología

# Capítulo 5

## Metodología

### Introducción

Para indagar cómo impacta el empleo del Objeto de Aprendizaje Matemático (OAM) en el aprendizaje de los alumnos se llevó a cabo una metodología cualitativa. Se trató de un estudio de casos en el que se exploraron las argumentaciones de un grupo de siete estudiantes una vez que trabajaron con los OAM. Dichas respuestas fueron comparadas con las de los alumnos del grupo control, conformado por doce alumnos, para poder conocer cómo y de qué manera el OAM ayudó al aprendizaje. Es importante mencionar que a partir de ahora OAM será entendido como la materialización del modelo OAM–TRS para el tema de proporcionalidad con apoyo de Recursos Educativos Abiertos. A continuación, se describen los detalles de esta metodología.

### 5.1 Participantes

En esta investigación participaron alumnos de tercer año de la Escuela Secundaria Técnica No. 1 que se encuentra ubicada en la calle Av. Mariano Jiménez #899 en el municipio de San Luis Potosí. La Secundaria Técnica No. 1 acaba de cumplir 55 años de antigüedad, el 7 de mayo de 1963 fue inaugurada con el nombre Escuela Secundaria Técnica Industrial No 57 bajo la dirección del Ingeniero Hipólito Ruíz Ramos, con 15 aulas, 6 talleres, 2 laboratorios y 265 alumnos, a partir de ese momento un sin fin de estudiantes y personal han pasado por esta institución, actualmente la secundaria se encuentra bajo la dirección del Profesor Luis Ignacio Diéguez Romero.

, 3°C y 3°E, los cuales se encontraban entre edades de 14 y 15 años. El grupo 3°C, de manera aleatoria, trabajó como grupo de control, por otra parte, el grupo 3°E participó como grupo experimental. El grupo experimental estaba compuesto en total por 21 alumnos de los cuales 13 eran hombres y 8 mujeres, el grupo control estaba compuesto por 23 alumnos, 16 hombres y 7 mujeres.

## 5.2 Diseño de la investigación

El tema designado para el diseño y desarrollo de los OAM fue la proporcionalidad, que se tomó del plan de estudios de matemáticas para alumnos de tercer año. A continuación, se presenta el esquema del diseño de la investigación.

### 5.2.1 Esquema de las etapas de aplicación del Objeto de Aprendizaje Matemático

El siguiente esquema muestra las 3 etapas en las que se aplicó la investigación, la primera de ella está relacionada con los acuerdos que se llegaron para la aplicación en la secundaria, presentados más adelante, la segunda etapa muestra la realización de los OAM, y para finalizar, la tercera etapa muestra la aplicación (ver Figura 5.1).

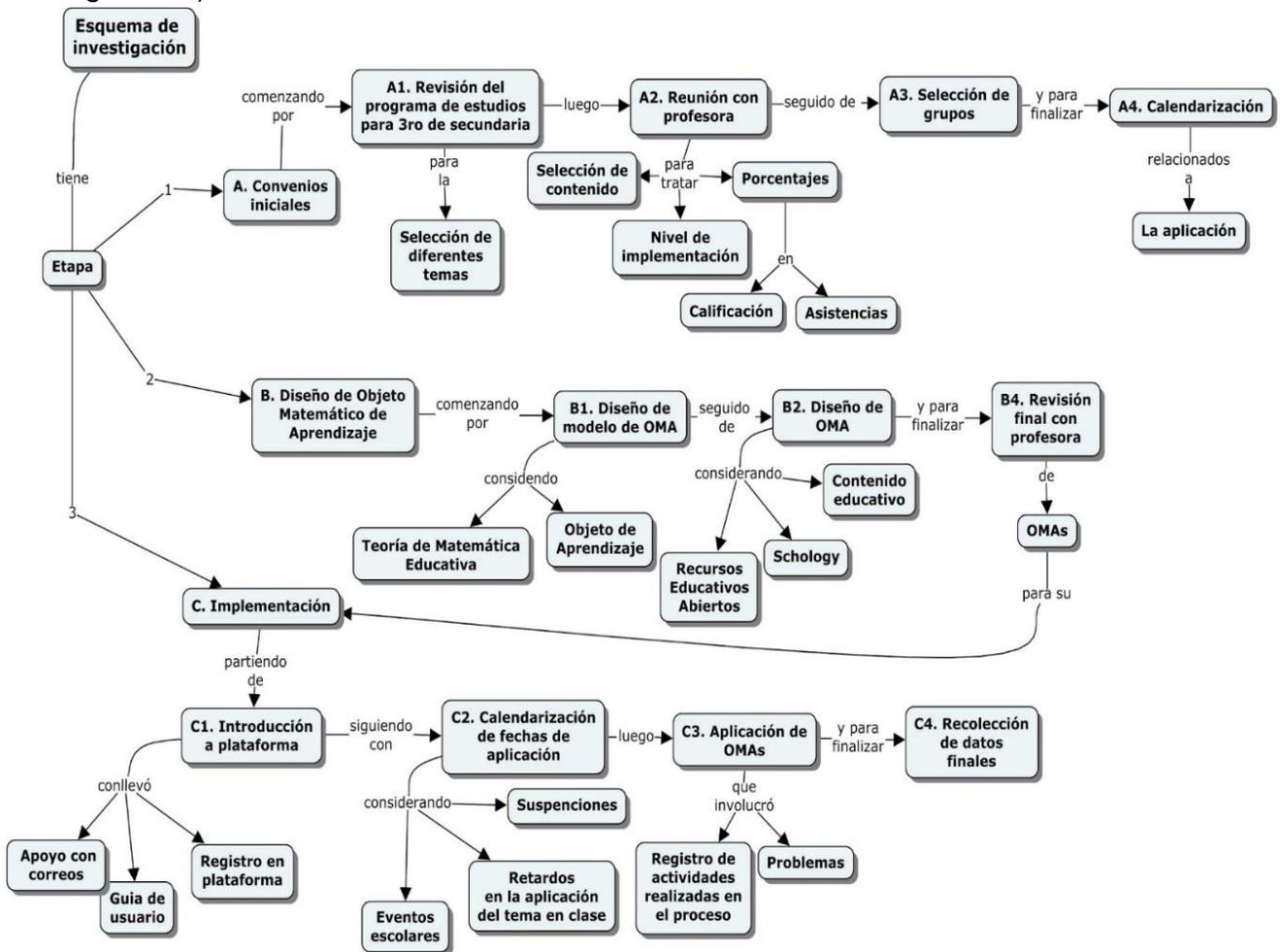


Figura 5.1 Esquema de diseño de investigación

## **Etapa 1: Convenios iniciales**

El primer paso fue investigar en el programa de estudios de la SEP (2018), cuáles temas eran los que correspondían al nivel de tercero de secundaria, se seleccionaron algunos de ellos para la realización de los OAM (ver Figura 5.1, A1), se planificó una estrategia de aplicación inicial la cual sería planteada a la profesora, dicha planificación contenía especificaciones sobre la aplicación, los tiempos aproximados de duración, el diseño de los OAM y los temas con los que se podía trabajar, etc. En un segundo momento (ver Figura 5.1, A2), se realizó una reunión con la profesora que impartía el curso en diferentes grupos del tercer año en la secundaria Técnica #1, se planteó la estrategia de desarrollo y aplicación, así como los aspectos importantes relacionados con la selección del contenido que sería utilizado el material (OAM), el nivel al que sería impartido el tema, se acordó que sería aplicado como apoyo a las clases presenciales impartidas por la profesora, también se habló sobre el porcentaje que se asignaría a los alumnos en calificación por realizar las actividades en plataforma, el cual fue de 30%. Con estas características se seleccionaron los grupos a los cuales sería aplicado el material (ver Figura 5.1, A3), el grupo C fue seleccionado como grupo experimental y el grupo B como grupo control. Para finalizar la reunión se acordó las fechas para la aplicación, considerando la calendarización que tenía la profesora para ver el tema con los estudiantes. El tema que se eligió fue la Proporcionalidad que se ubica en el bloque I, en el eje Manejo de la Información.

## **Etapa 2: Diseño de Objeto de Aprendizaje Matemático**

A partir de los resultados obtenidos de la reunión con la profesora en la etapa 1, se comenzó por el diseño de un modelo que integrara una teoría de Matemática Educativa y un Objeto de Aprendizaje (OA) (ver Figura 5.1, B1), después de una serie de investigaciones se llegó al modelo presentado en la Figura 3.1, el OAM es el resultado de este modelo nuevo para el aprendizaje por medios electrónicos. A partir de este momento se comenzó con el diseño del OAM con el tema de proporcionalidad (ver Figura 5.2). Para su diseño se consideró el nivel al que es enseñado por la profesora, el diseño de Recursos Educativos Abiertos (REA) como

videos, audios e imágenes. La estructura del OAM se alojó en Schoology (ver [www.schoology.com](http://www.schoology.com)), una plataforma educativa asemejada a una red social que permite administrar cursos, actividades y ofrece herramientas para la interacción entre los usuarios, así como la posibilidad de introducir aplicaciones externas (Ocampo, 2014), como eXe-learning, usada como apoyo en plataforma que funciona como medio para el diseño y desarrollo de material de enseñanza-aprendizaje distribuidos por medio de sitios web (Cubero, 2008).

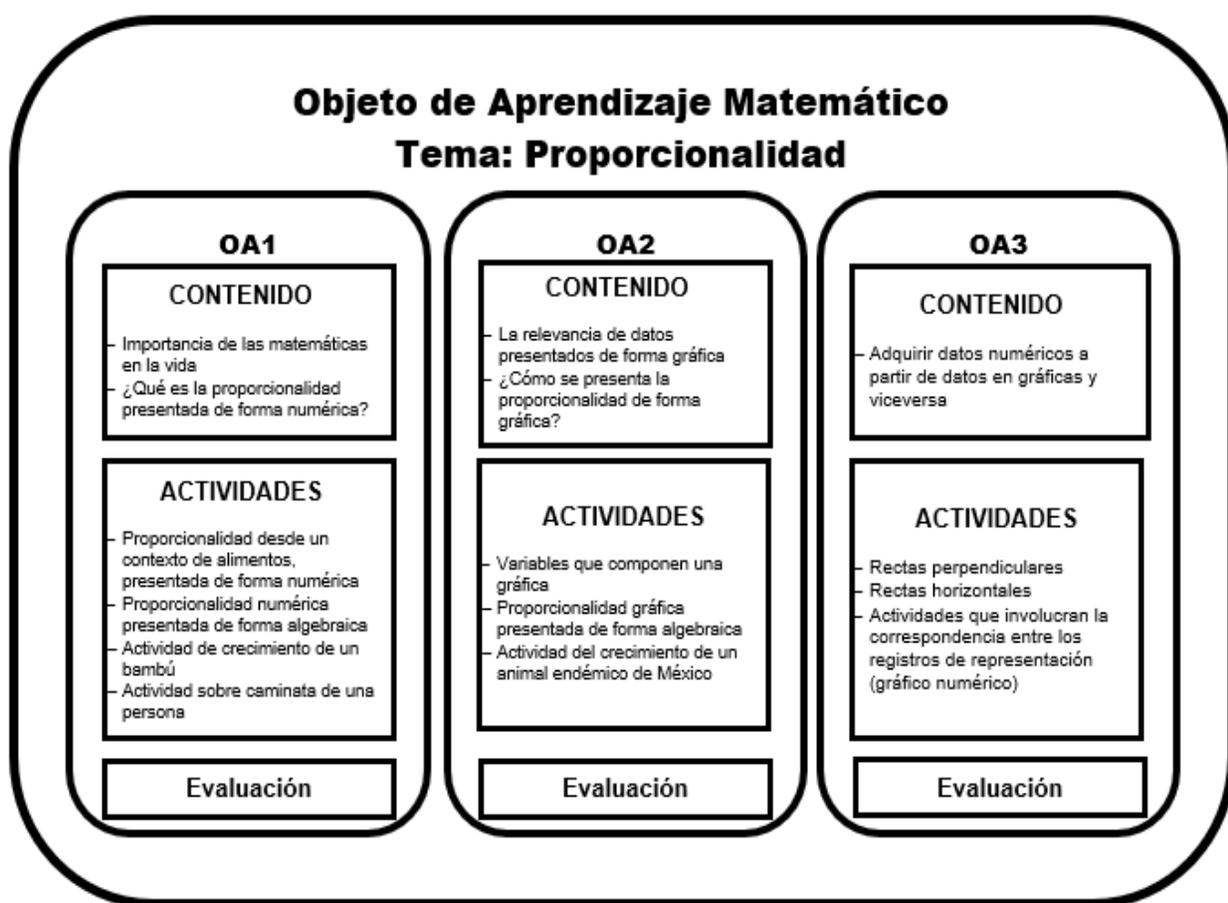


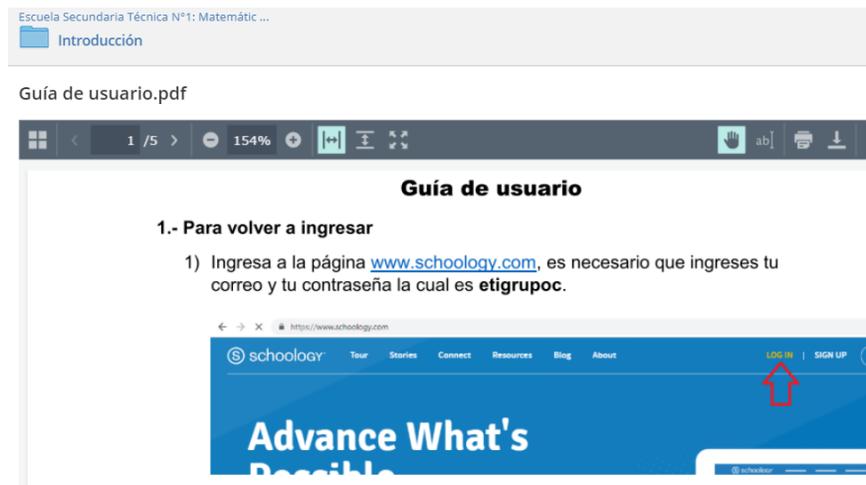
Figura 5.2 Modelo del Objeto de Aprendizaje Matemático con el tema La Proporcionalidad

Toda la estructura del OMA fue organizado en cuatro carpetas en la plataforma Schoology (ver Figura 5.3, a), la primera de ellas contiene una guía de usuario que por medio de imágenes muestra la forma de usar la plataforma (ver Figura 5.3, b).

Las siguientes tres carpetas contienen las actividades pertenecientes a los tres Objetos de Aprendizaje, al final, se muestra una evaluación final.



a)



b)

Figura 5.3 Diseño del espacio virtual Schoology

### Objeto de Aprendizaje 1 (tratamiento)

Para el primer OA se utiliza la representación numérica de la proporción, es decir, en el objetivo, el contenido, las actividades de aprendizaje y la evaluación sólo se manejan datos de forma numérica. Se puede observar la distribución de las actividades y los guiones utilizados en el primer objeto de aprendizaje en la carpeta OAM Proporcionalidad en (Ledezma, 2018), en OA numérico.

Para la presentación se utiliza un audio en donde se aborda el manejo de datos actualmente y el impacto que tiene en la sociedad, como parte del contenido se explica al estudiante por medio de un video qué es la proporcionalidad a través dos conjuntos de números (ver Figura 5.4).



Figura 5.4 Audio y video para presentación del OA numérico

Para las actividades de aprendizaje se realizaron dos videos y un video animado como recursos educativos abiertos, los dos primeros videos muestran la proporcionalidad con un ejemplo contextualizado, ambos videos están relacionados y el contexto es sobre la venta de jugos y burritos, en cada video se proponen una serie de preguntas exploratorias con las que se pretende enseñar y explicar al alumno de forma en la que todos ellos la entiendan y vean cómo se utiliza en la vida real (ver Figura 5.5).

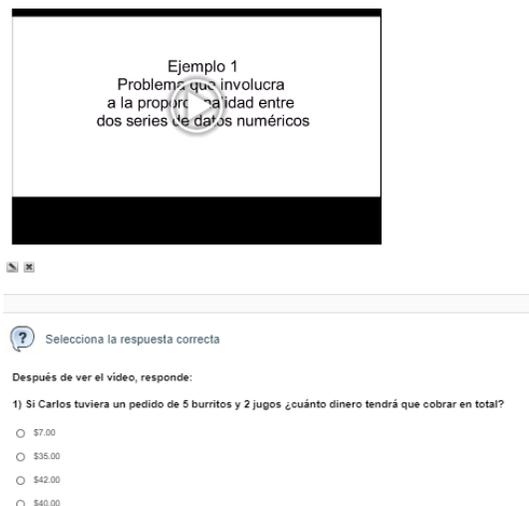


Figura 5.5 Video sobre la representación de la proporcionalidad en forma numérica

En el video animado (ver Figura 5.6), se explica la forma en la que la proporcionalidad se presenta por medio de algebra a partir de la representación numérica de la proporcionalidad (tablas), esto se realiza por los objetivos del tema en el plan de estudios de la SEP (2018), después de cada uno de estos 3 videos se plantean preguntas relacionados al tema para complementar lo aprendido.

Observa el siguiente video, en el encontrarás cómo se representa algebraicamente una relación de proporcionalidad entre dos variables.



Selecciona la respuesta correcta

1.- ¿Cuál es la fórmula general que nos permite representar algebraicamente una relación de proporcionalidad?

Superencia

$y=mx+b$

Figura 5.6 Video sobre la proporcionalidad en su forma algebraica

Para finalizar, las actividades de aprendizaje se presentan dos problemas contextualizados y uno descontextualizado, el primero de ellos está relacionado con el crecimiento de un bambú (ver Figura 5.7), la información se presenta gracias a tablas y a partir de ella se plantean preguntas, el segundo problema es sobre el recorrido que realiza una persona, la relación entre el tiempo y la distancia recorrida, al igual que en el problema anterior se presentan preguntas, por último, en tercer problema se presenta la proporcionalidad utilizando datos con números no enteros.

EL BAMBÚ  
El Bambú es considerado como una de las plantas que crecen de forma más rápida. El Bambú es originario de Australia, después de ser plantado deben pasar 4 años las que crecen hacia abajo. Al finalizar este tiempo el bambú crece de manera muy rápida y por eso que es cortado frecuentemente.



A continuación, se muestra una tabla con los datos de su crecimiento por mes de un Bambú imaginando que nunca es cortado, analiza cada uno de ellos y contesta las siguientes preguntas.

Mes	Altura (cm)
1	
2	
3	96
4	128
5	
6	192
7	
8	256



Con base en la información anterior sobre el crecimiento del bambú, contesta las siguientes preguntas

Figura 5.7 Problema contextualizado sobre el bambú

## FOROS

En el primer objeto se realizaron dos foros dentro de Schoology, el primero de ellos los alumnos deben responder las siguientes preguntas: 1) ¿Es importante el aporte que hacen las matemáticas para desarrollar modelos que integren y permitan leer información numérica que habla sobre diferentes fenómenos sociales y naturales mencionados en el audio?, ¿por qué?, 2) En tu experiencia, ¿en qué otros fenómenos sociales has notado que las matemáticas intervienen, ya sea en la lectura de información o en otras circunstancias?, se les pidió que además comentaran las respuestas de sus compañeros. En el segundo foro se pregunta: para ti ¿qué es la proporcionalidad? (ver Figura 5.8).

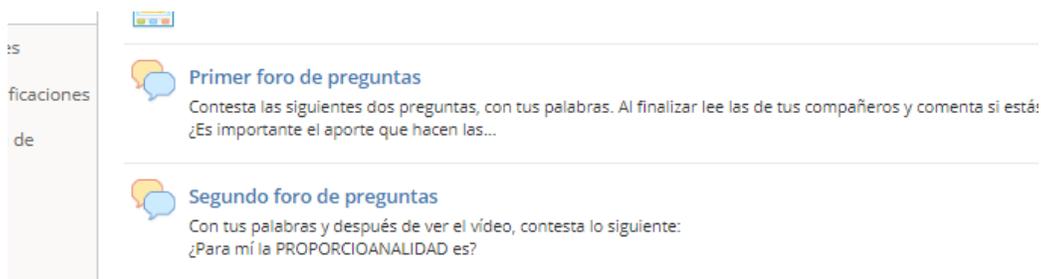


Figura 5.8 Foros en primer Objeto de Aprendizaje en el registro numérico

La evaluación para este objeto está constituida por un problema con 3 preguntas, en él se pregunta acerca de la densidad de un líquido, se pide que el alumno interprete la proporcionalidad con base en el contexto del problema y que también analicen la tabla, esta evaluación se puede observar en la carpeta OAM Proporcionalidad en (Ledezma, 2018), en OA numérico.

### **Objeto de aprendizaje 2 (tratamiento)**

Para el segundo OA, se utiliza el registro gráfico de la proporcionalidad, se busca enseñar su aplicabilidad, ventajas del uso de gráficos en diferentes contextos y el significado que tienen los elementos de la proporcionalidad en cada uno de ellos. El contenido del OA que muestra la descripción de las actividades propuestas para el segundo objeto de aprendizaje y los guiones utilizados en los videos creados para las actividades de aprendizaje se encuentran en (Ledezma, 2018), en carpeta OA gráfico.

Al inicio se presenta un video para que los alumnos encuentren importancia en el uso del registro gráfico (ver Figura 5.9), el impacto que tiene la información representada de esa forma en el mundo actual.



Figura 5.9 Introducción al registro gráfico

Para el contenido del Objeto los alumnos deben observar un video que explica cómo es que se representa la proporcionalidad en forma gráfica (ver Figura 5.10), también se analiza el significado que tiene la constante de proporcionalidad, se enfoca en resaltar que la gráfica de una relación de proporcionalidad debe cumplir dos características, ser una línea recta y comenzar en el origen del plano cartesiano, se muestran diferentes ejemplos con esta información para que el alumno comprenda las diferencias entre diferentes gráficas que cumplen alguna de las dos características mencionadas anteriormente. En el mismo video se presenta un problema sobre la relación de proporcionalidad entre el peso y volumen de un líquido, complementado con algunas preguntas para que el alumno analice líquidos con diferentes densidades.



Figura 5.10 Video de proporcionalidad en forma gráfica

Como parte de las actividades de aprendizaje se presenta un recurso para enseñar al alumno a identificar las variables (dependiente e independiente) en el plano cartesiano con un ejemplo, en este caso el del traslado de pasajeros. Continuando con las actividades de aprendizaje los alumnos deben analizar dos videos más, el primero de ellos se presenta un problema acerca de la relación entre el crecimiento del radio de un globo y el tiempo en el que se le proporcionaba aire, se presentaron unas preguntas para el análisis de este fenómeno mediante la construcción de gráficas y el cambio en el crecimiento del globo. En el tercer video se enfoca en mostrar al alumno como obtener la representación algebraica de una relación de proporcionalidad a partir de su representación gráfica, esto con el fin de cumplir los objetivos del plan de estudios actual en México para alumnos de tercero de secundaria (ver Figura 5.11). Después de cada video se pusieron a propósito dos o tres preguntas respecto a la información presenta.

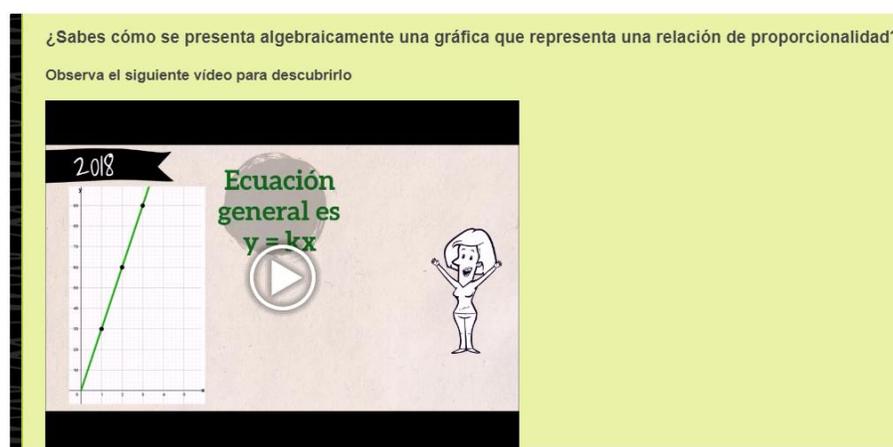


Figura 5.11 Video para la presentación algebraica de la proporcionalidad

Para finalizar las actividades de aprendizaje se presenta al alumno un problema acerca del crecimiento de una serpiente, en este problema se realizan preguntas en las que principalmente se analiza una gráfica que muestra dicho crecimiento, se involucró todo lo enseñado anteriormente (ver Figura 5.12).

Para la evaluación del objeto 2 (tratamiento gráfico) se usan dos problemas relacionados con el contexto densidad de líquidos, el primero de ellos cuenta con 3 preguntas, y se analiza sólo un líquido, en el segundo problema consiste en

observar la gráfica de dos líquidos, las preguntas buscan que los alumnos interpreten la proporcionalidad en este contexto.

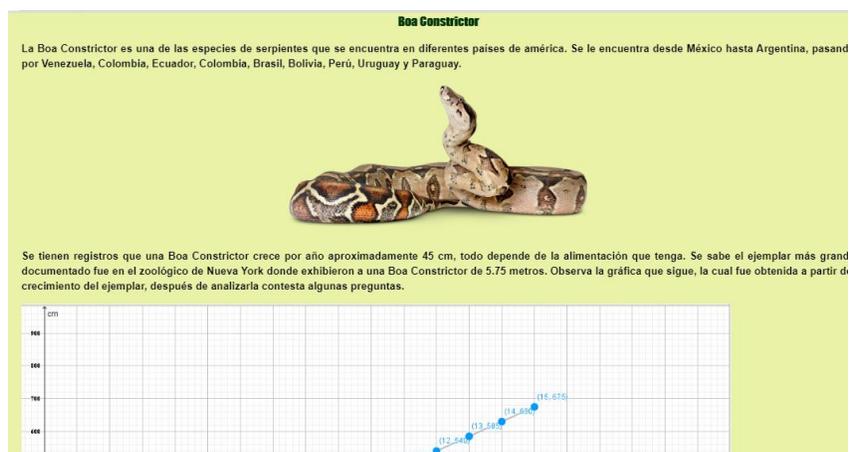


Figura 5.12 Ejemplo del crecimiento de una serpiente

### Objeto de aprendizaje 3 (conversión)

El tercer objeto de aprendizaje está diseñado para la conversión entre registros, es decir, en todas las actividades se busca explicar la relación de los elementos de la proporcionalidad en ambas representaciones (gráfica y numérica) y la correspondencia que existe entre ellas, las actividades se pueden observar en (Ledezma, 2018), en la carpeta OA Conversión.

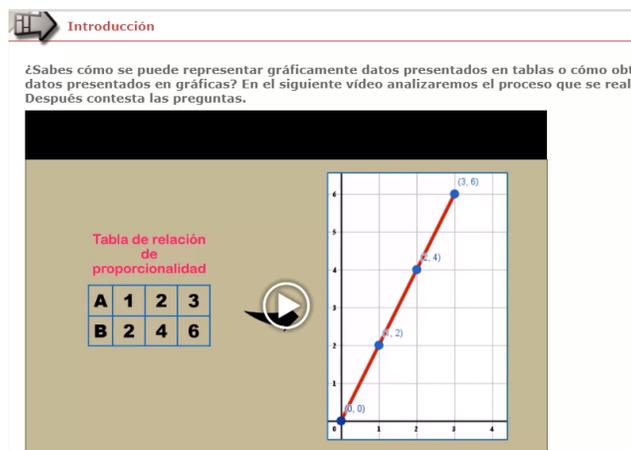


Figura 5.13 Video para la conversión gráfico-numérico

En el contenido teórico se presenta un video que explica cada uno de los elementos presentes en la proporcionalidad y que significado tienen en ambas representaciones, el video comienza con un ejemplo de datos numéricos en el que se obtienen puntos coordinados para enseñar a graficar, se menciona que se

obtiene una línea recta que comienza en el origen y que tiene una inclinación de 4, es decir, la constante de proporcionalidad. Se trabaja con lo mismo de manera inversa, se da una gráfica de proporcionalidad y al realizar un análisis se obtienen datos numéricos para llenar una tabla (ver Figura 5.13).



Figura 5.14 Video de contexto llenado de vasos

Para la primera actividad de aprendizaje se trabaja en el contexto llenado de recipientes, en el que la constante de proporcionalidad es la velocidad a la cual se vacían 2 recipientes con la misma forma geométrica (cilindro), se hacen unas preguntas en las que se explora la relación numérica y gráfica de la proporcionalidad, sin dejar de lado el significado de cada elemento en el contexto con el que se trabaja (ver Figura 5.14), en la segunda actividad de aprendizaje se continua con el mismo contexto pero en situaciones diferentes, el llenado y vaciado de un recipiente en el mismo lapso de tiempo, esta situación nos permite analizar cómo se comportan los datos numéricos y gráficos interpretados desde la proporcionalidad, el primer recipiente se llena a  $2 \text{ cm}^3/\text{s}$  mientras que el segundo se vacía a  $\frac{1}{2} \text{ cm}^3/\text{s}$ , con datos que proporciona el problema se obtiene una tabla de datos con el que se gráfica y se muestra que sólo el del recipiente que se llena es una relación de proporcionalidad, también se enseña el significado de la pendiente y cómo obtenerla cuando dos rectas son perpendiculares como en el caso del problema anterior.

En la tercera actividad de aprendizaje se trabaja en el contexto de movimiento de dos vehículos (ver Figura 5.15), los cuales se mueven a la misma velocidad, pero a

destiempo. Es decir, uno de ellos avanzó 5 kilómetros cuando se comienza a contar el tiempo, en primer lugar, se pide analizar las gráficas que resultan del movimiento de los autos, a partir de allí se enuncian las características de la proporcionalidad, pero visto desde el contexto del movimiento. Posterior a cada video mencionado anteriormente, se realizan dos preguntas que están relacionadas con el contenido visto. También se dan tres problemas, dos de ellos se trataban de la conversión entre los registros, primero del registro numérico al gráfico, después del gráfico al numérico. El tercer problema se relaciona con la interpretación de gráficas a partir de la relación que se encuentra entre la pendiente de rectas paralelas y perpendiculares, sin dejar de lado la conversión de lo gráfico a lo numérico.

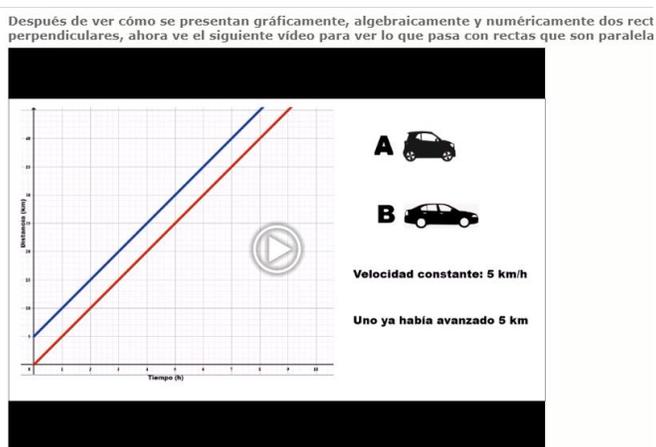


Figura 5.15 Ejemplos de video de contexto de velocidad de dos autos

En la evaluación se trabaja nuevamente en el contexto de la densidad de líquidos, se da una tabla con datos y una gráfica para analizar la correspondencia entre ellos, las preguntas de este problema se enfocan en encontrar la proporcionalidad y el significado en este contexto.

El tiempo en que se desarrolló todo el material, incluyendo la edición de videos, audios e imágenes fue de aproximadamente dos meses, el cual, incluyó el apoyo de una tabla en la que se escribió el guion y el uso de todos los elementos de los OAM que se pueden observar en (Ledezma, 2018).

Para finalizar esta etapa se realizó una segunda sesión con la maestra de la secundaria responsable de las clases de Matemáticas para mostrar el contenido

realizado, gracias a esto se modificó y se apropió al nivel manejado en los grupos. Se editó un par de videos y se cambió el contexto de uno de ellos, para finalizar la sesión se agendó la próxima sesión para completar el ingreso a la plataforma para el comienzo de las actividades.

### **Etapa 3: Implementación**

Previo a la implementación se realizó la introducción a la plataforma (ver C1 en imagen 5.1), en la que los alumnos realizaron el registro en Schoology con apoyo de su correo electrónico, para completar este paso fue necesario hacer varias sesiones con los estudiantes para que abrieran su correo en el centro de cómputo de la secundaria, ya que muchos de ellos no tenían. Después de estas sesiones se les entregó una guía de usuario que fue diseñada con el fin de que los alumnos realizaran el registro a la plataforma en su casa para la familiarización con el manejo de éste.

El siguiente paso fue la calendarización de la entrega de las actividades (ver C2 en imagen 5.1), en este paso se consideraron algunos eventos escolares ya que se realizó una kermese y además se tuvieron suspensiones laborales lo que conllevó al retardo de aplicación del tema dentro del salón de clase, esto perjudicó la aplicación del OAM ya que se pensó para llevarlo a la par que la profesora. Finalmente se aplicó la primera parte el día 29 de octubre de 2018, la segunda el 30 de octubre, la tercera y cuarta actividad el 5 de noviembre. Para la aplicación (ver C3 en imagen 5.1) fue necesario realizar un registro para ambos grupos, constó de una tabla en la que se detalló el nombre y actividad hecha, este registro se realizó a partir de las peticiones y recomendaciones de la subdirectora y profesora de la institución. Durante la aplicación existió un problema común, muchos alumnos no entraron a la plataforma en tiempo y forma, para lograr que muchos alumnos ingresaran y realizaran la actividad se dio más días, se pidió a las autoridades de la secundaria que alentaran y repitieran la importancia del ingreso. El grupo control fue quien más participó en la investigación, con un total de 12 participantes, el grupo experimental, por el contrario, solo participaron 7 alumnos. Este hecho hizo que se retrasara la recolección de datos, pero al finalizar se logró un gran resultado.

## **EVALUACIONES FINALES**

Para cada objeto de aprendizaje se realizó una evaluación, la cual, contestarían los alumnos, tanto grupo control y también grupo experimental. Estas actividades son las que registrarían algún cambio entre los dos grupos, en dichas evaluaciones no se pide al alumno que resuelva ejercicios, se desea ya interpreten la proporcionalidad en diferentes contextos y sepan justificar.

Al finalizar las actividades se realizó una última evaluación la cual se enfocó únicamente en la solución de ejercicios directos, es decir, se daban problemas en los que no se manejaba un contexto en particular, era una prueba parecida a los exámenes convencionales, (Ledezma, 2018). El objetivo de esta evaluación fue medir los resultados de la aplicación del OAM en el grupo experimental.

Para continuar con esta investigación, se muestran los resultados obtenidos de la aplicación del OAM, los cuales fueron recabados de las diferentes evaluaciones realizadas en las diferentes y etapas.

# CAPÍTULO 6

## Resultados



# Capítulo 6

## Resultados

### Introducción

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de la implementación del Objeto de Aprendizaje Matemático (OAM) para la enseñanza de la Proporcionalidad a un grupo de estudiantes de tercer año de secundaria.

Se describen los resultados de cuatro evaluaciones, tres de ellas corresponden a evaluaciones específicas de cada registro de representación (registro numérico y gráfico) y a la conversión entre ellas. La cuarta plantea una evaluación global de la conversión o significación entre registros, con la particularidad de que consideraba ejercicios propuestos en un examen típico. Cabe señalar que los resultados que se describen consideran la producción del grupo experimental, el cual trabajó con el OAM, y el grupo control, que no trabajó con dichos objetos. Cada una de las evaluaciones fueron mencionadas en la sección dos del capítulo 5.

Este capítulo se compone de cuatro secciones, la sección 1 contiene los resultados de la evaluación de los alumnos en el contexto del registro numérico, en la sección 2 se muestran los resultados de la evaluación el contexto del registro gráfico, en la sección 3, se describen los resultados de la evaluación de la conversión de los registros numérico y gráfico, es decir, la significación de un registro en términos de otro. Para finalizar, en la sección 4 se muestran los resultados de la evaluación final.

Recordemos que OAM hace referencia a la materialización del modelo OAM-TRS, es decir, a las actividades y estructura implementada a los alumnos de tercero de secundaria con el tema de la proporcionalidad.

### 6.1 Logros obtenidos en el Objeto de Aprendizaje numérico en ambos grupos

En la primera evaluación se utilizó el siguiente problema:

En Física cuando hablamos de la densidad de un líquido nos referimos a la relación que existe entre la masa y el volumen del líquido. Por ejemplo, la tabla siguiente muestra esta relación del líquido A, analízala y después contesta las preguntas.

<b>Volumen (m<sup>3</sup>)</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3.5</b>	$\frac{9}{2}$	<b>5</b>
<b>Masa (kg)</b>	<b>800</b>	<b>1600</b>	<b>2800</b>	<b>3600</b>	<b>4000</b>

Las respuestas presentadas a este problema se muestran a continuación:

**1) ¿La tabla sobre la densidad del líquido A representa una relación de proporcionalidad? Justifica tu respuesta**

Los alumnos del grupo control señalan que debe existir un número tal que al sumarlo así mismo se debe obtener los siguientes datos de la relación, por ejemplo: “Es 800 porque uno en mas es 800 y se le suma.”, por otro lado, las respuestas del grupo experimental muestran un cambio al entender que en la proporcionalidad existe un número que es multiplicado por el volumen, usado en el contexto del problema, para obtener los datos correspondientes a la relación de números, un ejemplo que muestra lo anterior es el siguiente: “Si porque los demás valores se consiguen multiplicando el valor de 800 por lo que te pidan” o también el siguiente: “Si porque si multiplicamos el numero 800 por 2 nos da a 1600”.

En el grupo control existe otra idea errónea de la proporcionalidad, ellos creen que los datos de una relación de proporcionalidad deben estar escritos de forma consecutiva, por ejemplo 1, 2, 3, etc. Lo anterior lo muestran los siguientes comentarios: “No, porque va en proporción por ejemplo si fuera igual se le seguiría poniendo 3 no 3.5 eso fue lo que cambió la proporcionalidad”, o también “Si, porque sus cantidades son consecutivas”.

Para finalizar, se puede encontrar una diferencia en la forma en la que los alumnos justifican sus respuestas, por ejemplo, el uso de las variables del contexto y la significación en la proporcionalidad, esto es visible en los siguientes comentarios, el primero de ellos es del grupo experimental y el segundo del grupo control: 1) “Si, porque se trata de la relación de dos cifras (masa, volumen) y de esas dos se puede

sacar otra (densidad) empleando un procedimiento”, 2) “Si pues va aumentando de acuerdo con la constante”.

## **2) ¿Tiene constante de proporcionalidad?, ¿por qué? Justifica tus respuestas**

La mayor cantidad de alumnos del grupo experimental encontraron la constante de proporcionalidad, a comparación del grupo control donde pocos lograron encontrar la respuesta correcta. Solo dentro de las respuestas del grupo experimental, existen algunas que mencionan que la constante de proporcionalidad es densidad del líquido en el contexto, por ejemplo, el siguiente: “Si, porque si se divide la masa sobre el volumen, da como resultado la densidad  $R=800$ ”, ningún comentario como este fue encontrado en las respuestas del grupo control.

Por otro lado, se siguen mostrando comentarios sobre la idea falsa de la proporcionalidad y cantidades que deben ser sumadas, un ejemplo de este suceso es el siguiente: “No tiene constante, no aumenta como si se estuviera sumando  $800+800$ ”, este tipo de creencia no es mostrado por el grupo experimental para esta pregunta.

La forma en la que los alumnos del grupo experimental justifican esta pregunta muestran mayor control del contexto, por ejemplo la siguiente: “Si, por que las cantidades de B se pueden obtener multiplicando las diferentes cantidades de A sacadas con la constante que es de 800 sobre las demás cantidades”, al contrario comentarios como “Si por que en todas se le van aumentado 800 o multiplicando esa cantidad”, cabe mencionar que las dos preguntas son correctas, sin embargo, los argumentos utilizados son diferentes.

En esta pregunta el grupo control sigue mostrando el problema sobre las cantidades consecutivas, atribuyendo esa característica principal a la proporcionalidad, “Sí, son consecutivas”.

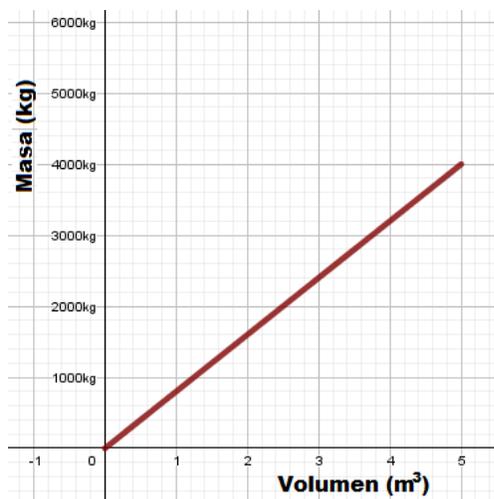
## **3) ¿Qué significado tiene la constante de proporcionalidad en el contexto del problema?**

Las respuestas para esta pregunta fueron muy variadas, se puede pensar que fue interpretada de diferente forma por todos ellos, todas son correctas ya que es la manera en la que ellos describen lo que entienden por constante de proporcionalidad, algunos de ellos consideran el contexto del problema, sin embargo, en el grupo control sigue evidenciando el problema con la constante sumada y no multiplicada, un ejemplo de esto en esta pregunta es: “*Es lo que se tiene que sumar o restar según sea el volumen*”.

## 6.2 Respuestas después de la aplicación del Objeto de Aprendizaje con representación de la proporcionalidad a través de gráficos

Para la evaluación del tratamiento en el registro gráfico se aplicó el siguiente problema:

*En Física, el uso de gráficas sirve para analizar diferentes fenómenos por ejemplo el analizado anteriormente con la densidad de diferentes líquidos, la gráfica del líquido A se muestra a continuación*



Las respuestas a las preguntas del problema se presentan a continuación:

### 1) ¿Qué significa la inclinación de la gráfica?

En las respuestas a esta pregunta se logró percibir una diferencia entre el grupo experimental y control, mientras que el grupo experimental relacionaba la inclinación con la densidad y la constante, algunos alumnos del grupo control interpretaba la inclinación como la pendiente de la recta (siendo sinónimos) y otros como la

densidad. En el grupo experimental se tienen respuestas como las siguientes, por un lado, considerando el contexto: *“Es la densidad”*, y por el otro: *“La constante, ya que es la medida con la que se sacan los datos de la gráfica”*. Del grupo control se tuvieron respuestas similares a las del grupo experimental, ya que de igual manera consideraban el contexto: *“La densidad de algún líquido”*, y escribieron que la inclinación es la pendiente de la gráfica. Unos ejemplos de lo anterior se muestran a continuación *“Significa la pendiente”*, *“Se le conoce como pendiente y es la que te indica cuanto crece o disminuye un determinado valor en función del otro”*.

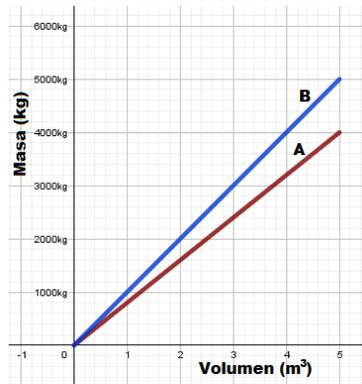
## **2) ¿Esta gráfica representa una relación de proporcionalidad? ¿Por qué?**

En las respuestas de esta pregunta algunos de los alumnos del grupo control describieron la gráfica y no indicaron una relación de proporcionalidad, es decir, dicen algunos elementos (volumen y masa), que va creciendo de 1000 en 1000, etc., algunos ejemplos de lo anterior son los siguientes: *“Mide la masa y el volumen en una gráfica y cuánto vale cada volumen”*, *“Porque va subiendo de 1000 en 1000”*, *“Está poniendo masa y volumen”*, como se puede notar, estos comentarios no consideran las características de una relación de proporcionalidad.

En esta pregunta se sigue mostrando el problema con alumnos del grupo control en el que para ellos es necesario que los datos sean consecutivos para ser una relación de proporcionalidad, este hecho se puede mostrar en el siguiente comentario: *“Si, porque tiene cantidades consecutivas”*.

Por otro lado, los alumnos del grupo experimental obtuvieron las siguientes respuestas, la primera de ellas tiene que ver con las características que toda gráfica de una relación de proporcionalidad cumple, es decir, una línea recta que parte del origen: *“Si, por que la recta se produce del origen”*, *“Si, ya que la recta inicia del origen”*, entre otras, pero también se ven comentarios en el grupo que muestran a los alumnos describiendo una gráfica, por ejemplo: *“Porque nos indica lo que mide la masa por volumen”*

3) Si graficamos otro líquido (líquido B) que se muestra en la imagen de la gráfica 2, ¿Qué nos dice las diferentes inclinaciones de ambas rectas? Justifica tu respuesta



En esta pregunta los alumnos mostraron diferentes puntos de vista, en el grupo control consideran la diferencia de proporcionalidad como un cambio en la masa y en el volumen, por ejemplo: “*Que ambos líquidos cuentan con diferentes masas y diferente volumen*”, o también solo describen la gráfica sin considerar la diferencia entre las rectas, en el siguiente comentario se muestra: “*Indican la densidad del líquido A y B respectivamente*”.

La mayoría de los alumnos del grupo experimental sí consideraron el contexto del problema y describieron su respuesta apoyándose en la diferencia de densidades de las rectas o de masas en un mismo volumen. Algunos ejemplos son mostrados a continuación: “*que una tiene mayor masa y volumen que a la anterior*”, “*la densidad, ya que mientras más se incline a la izquierda, más denso será el líquido*”.

4) ¿Cuál líquido tiene mayor densidad? ¿Por qué?

La mayoría de los alumnos del grupo control justifican su respuesta utilizando solo la variable masa, es decir, los resultados de las personas que acertaron dicen que el líquido B tiene mayor masa que el líquido A, algunos de ellos incluso la mencionan (5000 kg), por ejemplo: “*B, porque cuenta con mayor masa*”, “*El líquido B, porque hay mayor cantidad de masa que en el líquido A*”. A diferencia del grupo control, los participantes del grupo experimental consideran diferentes características que justifican la diferencia de densidad, por ejemplo, las masas de los líquidos y la

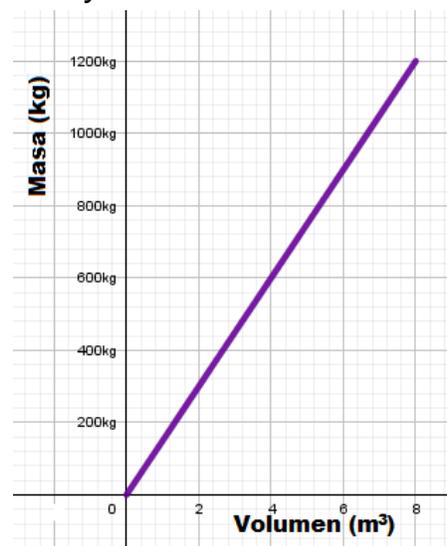
inclinación de las gráficas, como en el comentario que se muestra a continuación: “B, porque está más inclinado”, “B porque tiene mayor densidad que la A”, “B, porque al tener distintas densidades los líquidos A y B, la masa cambia y la que tiene mayor masa es la que tiene más densidad”.

### 6.3 Efecto de la aplicación del Objeto de Aprendizaje de la conversión de registros

Para evaluar el OA de la conversión de registros se utilizó el siguiente problema, el contexto usado sigue siendo las densidades de líquidos, en este problema se presentaron dos relaciones de datos diferentes, en el que uno de ellos no representaba una relación de proporcionalidad.

Carlos es encargado del laboratorio de Física en la escuela, por error los datos de los líquidos fueron revueltos, ayuda a verificar si los datos gráficos y en tablas corresponden al mismo líquido, ya que sólo se tenían líquidos con densidades diferentes entre sí. Analiza la siguiente gráfica y tabla para ayudar a Carlos.

<b>Volumen (m<sup>3</sup>)</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b><math>\frac{15}{4}</math></b>	<b>7.5</b>
<b>Masa (kg)</b>	<b>150</b>	<b>300</b>	<b>562.5</b>	<b><math>\frac{2250}{4}</math></b>



1) ¿Los datos de la tabla y la gráfica representan al mismo líquido? ¿Por qué?

Para esta pregunta, la mayoría de los alumnos del grupo experimental contestaron que los datos presentados en el problema no correspondían, es decir, no

representan la misma información, y describieron un ejemplo en el que la masa era diferente en volúmenes iguales, por ejemplo: *“No, porque no coinciden en la masa y el volumen. En donde hay  $2\text{m}^3$  la tabla muestra que deberían ser 150 kg y en la gráfica muestra que son 300 kg”*.

Por el contrario, las respuestas de los alumnos del grupo control fueron variadas, la mitad de ellos contestaron que las dos representaciones significaban lo mismo, esto se refleja en el siguiente comentario: *“Si, porque lo único que cambia son como están representadas y porque al último los dos te dan a conocer el mismo resultado”*, las personas que responden que no corresponden a los mismos datos lo hacen de forma general, es decir, solo dicen que los datos no son iguales pero no dan un ejemplo como el grupo experimental, algunos de ellos culpan a la gráfica de no estar colocada correctamente, por ejemplo: *“No, porque los datos tanto del volumen como de la masa que están representados en la tabla no concuerdan con los datos de la gráfica, o sea no son los mismos”*, y, *“No porque los datos están mal en la gráfica”*.

## **2) ¿La gráfica representa una relación de proporcionalidad? Justifica**

Las respuestas del grupo experimental se dividen en tres, un conjunto de alumnos mencionan que la gráfica si representa una relación de proporcionalidad porque comienza en el origen y es una recta, el otro conjunto menciona que sí es una relación de proporcionalidad porque las variables crecen proporcionalmente, un ejemplo se describe a continuación *“Si, por que cada que el volumen aumenta también aumenta proporcionalmente la masa”*, el último grupo se limita a escribir si o no.

Por otro lado, el grupo control respondió negativo a la pregunta, su justificación fue que las cantidades de masa y volumen no crecían a la misma proporción, *“No, porque a pesar de que tanto la masa como el volumen van en aumento, la masa no aumenta en la misma proporción”*, o también comentaron que la gráfica no *“era buena”* para representar una relación de proporcionalidad. En las respuestas afirmativas, los alumnos concluyeron que la gráfica representaba proporcionalidad porque para ellos lleva un promedio que permite crecer a la gráfica, esto se muestra a continuación: *“Si, porque lleva un promedio de proporcionalidad que va*

*aumentando de 300 en 300*", para otros de ellos, la gráfica tiene datos congruentes, que son interpretados como la división de cada dato y su correspondencia. Algunos de los participantes de este grupo describen la gráfica de forma general, por ejemplo: *"Si, porque son consecutivas"*, *"Si, porque de masa es 1200 y volumen es de 8"*. Pocos participantes mencionan que la representación gráfica es proporcional porque es una recta.

### **3) ¿La tabla corresponde a una relación de proporcionalidad? Justifica**

Esta pregunta fue contestada erróneamente por todos los alumnos del grupo control, ya que los datos presentados en la tabla no representan una relación de proporcionalidad, la forma en la que ellos justifican sus respuestas está basado en la descripción de la relación entre las variables, volumen y masa, por ejemplo, uno de ellos menciona que si es proporcional porque la masa y el volumen crecen proporcionalmente, un ejemplo de lo anterior se muestra aquí *"Sí, porque los datos que presenta la tabla, tanto de la masa como del volumen incrementan proporcionalmente"*, otros de ellos mencionan que la gráfica coincide con los datos de la tabla y por eso es proporcionalidad.

En el grupo experimental se dividen en dos grupos, los que dijeron que sí y los que no, dentro de los que dijeron que sí, justifican al decir que su constante de proporcionalidad es 75 ya que es el número con el que se obtienen los datos, *"Si, ya que si multiplicamos la cantidad 1 que es 75 por el número que pidan nos lo dará"*, los que respondieron que no, defienden su respuesta porque los datos no son proporcionales y porque los datos los encuentran revueltos, *"no, porque los datos están revueltos y algunos datos no corresponden a los que deberían ser"*.

### **4) ¿Cuál es la densidad del líquido que representa la tabla? ¿Cómo sabes este dato?**

Las respuestas de la mayoría de los alumnos de ambos grupos muestran que saben obtener la constante de proporcionalidad o la densidad de datos numéricos presentados en tablas, sin embargo, la densidad no se cumple para todos los datos, los alumnos del grupo experimental mencionan, en su mayoría, que las cantidades

de la tabla deben ser divididos para obtener este dato, por ejemplo, *“75 al dividir la masa sobre el volumen”*. Algunos otros mencionan multiplicar los datos por 75 y así se obtiene el resto. Pocos no saben cómo obtener el dato y uno de ellos propuso que la densidad es igual  $y=150x$ .

En el grupo control también hay alumnos que explican que la densidad es obtenida al dividir la masa entre el volumen, *“75, porque apliqué la fórmula para sacar la densidad que es dividir la cantidad de masa entre el volumen”*, en el mismo grupo algunos alumnos no encuentran un resultado, solo describen lo que significa la densidad, un ejemplo de esto son los siguientes comentarios hechos por alumnos del grupo control: *“Es por lo que se aumenta”, “masa y volumen”*. Uno de los alumnos del este grupo confunde la densidad con el primer valor de la tabla, es decir, su respuesta fue 2.

**5) ¿Cuál es la densidad del líquido que representa la gráfica? ¿Cómo sabes este dato?**

Las respuestas del grupo control son difíciles de agrupar ya que presentan diferentes ideas de la forma en la que se obtiene la densidad del líquido, algunos de ellos mencionan que se debe de dividir, como el comentario siguiente: *“0.25 se dividen los datos de la tabla según su lugar en donde está el líquido”*, sin embargo, dividió mal las cantidades, otro de ellos escribe: *“125 se divide la masa por el volumen”*. En el mismo grupo existen personas que la densidad se obtiene al sumar las densidades, otro de ellos menciona que se obtiene por la pendiente de la gráfica *“150, porque se calculó donde llegaba la pendiente en cada uno de los datos que representan el volumen para poder sacar la masa, y después se dividió ésta entre el volumen para así sacar la densidad”*. Sus respuestas son muy ambiguas, no permiten agruparlas ya que no comparten características en común.

En el grupo experimental, algunos alumnos respondieron que no sabían cómo obtener el dato, los demás, expresan que la densidad es obtenida a partir de la división de la masa y el volumen como el siguiente: *“150 se encuentra al dividir la masa sobre el volumen”*, algunos otros mencionan que es obtenida al saber la inclinación de la recta que representa la relación de proporcionalidad.

## 6.4 Evaluación final

Esta evaluación se llevó a cabo a ambos grupos, en él se realizaron preguntas en las que solo se aceptó una respuesta, de esta evaluación los resultados se mostraron en las siguientes gráficas, los alumnos que contestaron esta evaluación fueron los mismos que realizaron las actividades anteriores. La gráfica representa la normalización entre la cantidad de aciertos entre la cantidad de participantes, se realizó esta operación ya que la cantidad de alumnos que participaron en la implementación fueron diferentes entre el grupo control y experimental. El color rojo pertenece al resultado del grupo control y la azul al grupo experimental. El eje de las X representa el número de pregunta y en el eje de las Y se encuentra la cantidad de alumnos que respondieron correctamente. La cantidad de alumnos que contestaron al finalizar la actividad fueron 12 del grupo control y 7 del grupo experimental.

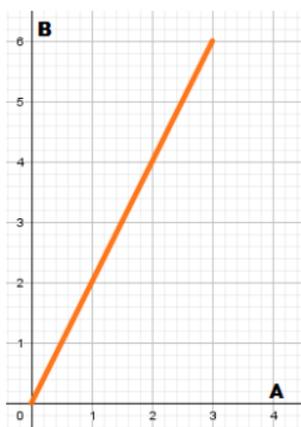
Las preguntas son las siguientes:

***Dada la siguiente tabla con información, contesta las siguientes preguntas***

x	y
0	0
2.5	17.5
3	21
5	$\frac{70}{2}$

- 1) *¿Cuál es la constante de proporcionalidad que presenta la tabla anterior?*
- 2) *¿Cuál es la ecuación que genera la tabla anterior que representa una relación de proporcionalidad?*

***Dada la siguiente gráfica determina lo que se pide***



- 3) *¿La gráfica 1 representa una relación de proporcionalidad?*
- 4) *¿Cuál es la constante de proporcionalidad o la inclinación de la gráfica?*
- 5) *¿Cuál es la ecuación que genera la gráfica 1?*

**Ricardo es conductor de un autobús, esta mañana hizo un recorrido por carretera a una velocidad constante. El registro de su recorrido se muestra en la siguiente tabla, analiza los datos y contesta las preguntas.**

Tabla 2

<b>Tiempo (horas)</b>	<b>2</b>	<b>2.5</b>	<b>3</b>	<b>4.5</b>	<b>5</b>
<b>Distancia (km)</b>	<b>220</b>	<b>275</b>	<b>330</b>	<b>495</b>	<b>550</b>

- 6) *¿A qué velocidad constante manejó Ricardo?*
- 7) *¿Cuál es la constante de proporcionalidad que muestra la tabla de datos 2 de la distancia que recorrió Ricardo?*
- 8) *¿La constante de proporcionalidad se interpreta como la velocidad a la que se movió Ricardo?*
- 9) *Observa las gráficas debajo y selecciona la que corresponda a los datos presentados en la tabla 2.*

**10) Dada la siguiente tabla, encuentra los valores que hacen falta para que esté completa.** Tabla 3

<b>A</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3.5</b>	<b>¿?</b>	<b>6</b>
<b>B</b>	<b>¿?</b>	<b>55</b>	<b>96.25</b>	<b>123.75</b>	<b>¿?</b>

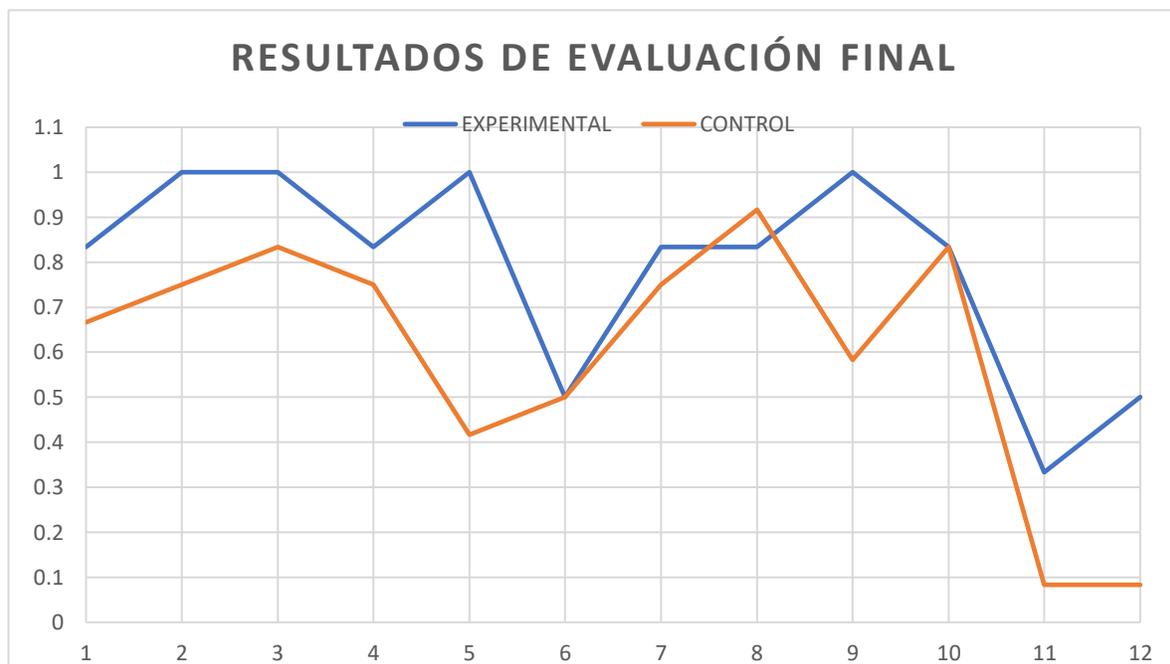
**11) ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la de una recta paralela a la recta que muestra una relación de proporcionalidad en la gráfica 2?**



**12) Dadas las siguientes ecuaciones, selecciona aquella que sea perpendicular a la recta  $y = 3x$**

Podemos observar que el grupo experimental obtuvo mejores resultados en las preguntas 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11 y 12, la primera y segunda pregunta tienen que ver con la interpretación de información de forma gráfica, la tercera, cuarta y quinta pregunta se relacionan con la interpretación de información de forma gráfica, la pregunta siete y ocho se relacionan con la interpretación de la constante de proporcionalidad en un contexto dado y por último las preguntas 11 y 12 tiene que

ver con la proporcionalidad de forma gráfica y su relación con rectas paralelas y perpendiculares.



Grafica de resultados de evaluación final

En las preguntas 6 y 10, la cantidad de respuestas fueron iguales en ambos grupos, en la pregunta seis el alumno debía encontrar la velocidad a partir de la interpretación de información numérica. En la pregunta diez los alumnos debían completar información presentada en una tabla.

En la pregunta 8 notablemente los alumnos del grupo control obtuvieron mayor cantidad de aciertos, esta pregunta cuestiona a los alumnos sobre la interpretación de la constante de proporcionalidad en un contexto dado.

Ya que fueron presentados todos los resultados obtenidos por los grupos, a continuación, se presenta el análisis y discusión de los resultados.

# CAPÍTULO 7

## Análisis y discusión

---

# Capítulo 7

## Análisis y discusión

### Introducción

A continuación, se presentan el análisis y la discusión de los resultados obtenidos de la implementación de un nuevo modelo para el aprendizaje tecnológico de las matemáticas llamado Objeto de Aprendizaje Matemático (OAM) con el tema de proporcionalidad, el cual se imparte a alumnos de tercer año de secundaria. En este análisis se utiliza como marco teórico la Teoría de Representaciones Semióticas (TRS) de Duval para explicar algunos fenómenos que se obtuvieron en la investigación en ambos grupos. Es importante destacar que el marco teórico que sustenta el modelo de OAM también constituye un referente teórico para analizar los resultados de la implementación del recurso tecnológico OAM y contribuye a la realización de mejoras.

El análisis se basa en el reconocimiento de la significación, a través de los argumentos que enuncian los alumnos, que se da a la proporcionalidad en los diferentes contextos planteados en las actividades del OAM, además, hace énfasis en la identificación del concepto de proporcionalidad en diferentes representaciones y la correspondencia entre ellas.

El capítulo está dividido en cuatro sesiones, la primera sesión corresponde al análisis de los resultados obtenidos en la primera evaluación para el Objeto de Aprendizaje (OA) con el registro de representación numérico. La segunda sesión muestra el análisis y discusión de los resultados para el OA con el registro gráfico, la tercera sesión el análisis para los resultados del OA de la conversión entre los registros numérico y gráfico y, por último, la cuarta sesión muestra el análisis de las respuestas obtenidas en la evaluación final.

## **7.1 Interpretación de los resultados obtenidos en el Objeto de Aprendizaje que usa la representación numérica**

Esta evaluación está conformada por 3 preguntas que resultan de un problema en el contexto de densidad en diferentes líquidos, la información fue presentada solo con elementos numéricos, es decir, se presenta el problema y los datos del problema se presentan en una tabla.

La primera pregunta nos muestra que los alumnos del grupo experimental son los que utilizan las unidades de medida del problema para argumentar la pregunta, los alumnos de control solo lo mencionan como una cantidad específica, como 500 o 300, además, se pudo notar que los alumnos del grupo control realizan un tratamiento matemático en que se interpreta a la proporcionalidad como una cantidad que debe ser sumada y no como una constante necesaria para obtener un dato, esto se muestra en el capítulo anterior con el siguiente comentario “*Es 800 porque uno en mas es 800 y se le suma.*”, según Duval (1999) existe una formación errónea de la representación simbólica de la proporcionalidad en el grupo control. En el grupo experimental no se muestra este fenómeno, todos ellos utilizaron la multiplicación para justificar su respuesta, es decir, existe una buena formación del significado de proporcionalidad.

En la segunda pregunta se sigue notando que los alumnos del grupo control argumentan que la constante de proporcionalidad es una cantidad que se suma, la mayoría de los alumnos del grupo experimental mencionan que es 800. Cuando analizamos la forma en la que los alumnos argumentan sus respuestas, es notable como utilizan nuevamente los datos del problema.

La tercera y última pregunta de esta evaluación acerca del significado que tiene la constante en el contexto del problema, muy pocos alumnos lograron responder la pregunta correctamente, dichos alumnos fueron del grupo experimental, esto es explicado por Duval como el tratamiento que se da en el registro de representación, ya que el significado es transformado, pero representa lo mismo.

En general, se pudo notar que los alumnos del grupo experimental lograron un cambio en la forma de argumentar la proporcionalidad utilizando elementos (variables) del contexto en el problema, además lograron comprender la definición de la constante de proporcionalidad de manera correcta, completando las primeras actividades fundamentales de la TRS.

## **7.2 Interpretación de los datos alcanzados de la aplicación del Objeto de Aprendizaje de registro de representación gráfica**

La evaluación está formada por 4 preguntas en las que la información es presentada de forma gráfica, las cuatro preguntas forman parte de un problema de aplicación el cual está diseñado con el contexto de la densidad de diferentes líquidos.

La primera pregunta muestra que dentro de ambos grupos existen diferentes concepciones que se tiene del significado de la inclinación de una recta; densidad, pendiente, proporcionalidad, entre otros, la diferencia que existe entre ambos grupos fue que el grupo control no relaciona la inclinación de la recta con la proporcionalidad o con el contexto del problema, ya que en su mayoría las respuestas del grupo control respondieron pendiente. Por caso contrario, el grupo experimental logró comprender la inclinación de la recta como una propiedad de la proporcionalidad y la densidad (contexto), según Duval (1993) se está realizando un tratamiento dentro del mismo registro de representación, pero utilizando los diferentes significados que puede tener una recta.

En la segunda pregunta es notable cómo los alumnos del grupo experimental argumentan de manera adecuada la representación de la proporcionalidad de forma gráfica, ya que todos los alumnos del grupo experimental identifican elementos necesarios (recta en el origen) de una relación de proporcionalidad representada de forma gráfica, es decir, comprenden y hacen un tratamiento adecuado del registro de representación gráfica.

En la tercera pregunta es necesario que los alumnos comparen la inclinación de densidades y que analicen el significado de la diferencia entre ellas, la pregunta está relacionada con el tratamiento que se hace en el registro de representación gráfico,

es decir, se realizan transformaciones con el fin de que el alumno logre comparar la información en el mismo registro de representación (tratamiento). Pocos alumnos del grupo control respondieron correctamente, por otro lado, la mayor cantidad de alumnos del grupo experimental contestaron correctamente, esto nos indica que los alumnos hacen una buena formación al representar la proporcionalidad en el registro de representación gráfico y también logran realizar un tratamiento, lo cual sugiere la TRS como los primeros pasos para la construcción del aprendizaje matemático, en este caso, la proporcionalidad.

En la cuarta y última pregunta se busca que el alumno dé un argumento válido por el cual una de las densidades es mayor que otra, las respuestas de los alumnos del grupo control mostraron que no saben interpretar la información presentada de forma gráfica ya que nunca mencionan características de la recta, como las diferentes inclinaciones, además este grupo no consideran los elementos que involucra el contexto del problema (masa y volumen), la mayoría de ellos solo utilizan la masa para responder y dejan de lado el significado del elemento volumen. Es decir,

### **7.3 La interpretación de resultados entre conversión de registros numérico y gráfico**

Para esta evaluación se trabajó en el mismo contexto, pero con la conversión de registros mencionados anteriormente, numérico y gráfico, en esta evaluación se busca que el alumno comprenda el significado y la correspondencia que existe entre los elementos de la proporcionalidad en un registro y otro.

La primera pregunta se presenta con la finalidad de que los alumnos confronten ambas relaciones y determinen si representan la misma información, en el problema no representan lo mismo y es lo que se espera que el alumno responda. Es evidente que la mayoría de los alumnos del grupo experimental lograron realizar una conversión entre ambos registros de representación (numérica y gráfica) y se dieron cuenta que los datos no correspondían, es decir, lograron comparar los datos presentados en diferentes registros de representación y concluyeron que los datos no coincidían, como lo indica la TRS podemos asumir que los alumnos lograron

aprender la proporcionalidad con apoyo de ambos registros de representación y la conversión entre ellos. Muy pocos alumnos del grupo control lograron encontrar que la tabla de números y la gráfica no correspondían.

En la segunda pregunta se pretende que los alumnos analicen sí los datos presentados en la gráfica, exponen una relación de proporcionalidad, los resultados obtenidos muestran que pocos alumnos del grupo control saben analizar una gráfica de proporcionalidad, sus argumentos están basados en la descripción numérica de los datos y, por otro lado, los alumnos del grupo experimental analizan y argumentan con los elementos de una gráfica que representa proporcionalidad. Es decir, se muestra que los alumnos del grupo control no tienen un buen manejo de los registros de representación y como lo indica Duval (2004) esto no es favorable para el aprendizaje de la proporcionalidad.

En la tercera pregunta los datos presentados no representaban una relación de proporcionalidad, y aun así todos los alumnos del grupo control escribieron que sí la representaba, este error puede darse si los alumnos no analizaron todos los datos de la tabla. En la pregunta anterior, se muestra que no tienen dominio de la proporcionalidad que es presentada de forma numérica. Por otro lado, la mayoría de los alumnos del grupo experimental mostraron mayor control del registro numérico en esta pregunta.

En la quinta y última pregunta de esta evaluación, el alumno debe analizar y encontrar de forma gráfica la densidad que representa el líquido. Para esta pregunta se notó que los alumnos del grupo experimental lograron justificar sus respuestas basados en la estructura de la recta que representaba la relación de proporcionalidad, a comparación del grupo control que sólo un estudiante logró identificar esta característica. Se debe destacar que la mayoría de los participantes del grupo experimental supieron obtener la densidad dividiendo la masa entre el volumen,

En general, se obtuvieron buenos resultados por parte del grupo experimental, sin embargo, en algunas respuestas de ambos grupos solo escribían “sí” o “no”.

#### **7.4 Interpretación de evaluación final**

La evaluación final fue pensada para que los alumnos demuestren sus capacidades para resolver ejercicios que son normalmente puestos en exámenes, por ejemplo, obtener una constante de proporcionalidad. Después de revisar los resultados, se encontró gran diferencia en las primeras preguntas, las dos primeras preguntas nos indican que los alumnos del grupo experimental salieron con mejor puntaje para obtener la proporcionalidad de datos presentados de forma numérica. Los resultados de las preguntas tres, cuatro y cinco nos indican que existe diferencia entre los grupos para identificar si datos presentados de forma gráfica representan una relación de proporcionalidad, en la pregunta cinco es donde más se muestra diferencia, lo cual indica que el uso de los OAM apoyó a los alumnos del grupo experimental en mejorar este ámbito.

El resultado en la pregunta seis indica que los alumnos de ambos grupos batallaron en encontrar la constante de proporcionalidad en un problema de contexto presentado en datos numéricos, es decir, el uso de los OAM no ayudó, o tal vez confundió, a los alumnos del grupo experimental para no relacionar el contexto del problema con la proporcionalidad, se puede afirmar que los alumnos pueden trabajar con datos numéricos, pero no les va muy bien usando un contexto. Esta afirmación se puede relacionar con la pregunta siete ya que la pregunta es directa, pidiendo a los alumnos que identifiquen de los datos la constante de proporcionalidad.

Los resultados de la pregunta ocho muestran que los alumnos del grupo control comprenden mejor la relación entre la constante de proporcionalidad y la velocidad (contexto del problema) esto indica que las actividades que se propusieron no ayudaron a los alumnos en este ámbito, sin embargo, en la siguiente pregunta muestra que el grupo experimental comprende mejor los datos que son presentados en gráficas, ya que todos los alumnos de este grupo obtuvieron la respuesta correcta.

En la pregunta diez se vuelve a ver que el trabajar con OAM no presentó algún cambio en los alumnos con respecto al manejo de la información de forma numérica,

los resultados muestran que los alumnos no pudieron completar los datos faltantes en una tabla. Para finalizar, las dos últimas preguntas muestran que a los alumnos del grupo experimental obtuvieron mejores resultados, sin embargo, no lograron sobrepasar la mitad del grupo, el tema de ambas preguntas se relacionó con la interpretación de rectas paralelas y perpendiculares.

Para finalizar esta investigación, se muestran a continuación las conclusiones que se obtuvieron al finalizar toda la propuesta del modelo de Objeto de Aprendizaje Matemático.

# CAPÍTULO 8

## Conclusiones



## Capítulo 8

### Conclusiones

A continuación, se presentan las conclusiones obtenidas en esta investigación acerca del aprendizaje del tema de proporcionalidad con apoyo de un Objeto de Aprendizaje Matemático (OAM-TRS), generado a partir de la perspectiva de la Teoría de Representaciones Semióticas (TRS) y la teoría de la Carga Cognitiva (CC). En este capítulo se describen las preguntas de investigación y las respuestas que se han dado, considerando éstas como las conclusiones de la investigación.

- 1) ¿Cómo se organizan los Objetos de Aprendizaje (OA) para lograr el aprendizaje del contenido de proporcionalidad?

Los OA en conjunto con la TRS se utilizan de la siguiente forma para lograr el aprendizaje, se usa primero un OA en el que se trabaja la proporcionalidad con datos numéricos (registro numérico), en un segundo OA se trabaja con proporcionalidad de forma gráfica (registro gráfico), y por último, se trabaja con la conversión entre un registro y otro, es decir, la correspondencia entre los elementos de cada registro, la forma en la que se presenta en ambos registros.

Se puede hacer uso de los diferentes registros de representación para diseñar los OA, siempre y cuando sea respetado el orden de los objetos, como fueron descritos en el párrafo anterior.

- 2) ¿Qué Recursos Educativos Abiertos (REA) ayudan a la construcción de un OAM?

Los videos empleados en cada parte del diseño del (OAM) apoyan en la presentación de los conceptos matemáticos que son difíciles de comprender a través de otro recurso educativo abierto, por ejemplo, un texto. Las imágenes, audios, y música utilizados en cada video fueron diseñados bajo los estándares que propone la teoría de la CC (presentados en el capítulo 2),

además, de estos recursos, se utilizaron foros en los cuales los alumnos pueden expresar libremente sus ideas y las de sus compañeros.

El recurso eXe-Learning permitió estructurar todas las actividades que conforman cada OA, ya que deja incluir imágenes, audios, videos, páginas web, archivos en formato PDF, los cuales son indispensables en el diseño de todo el objeto, además, se pueden crear cuestionarios que dan retroalimentación a los alumnos. En dicha herramienta son también admitidas imágenes como opciones de respuesta, esto ayuda a tener mayor interacción con los alumnos y en cuestionarios de matemáticas son muy útiles.

Uno de los principales problemas que existen al usar estos recursos es la forma en la que son presentados a los alumnos, esto tiene que ver con la información que es elegida para explicar el tema, incluso el contexto usado, los ejercicios y la forma de la pregunta interfieren en el aprendizaje. Por ejemplo, si se diseña un video, el contenido debe corresponder a la información que se desea enseñar, las imágenes y el audio usado deben estar sincronizados para que la información sea clara.

Los contextos usados en el OAM fueron obtenidos de los libros de texto, al realizar una revisión a los mismos, explicado en los primeros capítulos de esta investigación. En la evaluación en ambos grupos, algunas preguntas fueron interpretadas de diferente forma por cada uno de los alumnos, sin embargo, se pudo analizar cada una de estas respuestas e interpretarlas de forma grupal.

- 3) ¿Cómo ayuda al aprendizaje del estudiante de secundaria en el estudio de la proporcionalidad mediante Objetos de Aprendizaje Matemáticos?, el OAM empleado como apoyo a la enseñanza presencial.**

Esta investigación dio como resultado que los alumnos que usaron el Objeto de Aprendizaje Matemático adquirieron una mejor comprensión del tema de proporcionalidad ya que los integrantes del grupo control interpretan la proporcionalidad como una cantidad sumada y hacer uso del OAM ayudó a

que el grupo experimental cambiaran esta perspectiva. Además, se notó que el grupo experimental pudo comprender la proporcionalidad en diferentes contextos, ya que la mayoría de los argumentos por este grupo usaron las variables del contexto en los diferentes problemas.

Con respecto a la evaluación final del OAM, la evidencia muestra que el grupo experimental mejoraron en tres aspectos; 1) encontraron la constante de proporcionalidad a partir de la información presentada numéricamente para después proponer una ecuación, 2) interpretaron de la proporcionalidad a través de la representación gráfica, y 3) interpretación gráfica para la obtención de rectas perpendiculares y paralelas.

**4) ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de apoyar la enseñanza presencial del contenido de la proporcionalidad mediante OAM?**

Existen diferentes ventajas al hacer uso de OAM; apoya a los alumnos en el desarrollo de sus capacidades para argumentar sus ideas sobre un tema, y permite observar al profesor el avance de los alumnos en esta capacidad y guiarlos en el salón de clases. Otra ventaja es que los alumnos pueden repasar los conocimientos aprendidos en el salón de clase, algún concepto no quedó claro con lo enseñado por el profesor, los Recursos Educativos usados en el OAM pueden apoyar al alumno en estas necesidades.

Las actividades de evaluación y retroalimentación insertadas dentro del OAM permiten que los alumnos tengan conocimiento de los errores que puedan tener al resolverlas y el ejercicio les da una retroalimentación para que lo resuelvan correctamente. Además, el OAM permite a los alumnos tener más interacción con la tecnología.

El profesor como desarrollador tiene la ventaja de explicar el tema con los Recursos Educativos Abiertos que crea necesarios, la experiencia y todo el conocimiento que tiene sobre cómo dar el tema influyen en el diseño de cada actividad.

Por otro lado, también tiene desventajas; una de ellas es que al inicio el profesor debe desarrollar cada material que pueda usar en sus clases, esto implica tiempo de preparación que el profesor debe asignar a esta actividad. Por otro lado, se debe considerar las circunstancias en la que se encuentran los alumnos, ya que muchos de ellos no tienen acceso a internet y esto sería un inconveniente para llevar a cabo el apoyo con OAM.

Además de lo anterior, cabe destacar que el modelo del OAM-TRS propuesto entra en un ciclo de evaluación continua para su mejora (ver Figura 8.1), en primer lugar, debe existir la propuesta para el modelo OAM-TRS, en segundo lugar, la implementación a estudiantes utilizando un tema de la clase de matemáticas y por último el análisis de los resultados obtenidos por parte de los estudiantes, los cuales servirán para mejorar el modelo. Las veces que entre el modelo en este ciclo para su mejora se deja a consideración del creador.



Figura 8.1 Esquema para la mejora del modelo OAM

La propuesta que se hace en esta investigación es utilizando solo la teoría de Representaciones Semióticas perteneciente a las teorías de Matemática Educativa, de manera que otros modelos teóricos pueden ser diseñados considerando otras teorías de la Matemática Educativa, los componentes y estructura de dichos modelos dependerán de la teoría de la Matemática Educativa utilizada.

## **Estudios a futuro**

Después de analizar todos los resultados obtenidos del modelo OAM-TRS me dí cuenta que aún es necesario aportar más en esta línea de investigación y proponer nuevos modelos con diferentes teorías de la Matemática Educativa para mejorar el aprendizaje de las Matemáticas con apoyo de Recursos Educativos Abiertos. Me gustaría aplicar la materialización del OAM-TRS a más estudiantes y comprobar su eficacia a mayor escala para así obtener resultados que enriquezcan al modelo y también las actividades que fueron utilizadas con los estudiantes.

## Bibliografía

- Andrade, L. A. (2012). Teoría de la carga cognitiva, diseño multimedia y aprendizaje: un estado del arte Magis. *Revista Internacional de Investigación en Educación*, 5(10), 75-92.
- Angulo, P., Guijarro, L., & de Llano, E. (2010). Videotutor: una extensión de moodle para tutorías de Matemáticas y Ciencias Experimentales. *Relada*, 4(3), 174-182.
- Area, M. (2002). La integración escolar de las nuevas tecnologías. Entre el deseo y la realidad. *Revista del Fórum Europeo de Administradores de la Educación*, 10(6), 14-18.
- Arratia, O., Martín, M., & Pérez, M. T. (2005). Herramientas on-line para la enseñanza de las Matemáticas. *Actas del XIII Congreso de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas*. Valladolid, España.
- Arriaga, A., Benítez, M., & Cortés, M. d. (2008). *Matemáticas 3, Introducción a las competencias*. (S. d. EDIMEND, Ed.) Naucalpan de Juárez, Estado de México, México: PEARSON EDUCACIÓN.
- Ávila, M. J., Aguayo, F., & Lama, J. R. (2013). Teoría de la carga cognitiva aplicada a la resolución de problemas de ingeniería gráfica. *Sevilla Técnica*, 41, 40-48
- Ayala, J. d., & García, M. L. (2010). *Repositorio Objetos de Aprendizaje*. Obtenido de Significado Práctico del Concepto de Media Aritmética: [http://biblioteca.itson.mx/oa/matematicas/oa1/media\\_aritmetica/index.htm](http://biblioteca.itson.mx/oa/matematicas/oa1/media_aritmetica/index.htm)
- Baddeley, A. (2003). Working memory: looking back and looking forward. *Nature Reviews. Neuroscience*(24), 829-839.
- Badilla, E., & Chacón, A. (2004). Construccinismo: Objetos para pensar, entidades públicas y micromundos. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación"*, 4(1), 0.
- Belloch, C. (2012). Las Tecnologías de la Información y Comunicación en el Aprendizaje. *Universidad de Valencia*.
- Callejas, M., Hernández, E. J., & Pinzon, J. N. (2011). Objetos de aprendizaje, un estado del arte. *Entramado [online]*, 7(1), 176-189.
- Carías, T., & Euceda, C. (29 de septiembre de 2017). *Objetos de Aprendizaje*. Obtenido de <https://objetosdeaprendizajesite.wordpress.com>
- Castro, C. C., & Suavita, S. R. (2011). Formación, tratamiento y conversión como actividades cognitivas de representación: una experiencia con estudiantes para profesor. *XIII Conferencia interamericana*, (pág. 5). Recife, Brasil.
- COLOMBIA APRENDE. (2005). *Primer Concurso Nacional de Objetos de Aprendizaje*.

- Cruz, I., & Puentes, Á. (2012). Innovación Educativa: uso de las TIC en la enseñanza de la Matemática Básica. *edmetic*, 1(2), 127-147.
- Cubero, S. (2008). Manual: Elaboración de contenidos con eXe-learning. Universidad de Valencia.
- D' Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética. *Uno*(35), 90-106.
- Damisa, C., & Ponzetti, S. (2015). Los objetos matemáticos y sus representaciones: ¿lo que ves es lo que es? *Actas del CUREM 5*, (págs. 136-143). Montevideo, Uruguay.
- del Moral, M. E., & Cernea, D. A. (2005). Diseñando Objetos de Aprendizaje como facilitadores de la construcción del conocimiento. *Simposio Pluridisciplinar sobre Diseño, Evaluación y Descripción de Contenidos Educativos Reutilizables (SPDECE06)*. Barcelona, España.
- Domingo, M., & Marqués, P. (Octubre de 2011). Aulas 2.0 y uso de las TIC en la práctica docente. *Comunicar*, XIX(37), 169-175.
- Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Anales de Didáctica y de Ciencias Cognitivas* (5), 37-65.
- Duval, R. (1995). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Francia: Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (1996). ¿Qué cognitivo recordar en la didáctica de las matemáticas?. *Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, 6(3), 349-382.
- Duval, R. (1999). ¿El aprendizaje en matemáticas requiere un funcionamiento cognitivo específico? *La matemática y su didáctica*, 1, 17-42.
- Duval, R. (2003). Describir, visualizar o razonar: ¿qué primeros aprendizajes de la actividad matemática? *Anales de Didáctica y de Ciencias Cognitivas* (8), 13-62.
- Duval, R. (2005). Transformaciones de representaciones y procesos del pensamiento en matemáticas. *Actas del XXXI Coloquio COPIRELEM*, 67-89.
- Escareño, F., & López, O. L. (2014). *Matemáticas 3*. D.F, México: Trillas.
- Ferreiro, R. (2000). Hacia nuevos ambientes de aprendizaje. *Inducción a la educación a distancia*, 116.
- Fitzgerald, Ó., & Gaviria, T. (2013). El papel de la memoria operativa en las diferencias y trastornos del aprendizaje escolar. *Revista Latinoamericana de Psicología*, 45(1), 63-79.
- Gairín, J. M., & Oller, A. M. (2011). Proporcionalidad aritmética en secundaria. Ideas para una propuesta didáctica. *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*, 179-189.

- García, E., Barciela, R. F., & Fernández, E. S. (1998). Un ambiente de aprendizaje basado en software para la enseñanza de modelos matemáticos en ecología. *Revista de enseñanza y tecnología*(11), 36-42.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *The International Journal on Mathematics Education*, 1(2), 127-135.
- Gutiérrez, I. (2008). Usando objetos de aprendizaje en enseñanza secundaria obligatoria. *EduTec-e: Revista Electrónica de Tecnología Educativa*(27).
- Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 5-21.
- Hernández, A., Cervantes, J., Ordoñez, J. S., & García, M. D. (2017). Teoría de registros de representaciones semiótica. Universidad Autónoma de Guerrero.
- IEEE. Comité de Estándares de Tecnología de Aprendizaje. (2002). *Crear estándares de tecnología de aprendizaje*. Obtenido de <https://www.ieeeltsc.org/>
- Jiménez, D., & Marín, G. M. (2012). Asimilación de contenidos y aprendizaje mediante el uso de videotutoriales. *Enseñanza & Teaching*, 30(2), 63-79.
- Latapie, I. (Diciembre de 2007). Acercamiento al aprendizaje Multimedia. *Investigación Universitaria Multidisciplinaria*, 6(6), 7-14.
- Ledezma, E. (2018). Diseño de OAM para el tema de Proporcionalidad: <https://bit.ly/30fOyUy>
- López Guzman, C. (2005). Los repositorios de OA como soporte para los entornos de elearning. Salamanca, España.
- Luján, M., & Salas, F. (30 de Agosto de 2009). Enfoques teóricos y definiciones de la tecnología educativa en el siglo XX. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación"*, 9(2), 1-29.
- Lupiáñez, J. L., & Moreno, L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Gómez, & L. Rico (Edits.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática* (págs. 291-300). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Ocampo, A. (2014). Experiencia en el uso de la plataforma schoology como estrategia de acompañamiento docente en los cursos de ciencias básicas de la FUNLAM. *LA INVESTIGACIÓN*(1), 383-392.
- Paivio, A. (1991). Dual coding theory: Retrospect and current status. *Canadian Journal of Psychology/Revue canadienne de psychologie*, 45(3), 255-287.
- Papert, S. (1987). *Desafío a la mente* (Vol. 5). Ediciones Galápagos.

- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas* (Vol. 1). New York: Basic Books, Inc.
- Ramírez Cantú, M., Castillo Carrillo, R., Vergara Rivera, D., Flores Olvera, M. E., & Azpeitia Valadez, J. G. (2017). *Matemáticas 3 Desafíos matemáticos*. México: FERNÁNDEZ editores.
- Rea, J. I. (2015). Metodología de Aprendizaje para la Homologación de Conocimientos en Ingeniería de Software. *Repositorio: Colección de Tesis Digitales, Dirección de Bibliotecas*.
- Rosas, R., Grau, V., Salinas, M., Correa, M., Nussbaum, M., López, X., Flores, P., Lagos, F. (2011). Más Allá de Mortal Kombat: Diseño y Evaluación de Videojuegos Educativos para Lenguaje y Matemáticas del Nivel Básico. *Psykhé*, 9(2), 125-141.
- Sánchez, A. A. (2010). Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TICs. *EDUTECH, Revista Electronica de Tecnología Educativa*(31), 19.
- San Martín, Ó. J. (2007). Un registro de representación semiótica de naturaleza geométrica para la trigonometría. *En Memorias del IX Congreso Nacional de Investigación Educativa*, (pág. 15). Mérida, Yucatán.
- Santos Hermosa, G., Ferran Ferrer, N., & Abadal, E. (2012). Recursos educativos abiertos: repositorios y uso. *El profesional de la información*, 21(2), 136-145.
- Schnotz, W. (2002). Commentary: Towards an integrated view of learning from text and visual displays. *Educational psychology review*, 14(1), 101-120.
- SEP (1968). Programa Telesecundaria. México.
- SEP (2006). Programa "Enciclomedia". México.
- SEP (2009). Programa: Habilidades Digitales para Todos. México.
- SEP (2016). Programa de Inclusión Digital . México.
- SEP (2017). Modelo Educativo para la Educación Obligatoria. México.
- Serrano, M. d. (2010). Objetos de Aprendizaje. *Revista e-FORMADORES*(4), 5.
- Shaffer, D., Doube, W., & Tuovinen, J. (2003). Applying Cognitive Load Theory to Computer Science Education. *15th Workshop of the Psychology of Programming Interest Group*. Keele UK.
- Sweller, J. (2008). Human Cognitive Architecture. En D. Jonassen, M. J. Spector, M. Driscoll, M. D. Merrill, & J. van Merriënboer, *Handbook of Research on Educational Communications and Technology: A Project of the Association for Educational Communications and Technology* (págs. 369-381). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

- Tamayo, Ó. E. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía*, 18(45), 37-49.
- Valls, J., Llinares, S., & Callejo, M. L. (2006). Video-clips y análisis de la enseñanza: construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas. *Seminario sobre Entornos de Aprendizaje y Tutorización para la Formación de Profesores de Matemáticas*, (pág. 14). Barcelona, España.
- Vargas, I. (7 de noviembre de 2014). *EXPANSIÓN*. Obtenido de Maestros utilizan solo 10% del potencial de la tecnología: <https://expansion.mx/mi-carrera/2014/11/06/falta-que-maestros-aprendan-a-usar-la-tecnologia-invertida>
- Vidal, M. J., Alfonso, I., Zacca, G., & Martínez, G. (2013). Recursos educativos abiertos. *Revista Cubana de Educación Médica Superior*, 27(3).
- Wayne, H. H. (2000). Into the future: A vision paper. In *Commission on Technology and Adult Learning*. (págs. 48).
- Wiley, D. (2000). Connecting learning objects to instructional design theory: a definition, a metaphor, and taxonomy. *The Instructional use of learning objects*, 2830(435), 1-35.
- Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*, (pág. 16).
- Wilhelmi, M. R., Font, V., & Godino, J. D. (2005). Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques: réflexions sur la théorie de situations didactiques et le point de vue ontologique et sémiotique. *Colloque International «Didactiques : quelles références épistémologiques?»*. Bordeaux, France.