UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

FACULTAD DE CIENCIAS

"UN ESTUDIO ACERCA DEL APRENDIZAJE DEL TEOREMA DE THALES EN SECUNDARIA"

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE LICENCIADA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA:

DULCE DANIELA HERRERA ZAVALA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. NEHEMÍAS MORENO MARTÍNEZ

SAN LUIS POTOSÍ, SAN LUIS POTOSÍ, DICIEMBRE 2018

FORMATO DE AUTORIZACIÓN PARA LA IMPRESIÓN FINAL DE LA TESIS

SECRETARIA GENERAL

FACULTAD DE CIENCIAS

Nombre: Dulce Daniela Herrera Zavala

Clave: 0209924

Fecha: 29 · Nov - 2018

Carrera: Licenciatura en Matemática Educativa

Especialidad:

Generación: 2012

Título de la Tesis:
"Un estudio acerca del aprendizaje del teorema de Thales en secundaria"

Asesor: Dr. Nehemias Moreno Martínez

Adscripción del Asesor: Facultad de Ciencias de la U.A.S.L.P.

SINODALES ASIGNADOS

Presidente: Dra. Rita Angulo Villanueva

Secretario: Dr. Nehemias Moreno Martínez

Vocal: Dr. Eduardo Carlos Briceño Solís

Suplente: Dr. Noé Sánchez Martínez

Por medio de la presente atestiguamos que después de leer el documento de tesis puesto a nuestra consideración, no tenemos recomendaciones o sugerencias a su contenido y damos nuestra aprobación para que se impriman las versiones finales del mismo.

Firmas:

Sinodal Presidente

Sinodal Secretario

Sinodal Vocal

Sinodal Suplente

Vo.Bo.

Secretario General

SECRETARIA GENERAL

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS
RESUMEN
INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES 1
1.1 La Pailería 4
1.1.1 ¿Qué es la Pailería? 4
1.1.2 El Pailero 5
1.1.3 Herramientas de trabajo de un pailero 6
1.1.4 Técnica de construcción de tubos 9

CAPÍTULO 2 MARCO DE REFERENCIA 12
2.1 Historia del teorema de Thales 13
2.2 Tratamiento de los libros de texto 17
2.2.1 El teorema de Thales en los libros de texto de secundaria 17
2.2.2 Tratamiento del teorema de Thales en el nivel medio superior 23
2.2.3 El teorema de Thales en el nivel superior 27
2.2.4 Algunos comentarios en relación con el tratamiento de los libros de texto 33
2.3 Teorema de Thales en los planes y programas de estudio 34
2.3.1 Nivel secundaria 34
2.3.2 Nivel medio superior y nivel superior 35
2.3.3 Comentarios en relación con los planes y programas de estudio 36
2.4 Algunas investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje del teorema de Thales 37
2.5 Problema de investigación 46
2.6 Hipótesis y preguntas de investigación 47
2.7 Objetivos de investigación 48

CAPÍTULO 3 MARCO TEÓRICO 50
3.1 La Socioepistemología 51
3.2 Práctica social 53

3.3 Dimensiones epistemológicas 53

3.4 Situación variacional y estrategias variacionales 54

3.5 Una perspectiva socioepistemológica para la enseñanza del teorema de Thales 57

CAPÍTULO 4 METODOLOGÍA 61

4.1 Tipo de estudio 62

4.2 Participantes y contexto de la investigación 63

4.3 Implementación 63

4.3.1 Etapa 1, evaluación diagnóstica y presentación del problema. 63

4.3.2 Etapa 2, construcción de la plantilla del tubo T1, análisis del tubo e identificación de los triángulos. 64

4.3.3 Etapa 3, construcción de la plantilla del tubo T2. 65

4.3.4 Etapa 4, construcción de la plantilla del tubo T3, análisis del tubo T2 y toma de medidas. 66

4.3.5 Etapa 5, análisis de los tubos T3 y T4, toma de medidas, reflexión de la pregunta escrita, enunciación del teorema y solución del problema 67

4.4 Esquema de las etapas 69

CAPÍTULO 5 RESULTADOS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA SITUACIÓN VARIACIONAL 70

5.1 Resultados de la etapa 1: evaluación diagnóstica y presentación del problema. 71

5.2 Resultados de la etapa 2: construcción de la plantilla del tubo T1, análisis del tubo e identificación de los triángulos. 74

5.3 Resultados de la etapa 3: construcción de la plantilla del tubo T2. 78

5.4 Resultados de la etapa 4: construcción de la plantilla del tubo T3, análisis del tubo T2 y toma de medidas. 78

5.5 Resultados de la etapa 5: análisis de los tubos T3 y T4, toma de medidas, reflexión de la pregunta escrita, enunciación del teorema y solución del problema 82

CAPÍTULO 6 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN 92

6.1 Análisis y discusión de los resultados de la etapa 1. 93

6.2 Análisis y discusión de los resultados de la etapa 2. 94

6.3 Análisis y discusión de los resultados de la etapa 3. 95

6.4 Análisis y discusión de los resultados de la etapa 4. 95

6.5 Análisis y discusión de los resultados de la etapa 5. 96
6.6 Resignificación del teorema de Thales 100
CAPÍTULO 7 CONCLUSIONES 102
BIBLIOGRAFÍA 109
ANEXOS 116

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer y dedicar este trabajo en primer lugar a mi Director de Tesis al Profesor-Investigador Dr. Nehemías Moreno Martínez, por motivarme en esta investigación, por darme su apoyo constantemente, por orientarme en este camino, por aceptar este compromiso y dedicar parte de su tiempo a esta tesis.

A mis Profesores y Sinodales Dra. Rita Angulo Villanueva, Dr. Eduardo Carlos Briceño Solís y Dr. Noé Sánchez Martínez por apoyarme, guiarme en mi trabajo y por aceptar este compromiso.

A mi familia, mis padres Leticia Zavala Rojas y Edgar Herrera Campos, a mi hermano Edgar Omar Herrera Zavala y a mis abuelitos Amparo Rojas Leyva y Antonio Zavala Juárez (q.e.p.d.) por siempre apoyarme en todo mi camino, por creer en mí, por todo el amor que me demuestran cada día y por siempre estar conmigo en cada situación.

A mi Profesor Carlos Gustavo Enríquez Pozos por su enseñanza, motivación, apoyo y cariño.

Al señor Arturo Proa Niño por su tiempo, atención y apoyo en este trabajo.

Además, un agradecimiento a la Escuela Secundaria Técnica No. 1, por su apoyo con el proyecto de mi tesis, a la Subdirectora de esta Institución, así mismo a la profesora encargada del grupo con el que trabajé y a todas las alumnas con las que llevé a cabo mi actividad.

Por último, quiero agradecer a mis profesores de la Licenciatura que me han apoyado durante este camino.

Gracias a ustedes.

RESUMEN

En la clase de Matemáticas, se presenta el teorema de Thales (TT) mediante una definición y fórmula para luego buscar su aplicación en distintos contextos que si bien son cotidianos resultan poco relevantes.

Con base en la problemática anterior, en la realización de este trabajo se planteó el objetivo general de entender cómo se lleva a cabo la comprensión del teorema de Thales (TT) en el nivel educativo de secundaria, tomando en cuenta el saber matemático que se encuentra en el contexto de la construcción del tubo de distribución "T" que se realiza en la industria de la Pailería. Los tubos T son formados al ensamblar un tubo al que se le ha practicado el corte llamado "boca de pescado" con un tubo travesaño.

La investigación se apoyó en la teoría de la Socioepistemología, la cual orientó la adaptación, el diseño e implementación en el aula de nivel secundaria, de una Situación Variacional (SV) que implica el proceso de construcción del tubo con corte boca de pescado para generar el tubo T. La SV condujo a un grupo de alumnas en la realización de un conjunto de Estrategias Variacionales (EV) que les permitió resignificar el TT.

Se plantearon dos hipótesis, en la primera hipótesis, que trata sobre la adaptación al aula del proceso de construcción de tubos T que se realiza en la Pailería, se consideró responder dos preguntas de investigación: ¿Cuáles son las características que debe tener una situación variacional para poder resignificar el TT en términos del proceso de construcción de tubos? y ¿Qué elementos podrían tomarse del oficio de la Pailería, relacionado con el TT en el contexto de la construcción de tubos para adaptarlo al aula?

En la segunda hipótesis, que trata de los procesos cognitivos (comparación, seriación, entre otros) que se realizan al resolver la SV se planteó la pregunta: ¿Cuáles son y cómo se organizan los procesos cognitivos específicos a lo largo del proceso de resignificación del teorema de Thales en el contexto de la actividad de Pailería relacionada con la construcción de tubos?

Para responder las preguntas anteriores, se llevó a cabo una metodología de tipo cualitativa a través de un estudio de caso en el que se exploraron las interpretaciones y los argumentos variacionales (que dan cuenta de la realización de las estrategias o procesos cognitivos de tipo variacional) de los alumnos sobre el TT a lo largo del proceso de construcción del tubo T. Para esto, se adaptó la práctica de Pailería de construcción de tubos de conducción para llevarla al aula y aplicarla con alumnas de tercer grado de secundaria.

Las actividades se desarrollaron en 5 etapas, en las cuales un grupo de alumnas organizadas en parejas realizaron la construcción del tubo T con diferentes secciones (o precisiones). En parejas también midieron, registraron en una tabla y analizaron mediante las estrategias variacionales las mediciones de las longitudes de las aristas de dos triángulos rectángulos visualizados en la plantilla del tubo al que se le practicó el corte boca de pescado.

En el transcurso de las sesiones, las alumnas comentaron y realizaron observaciones acerca de las características del corte boca de pescado practicado en los tubos, llegando a acuerdos de lo observado en cada uno. Finalmente, las alumnas lograron visualizar y resignificar el TT a través de la búsqueda de una precisión más adecuada en el proceso de construcción del tubo T.

INTRODUCCIÓN

Conversando con un colega que es maestro de nivel secundaria, le pregunté sobre cómo los profesores en la institución donde labora abordaban el contenido del "teorema de Thales (o Tales)" y refirió que la mayoría de los profesores −incluido él− enseñaban este teorema de manera algorítmica y en la mayoría de las ocasiones no estudiaban el tema con sus alumnos porque no lo consideraban tan relevante como el teorema de Pitágoras. Como consecuencia de este tratamiento algorítmico −señaló mi compañero− los alumnos no muestran interés en saber más allá de la fórmula porque saben que ésta les servirá solamente para realizar las tareas, resolver los problemas que les plantea el docente en clase y acreditar el examen.

Existen investigaciones (Hernández, 2016; Cantoral, 2013) que han señalado una enseñanza del teorema de Thales, que se realiza en libros de texto y en el aula, a través de contextos problematizados carentes de relevancia (por ejemplo, el problema de calcular la longitud de la sombra de un árbol, la altura de una antena, entre otros), donde se requiere de la aplicación directa de la fórmula de Thales. También señalan que se lleva a cabo un tratamiento algorítmico que motiva la memorización.

Con base en los aspectos anteriores, en este trabajo se propone una Socioepistemología del teorema de Thales que se apoya en el contexto de la construcción de tubos "T" realizada en la industria de la Pailería por la comunidad de paileros. Con esto, se pretende investigar la comprensión del teorema de Thales a través de un camino distinto al de la enseñanza tradicional que realizan los libros de texto de Matemáticas y los profesores en el aula.

El marco teórico que sustenta esta investigación es la teoría de la Socioepistemología, la cual destaca que se debe problematizar al saber matemático situándolo en el entorno de la vida del aprendiz, buscando el conocimiento matemático que está vivo en él, ya que el conocimiento surge a partir de la actividad humana y está ligado a la cultura, éste se "construye, reconstruye, significa y resignifica" (Cantoral, Reyes y Montiel, 2014, p.97). Además, aborda las prácticas sociales que son los cimientos de la construcción del conocimiento.

Se parte de la idea de que los estudiantes deben aprender haciendo funcionar el saber, de manera que el saber aparezca para el alumno como un medio para seleccionar, anticipar, ejecutar y controlar las estrategias que aplica a la resolución del reto planteado por la situación de aprendizaje (Cantoral, 2013).

En esta dirección, esta investigación realiza una adaptación del proceso de construcción de tubos "T" al ámbito educativo con el objeto de estudiar si es posible que los estudiantes logren una resignificación del teorema de Thales. La resignificación busca que los alumnos adquieran un conocimiento funcional y no operativo de dicho teorema. Además, se busca también que los alumnos visualicen y comprendan el teorema de Thales.

De acuerdo a los resultados de esta investigación, las estrategias variacionales de comparación, predicción, seriación y estimación permiten resignificar el teorema de Thales en términos de la precisión que se requiere para construir los tubos con forma de "T".

Cabe señalar que actualmente en el Nuevo Modelo Educativo (NME) los libros de texto se apoyan en algunos elementos que propone la Socioepistemología para la enseñanza de las matemáticas escolares, pues este modelo enuncia cuatro enfoques: aprendizaje profundo, aprendizaje situado, aprendizaje significativo y aprendizaje socioemocional (Cantoral,

2017). Además, se pronuncia contra la memorización de conceptos, hechos y procedimientos.

Por otro lado, cabe señalar que para 2018 en el NME de secundaria (Secretaría de Educación Pública, 2017) se eliminó por completo del programa de Matemáticas el contenido del teorema de Thales, pero no así el propósito de buscar que el alumno debe aprender a resolver problemas que le permitan analizar, modelar y comunicar fenómenos con un lenguaje específico mediante el diseño de estrategias apoyadas en situaciones reales. De manera que no se minimiza la importancia ni el impacto del presente trabajo, más bien, los hallazgos reportados podrían apoyar el desarrollo de las competencias matemáticas indicadas en el currículo, así como el diseño de otras situaciones a ser implementadas en secundaria. El estudio también podría apoyar el tratamiento del tema en el nivel medio superior y, en el contexto internacional, en el currículo de nivel básico de otros países. La propuesta es que el estudiante use el conocimiento, para ello se debe aceptar una descentración del objeto (entendido en términos de la definición o fórmula), llevando al alumno de la práctica a la teoría.

El trabajo se encuentra organizado en 7 capítulos. En el primer capítulo se describen aquellos aspectos históricos sobre la conducción de fluidos que condujeron posteriormente al desarrollo de técnicas de construcción de tubos, además se describe el oficio de la Pailería, las actividades que realiza un pailero y las principales herramientas de trabajo. Finalmente se describe la construcción del tubo en forma “T” obtenido al ensamblar dos tubos, un tubo al que se le ha practicado el corte llamado “boca de pescado” y otro tubo travesaño.

En el capítulo dos se describe la historia del teorema de Thales, la manera en cómo se aborda en los libros de texto y cómo se presenta en los planes y programas de estudio. También se presenta una breve revisión de investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje del teorema de Thales y se describen la problemática, las hipótesis de trabajo, las preguntas de investigación y los objetivos. En el capítulo tres se presentan algunos elementos de la teoría de la Socioepistemología como el de la noción de situación variacional, estrategia variacional, argumento variacional, una perspectiva socioepistemológica para la enseñanza del teorema de Thales, entre otros.

En el capítulo cuatro se describe la metodología, que es de tipo cualitativa, también se presenta la implementación de la actividad por etapas con estudiantes de tercer año de secundaria. En el capítulo cinco se presentan los resultados de la implementación de la situación variacional por etapa.

En el capítulo seis se presenta el análisis y discusión de los resultados obtenidos mediante la implementación de la situación variacional apoyado en la Socioepistemología, también se presenta la manera en que las alumnas resignifican el teorema de Thales a través de la unidad de análisis (entendida como el conjunto de procesos cognitivos comparación, predicción, seriación y comparación). Finalmente, en el capítulo siete se presentan las conclusiones de este trabajo donde se responde a las preguntas de investigación y el estudio que se realizará a futuro.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

1. Introducción

En este capítulo se presenta una breve revisión de la literatura acerca de la construcción de sistemas hidráulicos en la antigüedad. Se considera que la construcción de los tubos de conducción, en particular del tubo "T", tuvo su origen en un principio en la necesidad humana de conducir agua a través de sistemas hidráulicos abiertos, con objeto de abastecer a los asentamientos humanos y desarrollar la agricultura.

Con el crecimiento poblacional, surgió la necesidad de conducir por largas distancias el vital líquido desde los manantiales hacia las grandes urbes, pero con más pureza y con condiciones sanitarias adecuadas, lo cual obligó el desarrollado de sistemas cerrados. Tiempo después de la revolución industrial, con el desarrollo de la economía a través de la industria petrolera, no solo se conducía agua a través de tubos de grueso calibre para abastecer a las ciudades, sino que también gas por medio de gasoductos o petróleo mediante oleoductos. De este modo, fue necesario paulatinamente el desarrollo de técnicas para la construcción de tubos en el seno de ciertas comunidades, en particular, en la industria de la Pailería.

En este apartado también se describe el oficio de la Pailería, al pailero, los productos que construye el pailero y las diferentes herramientas de trabajo que utiliza para construir las estructuras metálicas. Finalmente, se explica la técnica de construcción del tubo T al ensamblar un tubo travesaño con un tubo al que se la práctica un tipo de corte llamado "boca de pescado". Este último tubo es el que fue empleado en el diseño de la situación variacional que permitió la resignificación del teorema de Thales.

Aspectos históricos sobre la conducción de fluidos en algunas culturas

Culturas como la de los Sumerios (que se asentaron en Irak y al este de Siria), los Mexicas (que vivieron en el actual México), los Mayas (que se ubicaron al sureste de México, Belice, Guatemala y parte de Honduras) y los Zapotecas (que vivieron al sur de Oaxaca, Guerrero, Puebla y el estado de México) desarrollaron un sistema de riego propio que permitiese ampliar la zona agrícola, construyeron diques y canales que transportaban y repartían el agua. Los Sumerios y Zapotecas usaban acueductos construidos con piedras sin sujeción de mortero y con tierra compactada, los Sumerios usaban cisternas de la misma forma, Mexicas y Mayas, también usaban depósitos pluviales recubiertos con estuco y que fueron construidos en la roca caliza para prevenir la absorción del agua, los Mexicas y Zapotecas también edificaron presas (Lavola, 2014; Olivas, 2012; Valera, 2013; Ibáñez, 2007; Caran y Nelly, 2007).

Por otro lado, los romanos (que se desarrolló en la península itálica) construyeron grandes acueductos para transportar agua a largas distancias ya que buscaban aguas limpias, puras y lo más sanas y agradables al gusto y al tacto (De la Peña, 2010). A diferencia de las culturas anteriores, los romanos utilizaban tuberías hechas con plomo o de cerámica, ver la Figura 1.5(a), de barro, ver la Figura 1.5(b), y de piedra, mientras que las tuberías de bronce se

utilizaban para terminaciones de grifo. De la Peña (2010) señala que "según el tipo de localidad y administración, se encontraban tres tipos básicos de abastecimiento de agua: acueducto único, grupo de acueductos y acueducto compartido" (p. 260).

(a) (b)

Figura 1.5. (a) Tuberías de gran calibre de plomo y (b) tuberías de barro para presión (De la Peña, 2010).

En la cultura romana los acueductos podrían considerarse como las estructuras que dieron paso a las tuberías que se conocen actualmente.

Echeverry (2011) señala que la tubería es un conducto que cumple la función de transportar líquidos y/o sólidos. La tubería cilíndrica de trayectoria recta o, al menos, regular sobre su eje longitudinal es la más empleada en la práctica. El resto de formas y trayectorias son abarcadas por las tuberías especiales (Cruz, 2014).

Cruz (2014) señala que los materiales ferrosos (hierro fundido, acero y sus aleaciones) han demostrado ser los que dan mejores resultados de resistencia química y mecánica respecto al coste económico, en la actualidad son los materiales más usados en la fabricación de tuberías industriales.

Gracias al desarrollo de la metalurgia, la fabricación de tubería sin costura, ver la Figura 1.18(a), y con costura, ver la Figura 1.18(b), pudo ser más económica, de alta producción y aplicación (Echeverry, 2011).

(a) (b)

Figura 1.18 (a) Tubos sin costura y (b) Tubos con costura (N/a, 2018).

En la actualidad, uno de los métodos más importantes para la unión de piezas metálicas en las industrias es la soldadura, la cual proporciona una unión permanente entre las piezas, convirtiéndose en una sola unidad (Niebles et al., 2006). Existen varios procesos para la

aplicación de la soldadura y son completamente aplicables a la tubería, todo depende del espesor, las condiciones técnicas y el material a utilizar (Echeverry, 2011).

Los aspectos anteriores fueron considerados en la presente investigación, a manera de reflexión, como elementos de la dimensión sociocultural señalada por la teoría de la Socioepistemología. Crespo (2007) advierte que los escenarios socioculturales son los ámbitos en los que actúan los grupos sociales. Todas las características de los escenarios socioculturales influyen en la construcción del conocimiento, comprendido éste como un producto sociocultural, y por lo tanto representativo de la sociedad en la que se gesta (Crespo, 2007).

La construcción de acueductos hechos en un principio con materiales como la cerámica, el barro o la piedra, y posteriormente, la construcción de estructuras metálicas tubulares con objeto de conducir y distribuir fluidos (ya sea agua, combustible o desechos) conforman escenarios socioculturales en los que se encuentran implicados diversos factores tales como las necesidades sociales o económicas, las costumbres, los conocimientos de la época, el contexto geográfico, entre otros. En este sentido, la construcción de tubos en el escenario actual, en la industria de la Pailería, tiene una componente histórica y sociocultural muy importante. Dicha actividad se apoya en distintas técnicas de construcción que consideran al saber matemático que vive en el seno de la comunidad de paileros.

En la siguiente sección se describe el oficio de la Pailería y se muestran ejemplos de algunas estructuras metálicas actuales que son elaboradas por los obreros de la industria de la Pailería, los paileros.

1.1 La Pailería

1.1.1 ¿Qué es la Pailería?

El oficio que surge a partir de la aparición de la industria metálica donde se emplean técnicas de trazado, corte y soldadura para el trabajo con placas, tubos, perfiles y otros materiales, es la Pailería; que se utiliza para desarrollar diversos elementos como silos, estructuras metálicas, sistemas de conducción de fluidos, entre otros (Marin, 2016).

El material que se trabaja es el acero laminado y vigas en diferentes aleaciones, formas y espesores (Pailería o caldería, s.f.).

Algunas estructuras donde se encuentra la Pailería son: la Torre Eiffel, el Museo Guggenheim Bilbao, el Puente Colgante de Vizcaya, Silos, el Museo del acero en Monterrey, el Telescopio milimétrico en Puebla, el Estadio de Chivas, Domos, los Puentes de Ourense, ver la Figura 1.19, además, bodegas, naves industriales, oficinas, comercios, estacionamientos, cubiertas, espacios recreativos y montaje de tuberías para gas, redes hidráulicas y sanitarias.

Figura 1.19 Estructuras metálicas (collage).

Quien realiza la Pailería es el pailero, a continuación, se describe al pailero y algunas de las actividades que realiza.

1.1.2 El Pailero

La mayoría de los paileros, ver la Figura 1.20, depende de la empresa donde laboren, tienen escolaridad de nivel medio superior y otros sólo secundaria, no es un requisito el tener títulos técnicos o universitarios por parte de los empleadores para ejercer este oficio, solo se requiere conocer el trabajo, tener experiencia e incluso asistir a cursos —comenta el señor A—. Sin embargo, los paileros conforman una comunidad con costumbres y lenguaje propio del taller de Pailería —comenta el señor A—.

Figura 1.20 Pailero A. (Domínguez, 2018).

Entre las actividades y responsabilidades que tiene un pailero son: Trazar, cortar, mecanizar y conformar placas, perfiles y tubos para las construcciones metálicas. Unir por soldeo piezas y conjuntos para fabricar, montar o reparar construcciones metálicas. Montar elementos y subconjuntos de construcciones metálicas. Realizar operaciones de control de calidad en la construcción metálica (Marin, 2016).

El pailero utiliza diferentes herramientas de trabajo, a continuación, se describen algunas de las principales.

1.1.3 Herramientas de trabajo de un pailero

Entre las herramientas que utiliza un pailero se describen las principales:

Escuadra magnética. Es una escuadra que tiene en sus puntas unos imanes generalmente de neodimio, y nos permite sujetar dos piezas en ángulo de 90 grados, facilita mucho la soldadura de uniones en ángulos, y puede sustituirse con una escuadra rígida y dos sargentos, o con la prensa de ángulo, ver la Figura 1.21 (Esquivel, 2016, párr.12).

Figura 1.21 Facilita la soldadura de uniones en ángulos (Esquivel, 2016).

Máquina para soldar. Máquinas con altos ciclos de trabajo, y están construidas en materiales de muy alta calidad, además la máquina está garantizada por el fabricante. También permiten decidir el tipo de corriente con la cual trabajar, alternando entre corriente continua y directa, ver la Figura 1.22 (Esquivel, 2016, párr. 2).

Figura 1.22 Permiten decidir el tipo de corriente con la cual trabajar (Esquivel, 2016).

Esmeril. Máquina de soldar y el esmeril van de la mano como el martillo y el clavo, siempre que hagamos un trabajo de soldadura necesitaremos cortar metales, pulirlos o devastarlos, y necesitaremos discos ya sea para corte, devastar o pulir, ver la Figura 1.23 (Esquivel, 2016, párr.5).

Figura 1.23 Sirve para cortar metales o pulirlos (Esquivel, 2016).

Sierra tronzadora o cortadora de metales. Para lograr cortes de calidad con precisión, acabados simétricos, y además aumenta la seguridad en el trabajo, ver la Figura 1.24 (Esquivel, 2016, párr.7).

Figura 1.24 Para obtener cortes de calidad con precisión (Esquivel, 2016).

Cepillo de alambre. Cada vez que se realiza un cordón de soldadura o un punto, debe removerse la escoria para verificar la calidad del cordón y se usa para asegurar un perfecto acabado, ver la Figura 1.25 (Esquivel, 2016, párr.8).

Figura 1.25 Para remover la escoria y asegurar un perfecto acabado (Esquivel, 2016).

Prensa o sargentos. Te ayudan a unir piezas en paralelo o sostenerlas en estructuras para lograr la unión inicial con los primeros puntos o cordones, ver la Figura 1.26 (Esquivel, 2016, párr.9).

Prensa de banco. Se usa cuando se va a soldar piezas pequeñas o hacer trabajos más delicados, ver la Figura 1.26 (Esquivel, 2016, párr.10).

Prensa doble o de ángulo. Su función es simplemente unir en ángulos dos materiales a sueldar (en pailería hacen referencia a la palabra sueldar y no a soldar como podría pensarse) como por ejemplo dos tubos, esto permite conseguir excelentes ángulos al reducir la luz (separación) entre las piezas y lograr una sujeción estable, es importante que tu prensa de ángulo te permita calibrarla según el ángulo deseado, este tipo de prensa puede sustituirse con escuadras de tipo magnético, o con una escuadra y dos sargentos, ver la Figura 1.26 (Esquivel, 2016, párr.11).

Figura 1.26 Sirven para unir piezas en paralelo, soldar piezas pequeñas o unir en ángulos dos materiales a soldar (Esquivel, 2016).

Plantilla. Se obtiene del plano de trabajo, el pailero la utiliza para realizar el trazo en el tubo de metal y luego realizar el corte exacto, ver la Figura 1.27 (Frankland, 1998).

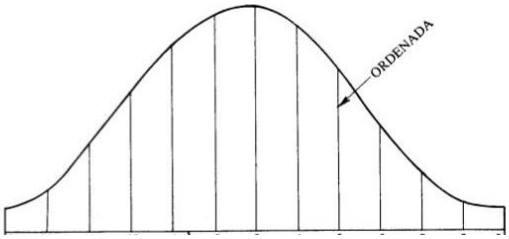


Figura 1.27 Sirve para elaborar el corte de un tubo de 45° (Frankland, 1998).

Plano de trabajo. El pailero lo utiliza para realizar los trazos de un corte de tubo utilizando como herramientas adicionales el compás y la regla, con la finalidad de obtener una plantilla que se utiliza para colocarlo en el tubo de metal y posteriormente realizar el corte preciso, ver la Figura 1.28 (Moran, 1978).

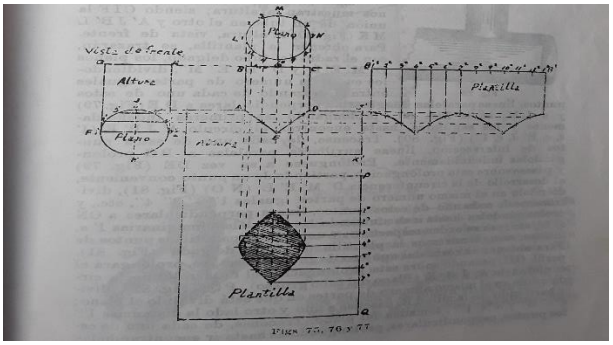


Figura 1.28 Sirve para obtener la plantilla corte “Boca de pescado” que al ensamblar forma un tubo “T” (Moran, 1978).

Soldadura. Son aleaciones que sirven para unir entre sí los metales, cuya composición varía según la resistencia que se le quiera dar; estas aleaciones son de estaño y plomo o de cobre, zinc y estaño, siendo más resistentes en el segundo caso, cuando más cobre tengan. Siendo su uso, primera, para soldaduras penetrantes; segunda, para soldaduras menos penetrantes; tercera, para empalmes de cubiertas de zinc, canalones, etcétera, y cuarta para nudos de plomería, ver la Figura 1.29 (Moran, 1978, p.199).

Figura 1.29 Sirven para unir entre sí los metales (Espada, 2018).

Entre las herramientas que utiliza un pailero se encuentra la plantilla, y la plantilla se obtiene a partir de una técnica de construcción de un corte de tubo, a continuación, se describe la técnica para llevar a cabo la construcción del tubo en forma “T”, a partir del plano de trabajo.

1.1.4 Técnica de construcción de tubos

(a) (b) (c)

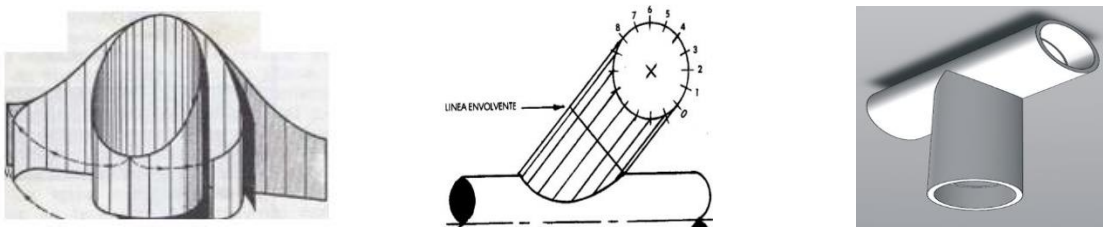


Figura 1.30 (a) Construcción de corte a 45°, (b) Construcción tubo “Y” y (c) Construcción tubo “T” (Graves, 1997).

La técnica es la misma para los tres tipos de tubos, corte a 45° forma de codo o “L”, ver la Figura 1.30(a), corte boca de pescado a 45 forma “Y”, ver la Figura 1.30(b), y corte boca de pescado tubo forma “T”, ver la Figura 1.30(c).

De manera particular para esta investigación se utilizará el tubo en forma “T”. Se describen a continuación los pasos a seguir para construir el tubo al que se le va a realizar el corte, luego con un tubo travesaño que se les proporcionará a las alumnas se ensamblará al tubo con corte para conformar el tubo T.

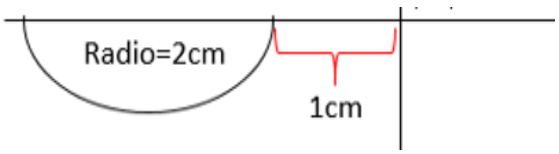
Construcción de tubo “T” corte “boca de pescado”

1. Se traza un plano cartesiano.

2. Dejar espacio de 1 cm desde el punto de origen (0,0) del plano cartesiano hacia la horizontal negativa.

3. A la mitad del diámetro trazar un semicírculo.

4. Cortar el semicírculo con las partes iguales y enumerarlas. Para realizar el cálculo de las partes exactas del semicírculo se opera de esta manera (Diámetro*pi /2) / número de partes que desea cortar.

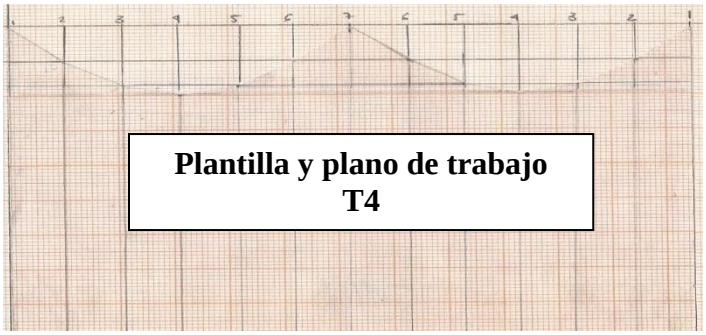


5. Para delimitar el espacio de la plantilla calculamos (Diámetro*pi).

6. Se corta sobre la horizontal positiva las partes exactas, tomando la medida de la abertura del compás.

7. Enumeramos cada parte empezando desde el origen del plano cartesiano (0,0), llegando a la parte que buscamos y se continúa regresándose a 1.

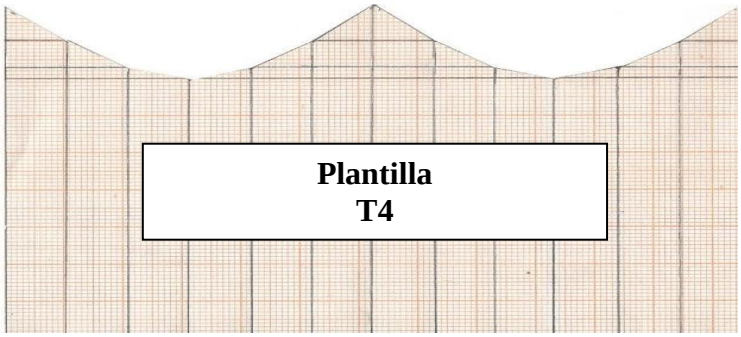
8. Se trazan rectas horizontales y verticales.



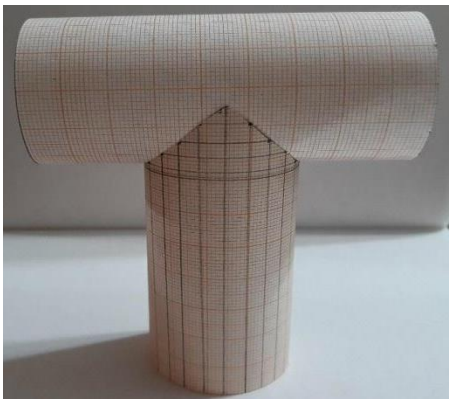
9. Se colocan los puntos en las intersecciones de las rectas siguiendo el orden de los números.

10. Se unen los puntos en orden utilizando la regla.

11. Se recorta la plantilla.



12. Se dobla la plantilla, se pegan las orillas (verticalmente) con cinta adhesiva y se ensambla con un tubo sin corte.



El tubo T se forma al ensamblar dos tubos, un tubo al que se realiza un corte conocido como boca de pescado y otro tubo travesaño. El teorema de Thales se evidenció en el tubo en el que se realiza el corte y no en el tubo T en sí mismo. Si bien el teorema de Thales se evidencia

en uno de los tubos componentes del tubo T, de ahora en adelante se hablará de Thales en el tubo generado en forma T.

La técnica utilizada para la construcción del tubo T se utilizó para evidenciar el teorema de Thales a través del cambio y la variación en los cuatro tubos con distintas particiones, de manera que las alumnas observaron el cambio que hubo en los cuatro tubos y en la variación que existió entre cada par de triángulos ABC y AB'C' que estaban en las orillas de las plantillas y planos de trabajo de cada uno de los tubos, ver la Figura 5.5.8.

En este capítulo se discutió la componente sociocultural de la Pailería desde la perspectiva de la teoría socioepistemológica. A continuación, se presenta el marco referencial donde se describe la historia del teorema de Thales, la manera en cómo se aborda en algunos libros de texto en los diferentes niveles educativos (secundaria, preparatoria y universidad), el análisis en los planes y programas de estudio, la revisión de investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje del teorema de Thales, la problemática, las hipótesis de trabajo, las preguntas de investigación y los objetivos.

CAPÍTULO 2

MARCO DE REFERENCIA

CAPÍTULO 2

MARCO DE REFERENCIA

Introducción

En este capítulo se describe la historia del teorema de Thales, desde quien fue Thales, sus aportaciones principales a la matemática de su época hasta la formulación del teorema que lleva su nombre el cual empleó para resolver el problema de calcular la altura de la pirámide de Keops. También se describe el tratamiento del teorema de Thales que se presenta en los libros de texto desde nivel básico, en secundaria, hasta el nivel universitario. Posteriormente, también se analizan los planes y programas de estudio donde se aborda el teorema de Thales en los diferentes niveles. Luego se presenta una revisión de algunas investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje del teorema de Thales (TT). Finalmente, se menciona el problema de investigación, las hipótesis, las preguntas y los objetivos de la investigación.

2.1 Historia del teorema de Thales

Díaz (2012) señala que Thales fue un filósofo, astrónomo y matemático griego que nació en Mileto en el año 624 a. de C., de acuerdo con el pensador griego Apolodoro, Thales es el padre tradicional de la matemática griega y simboliza las circunstancias bajo las cuales los fundamentos, no solamente de la matemática moderna, sino también de la ciencia y de la filosofía, fueron establecidas.

"Thales fue un hombre esencialmente práctico: comerciante, hábil en ingeniería, astrónomo, filósofo, estadista, geómetra. Como lo que ahora llamaríamos ingeniero, estuvo dirigiendo obras hidráulicas y se dice que desvió el curso del río Halis mediante la construcción de diques" (Teorema de Thales, s.f, párr.1). "Como astrónomo fue más célebre, lo espectacular fue la predicción del eclipse solar que detuvo la batalla entre Alyattes y Cyaxares el 28 de mayo del año 585 a. de C." (Díaz, 2012, p.13).

Díaz (2012) afirma:

> El estudioso griego Calímaco registra que Thales descubrió la constelación de la Osa Menor y recomendó a los navegantes guiarse por ella en lugar de la Osa Mayor. Fue el primero en comparar la magnitud del sol con la de la luna y encontró que ésta era 700 veces menor que el sol. También se cree que conoció el recorrido del sol de un trópico a otro. Además, delimitó las estaciones del año y asignó a éste 365 días. También se cree que fue el primero en estudiar el fenómeno magnético (nombre dado por Magnesia, lugar del hallazgo de la piedra imán), así como de trabajar en la propiedad eléctrica del ámbar (p.14).

Añade Quiros (2013) que "Thales buscaba el Primer Principio de todas las Cosas, el principio del que todo proviene y al que todo regresa y del que cada cosa particular no es sino una

variación" (párr.5). Además, Quiros (2013) señala que "Thales, se vinculó profundamente con el estudio de la Geometría, Dinámica, Óptica, Estática, Álgebra lineal y Geometría espacial" (párr.10).

Quiros (2013) afirma que:

> Otros pensadores de la época cuentan que Thales fue capaz de predecir a los jónicos la llegada de un eclipse de sol; que fue el responsable de descubrir la altura exacta de las pirámides egipcias usando como guías las sombras proyectadas en comparación con las del cuerpo humano se le adjudica y la división de un círculo por su diámetro en dos mitades iguales (párr.15).

Quiros (2013) señala que "Thales, descubrió el teorema, que actualmente lleva su nombre, mientras investigaba la condición de paralelismo entre dos rectas" (párr.22). La condición de paralelismo afirma que dos rectas son paralelas, si y sólo si, sus pendientes son iguales. Es decir, dos rectas paralelas tienen mismo ángulo de inclinación, lo que implica que sus tangentes son iguales.

Gargantilla (2018) señala que Thales, en cierta ocasión viajó hasta Egipto, un sacerdote egipcio le pregunta sobre cuál podría ser la altura de la pirámide del rey Khufu, Thales reflexiona, y a continuación contesta que no se conformaría con calcularla a ojo, sino que también la medirá sin ayuda de instrumentos (Artacho, 2014), con la ayuda de un bastón, una cuerda y un ayudante pudo calcular la altura de la pirámide de Keops (situada en Guiza) la más antigua de las siete maravillas del mundo.

Gargantilla (2018) afirma:

> El milesio calculó que la sombra proyectada por su altura guardaría una proporción similar a la altura de la pirámide con su sombra. De ahí dedujo que en el momento en el que su sombra fuese exactamente igual a su estatura, la sombra y la altura de la pirámide serían iguales. Thales, dibujó en la arena un círculo con un radio igual a su estatura y se situó en el centro. Cuando la sombra tocó la circunferencia, esto es, cuando la longitud de la sombra era igual que la altura, uno de sus ayudantes midió la sombra de la pirámide y de esta forma pudieron saber la altura de la misma. El matemático griego acababa de descubrir la relación matemática que señala el teorema que llevaría su nombre: **el teorema de Thales** (párr. 5).

Por su parte, Fernández (2015) señala que Thales utilizando la semejanza de triángulos resolvió dos problemas: ¿A qué distancia estaban los barcos enemigos? y ¿Qué altura tenía la gran pirámide de Keops?

> Cuando la ciudad de Mileto, situada en la costa griega, iba a ser atacada por los barcos enemigos, los soldados recurrieron a Thales. Necesitaban saber a qué distancia se encontraba una nave para ajustar el tiro de sus catapultas. El genio matemático resolvió el problema sacando una vara por la cornisa del acantilado,

> de tal forma que su extremo coincidiera con la visual del barco (Fernández, 2015, párr.10).

Conociendo su altura, la del acantilado y la longitud de la vara, calculó la distancia necesitada (Fernández, 2015). La distancia necesitada la calculó Thales usando el corolario que se deduce del teorema que lleva su nombre.

Fernández (2015) afirma que:

> Según narra Herodoto. Usando su teorema, el gran sabio Thales pensó que en el momento que su sombra midiese lo mismo que él, los rayos del Sol formarían un grado de 45 grados con la cima de la pirámide y con su cabeza. Y por tanto, en ese preciso instante la altura de la pirámide sería igual a la sombra misma (párr.15).

Complementando lo que señala Gargantilla.

"Más adelante hace un comentario y citando a Eudemo, Proclo afirma que Thales estableció cuatro teoremas" (Díaz, 2002, p.16):

1. El círculo se bisecta por su diámetro.

2. Los ángulos de la base de un triángulo con dos lados iguales son iguales.

3. Los ángulos opuestos de líneas rectas que se intersectan, son iguales.

4. Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno son iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los triángulos son congruentes.

"Hay un quinto teorema que tradicionalmente se incorpora a la lista anterior y que dice (Díaz, 2002, p.16)":

5. «El ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto».

El teorema de Thales conocido como "relación de semejanza" enuncia: si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado" lo que se traduce a su fórmula en forma de tres cocientes AB/AB'=AC/AC'=BC/B'C'. Cabe señalar que del teorema se deduce "la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelas" (Díaz, 2002, p.17). A continuación, se señala la proporcionalidad:

> Si dos rectas " r " y " r' " se cortan por un sistema de paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a los determinados por los puntos correspondientes en la otra (Díaz, 2002, p.17)

"La leyenda dice que Thales fue el primero en emplear la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes" (Díaz, 2002, p.17), ver la Figura 2.1:

Sean $L_1 // L_2 // L_3$ entonces se cumple que:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{DC}} \qquad \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{EC}} \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{EC}}$$

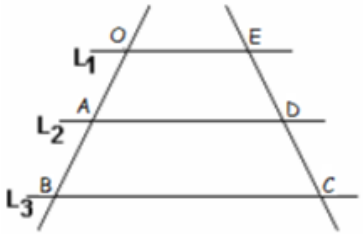


Figura 2.1 Se tienen tres rectas paralelas $L_1 // L_2 // L_3$ que se cortan por tres rectas que presentan un punto común (Teorema de Thales, s.f.).

"Proclo, el último gran filósofo griego escribió que Thales introdujo la geometría a Grecia, proveniente de Egipto" (Ruiz, s.f., párr.9).

En geometría, y con base en los conocimientos que adquirió en Egipto, Thales elaboró un conjunto de teoremas generales y de razonamientos deductivos a partir de los primeros (N/a, 2018).

"Todo ello fue recopilado posteriormente por Euclides en su obra *Elementos,* pero se debe a Thales el mérito de haber introducido en Grecia el interés por los estudios geométricos" (N/a, 2018, párr.9).

"El teorema de Thales es de gran importancia para las Matemáticas y éste fue dado a conocer gracias a Euclides ya que no se conocen escritos que haya dejado Thales" (N/a, 2016, párr.14).

> Se afirma precisamente que su principal contribución a la ciencia fue la introducción de demostraciones, aunque se trata básicamente de mostrar las derivaciones lógicas o las evidencias lógicas de unas proposiciones a otras. Esto es importante porque aportaba un requisito o una característica de lo que serían las matemáticas como disciplina (Ruiz, 2003, p.30)

Con base en los descubrimientos que realizó este notable pensador, es posible advertir que Thales llevó a cabo un pensamiento de tipo variacional, pues para él, cada cosa particular no es sino una variación. Se menciona anteriormente que entre lo que realizó, destaca la predicción, del eclipse solar que detuvo la batalla entre Alyattes y Cyaxares, y predecir a los jónicos la llegada de un eclipse de sol, la comparación, entre la magnitud del sol con la de la luna y la comparación entre las sombras proyectadas con las del cuerpo humano para calcular la altura exacta de las pirámides, y también la estimación, estimó que la sombra proyectada por su altura guardaría una proporción similar a la altura de la pirámide con su sombra. Además, en las formulaciones matemáticas que realizó Thales considera la medición. Las estrategias variacionales de predicción, comparación, entre otros, muy probablemente estuvieron presentes en la formulación del teorema de Thales.

En la siguiente sección se presenta el tratamiento de algunos libros de texto en los diferentes niveles educativos, secundaria, preparatoria y universidad.

2.2 Tratamiento de los libros de texto

A continuación, se describe a grandes rasgos el contenido de algunos libros de texto al azar donde se aborda el teorema de Thales. Se trata de algunos libros que emplean típicamente profesores de secundaria, preparatoria y universidad.

2.2.1 El teorema de Thales en los libros de texto de secundaria

Se hizo una revisión de contenido en los libros de texto de secundaria, donde se encontró que el teorema de Thales se aborda a partir del tercer año de secundaria.

En el libro de Briseño y Verdugo (2007), ver la Figura 2.2, se muestra el tratamiento del teorema de Thales se inicia mediante el análisis de la *Semejanza de Triángulos*, se explica cómo son las razones de los segmentos a, b, c y d, ver la Figura (a).

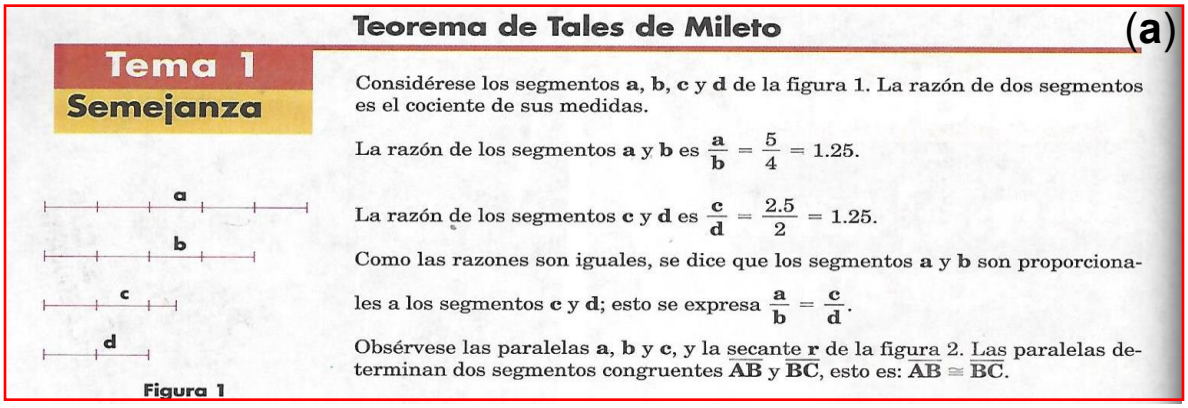


Figura 2.2 Tratamiento de Briseño y Verdugo (2007) del teorema de Thales a través del tema de semejanza de triángulos. (a) Explicación de los segmentos a, b, c y d.

Posteriormente se describe qué sucede con los triángulos congruentes A'MB' y B'NC', ver la Figura 2.2(b).

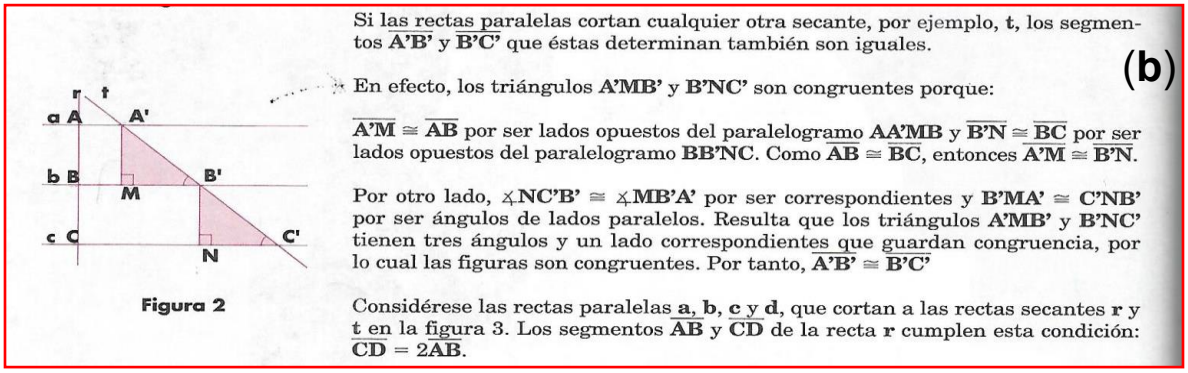


Figura 2.2 Tratamiento de Briseño y Verdugo (2007) del teorema de Thales a través del tema de semejanza de triángulos. (b) Líneas paralelas y triángulos congruentes.

A la vez señala la constante de proporcionalidad k, ver la Figura 2.2(c) y describe el teorema, ver la Figura 2.2(d).

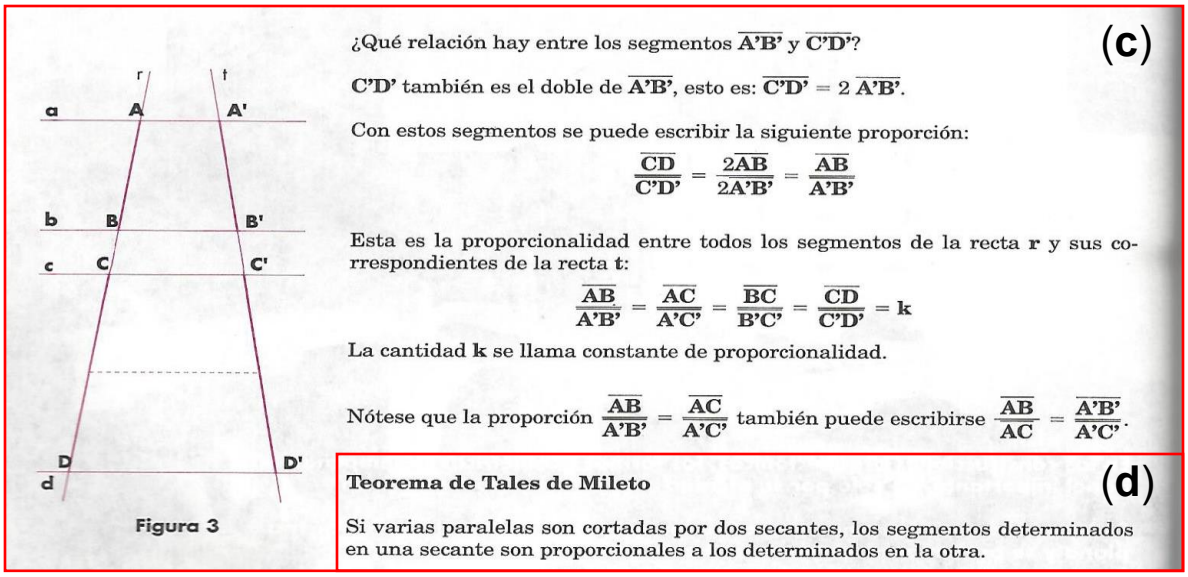


Figura 2.2 Tratamiento de Briseño y Verdugo (2007) del teorema de Thales a través del tema de semejanza de triángulos. (c) Constante de proporcionalidad k. (d) Teorema de Thales.

Por último, se propone resolver un conjunto de ejercicios, netamente matemáticos, de la aplicación de dicho teorema, ver la Figura 2.2(e) (Briseño y Verdugo, 2007).

Figura 2.2 Tratamiento de Briseño y Verdugo (2007) del teorema de Thales a través del tema de semejanza de triángulos. (e) Ejercicios matemáticos.

En este libro, se observó que el tratamiento que sigue es centrado en fórmulas, aquí se mostró solo un ejemplo de los ejercicios que aborda, sin embargo, en los otros cuatro ejercicios se pide obtener medidas de segmentos, de aplicar el teorema y de encontrar longitudes.

Por otro lado, en el libro de Arriaga y Benítez (2011), ver la Figura 2.3, el teorema de Thales viene incluido en el tema de *Formas Geométricas*. A diferencia del libro anterior, en este no se presenta teoría y pasa directamente a la aplicación del teorema mediante construcciones con segmentos en diversos problemas contextualizados tales como el problema de determinar la longitud de un cable, el problema de calcular el ancho de un lago y el problema de calcular la medida de los lados dada una figura, ver Figura (a).

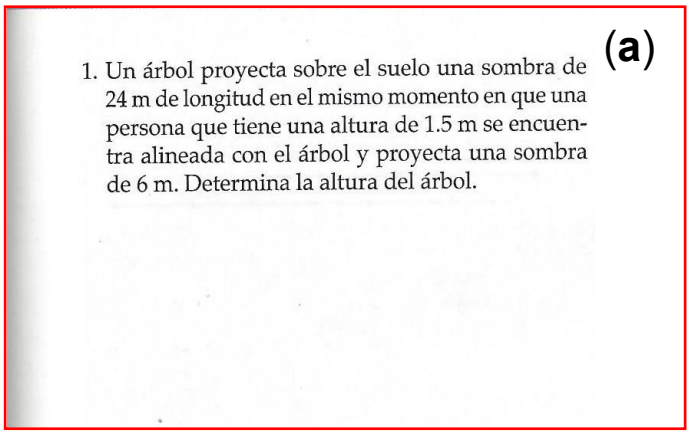


Figura 2.3 Tratamiento de Arriaga y Benítez (2011) del teorema de Thales a través del tema de formas geométricas. (a) Construcciones.

Propone resolver un conjunto de 10 actividades, ver la Figura 2.3(b).

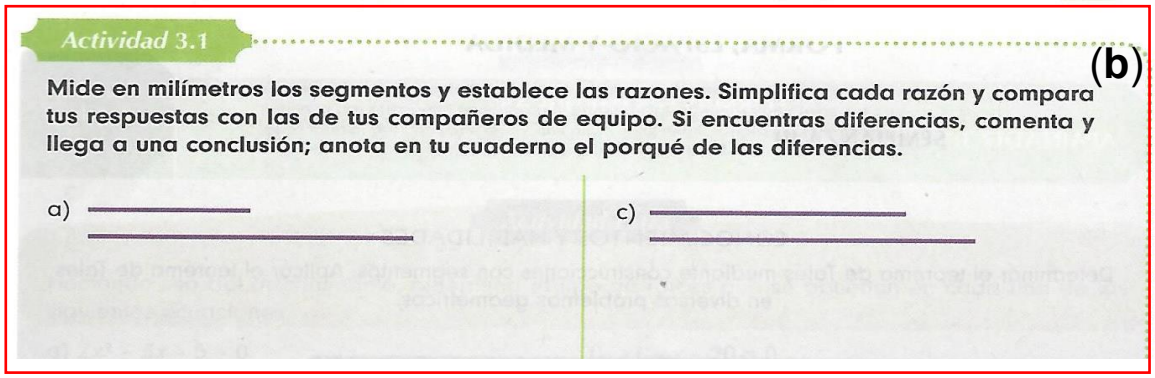
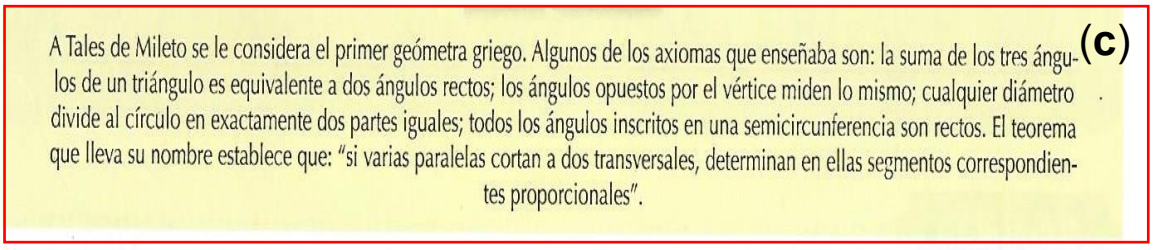


Figura 2.3 Tratamiento de Arriaga y Benítez (2011) del teorema de Thales a través del tema de formas geométricas. (b) Actividades.

Algunas actividades contienen datos relevantes, ver la Figura 2.3(c) y, por último, se propone resolver ejercicios de aplicación, ver la Figura 2.3(d) (Arriaga y Benítez, 2011).



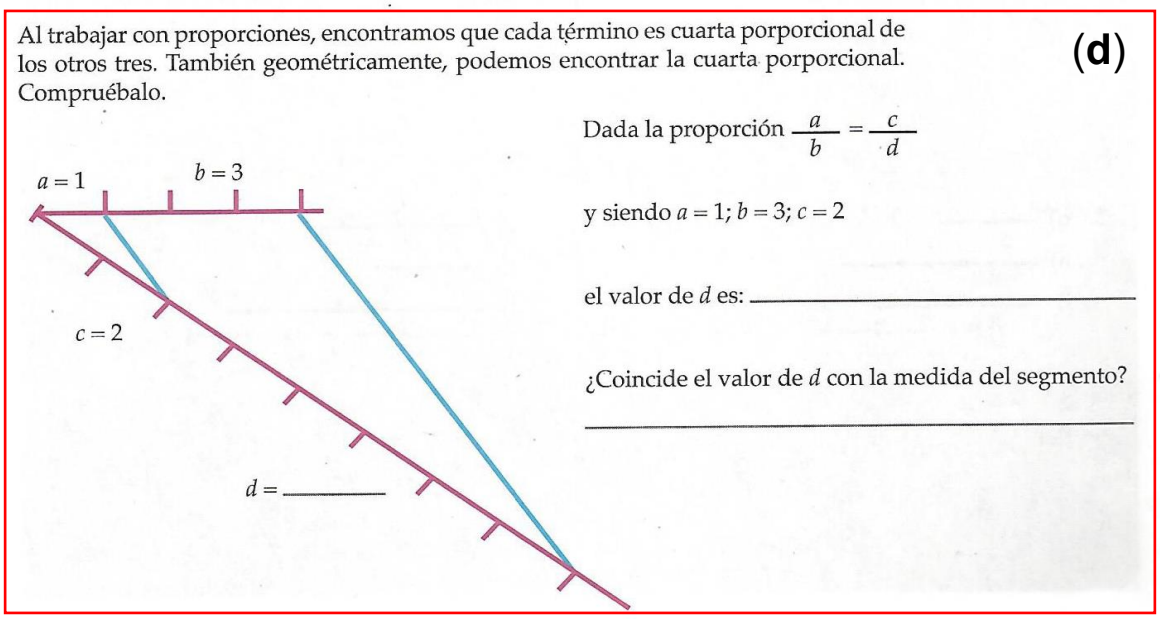


Figura 2.3 Tratamiento de Arriaga y Benítez (2011) del teorema de Thales a través del tema de formas geométricas. (c) Información. (d) Cuarta proporcional dada una proporción.

Otro libro empleado en Secundaria, es el de Sánchez (2001), ver la Figura 2.4, el teorema de Thales también se aborda a través del tema de *Semejanza de Triángulos*, la diferencia con los textos anteriores es notable, ya que aquí se menciona quién fue Thales y lo que sus conocimientos acerca de las Matemáticas le permitieron demostrar, ver la Figura (a).

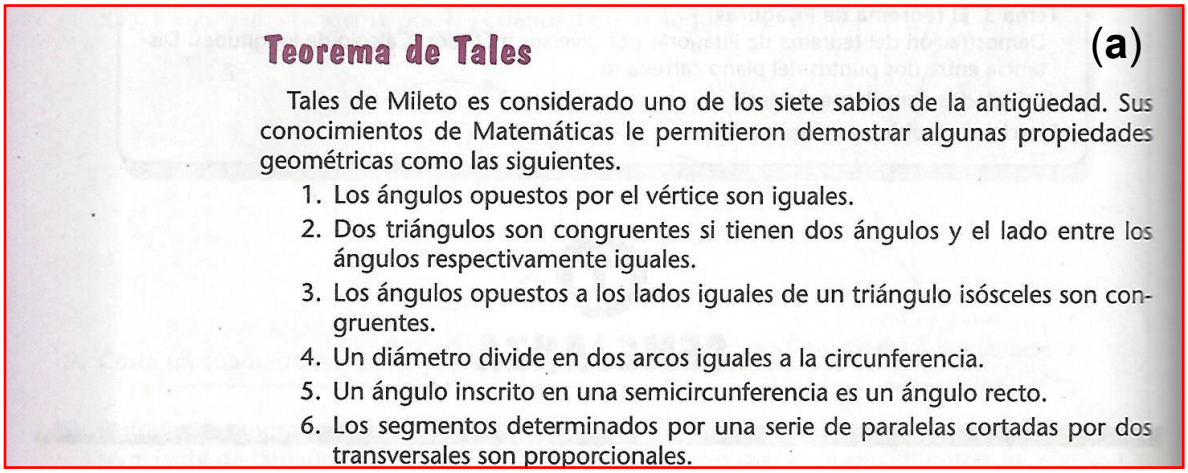


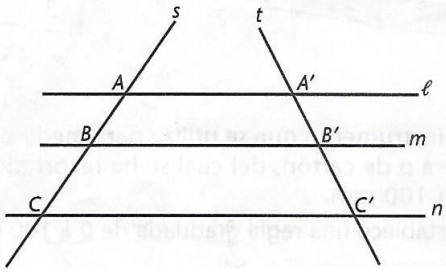
Figura 2.4 Tratamiento de Sánchez (2001) del teorema de Thales a través del tema de semejanza de triángulos. (a) Propiedades geométricas.

A su vez, se verifica a través de rectas paralelas la sexta propiedad geométrica: teorema de Thales llegando a su respectiva conclusión, ver la Figura 2.4(b).

La sexta propiedad se conoce con el nombre de **teorema de Tales.**

Para verificar el teorema de Tales podemos hacer lo siguiente. **(b)**

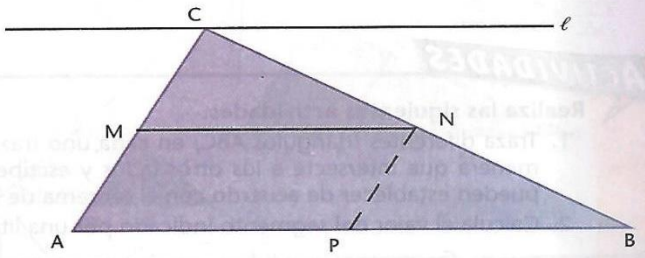
1. Trazamos dos rectas: *s* y *t*.
2. Trazamos varias rectas paralelas entre sí, como ℓ, *m* y *n*, de modo que intersecten a las rectas *s* y *t* en los puntos *A*, *B* y *C* a la primera y en *A'*, *B'* y *C'* a la segunda.



$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$, en este caso se dice que los segmentos son proporcionales. **(b)**

Escribe otras proporciones, igualando las razones en las que hayas obtenido el mismo valor.

Para resolver algunos problemas prácticos, trasladaremos el teorema de Tales a los triángulos.



1. Trazamos un triángulo ABC.
2. Encontramos el punto medio *M* del lado $\overline{AC}$ y se tiene:
   $\overline{CM} = \overline{MA}$
3. Trazamos una recta paralela a $\overline{AB}$ que pase por *M* y que intersecte al lado $\overline{BC}$ en el punto *N*.

¿Podremos decir que $\overline{BN} = \overline{NC}$?

4. Por el punto *C* se traza una paralela ℓ al lado $\overline{AB}$.

Observa que tenemos una figura parecida a la del teorema de Tales.

ℓ, $\overline{MN}$ y $\overline{AB}$ son las paralelas; $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son las transversales o secantes.

De acuerdo con el teorema de Tales, se puede escribir la proporción:

$\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}}$, pero $\overline{AM} = \overline{MC}$, por lo que $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = 1$; sustituyendo se obtiene:

$\frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = 1$, lo cual significa que $\overline{BN} = \overline{NC}$.

Figura 2.4 Tratamiento de Sánchez (2001) del teorema de Thales a través del tema de semejanza de triángulos. (b) Sexta propiedad.

Después, hace la relación en un triángulo ABC con sus respectivas proporciones dejando a los estudiantes una actividad que complemente, ver la Figura 2.4(c).

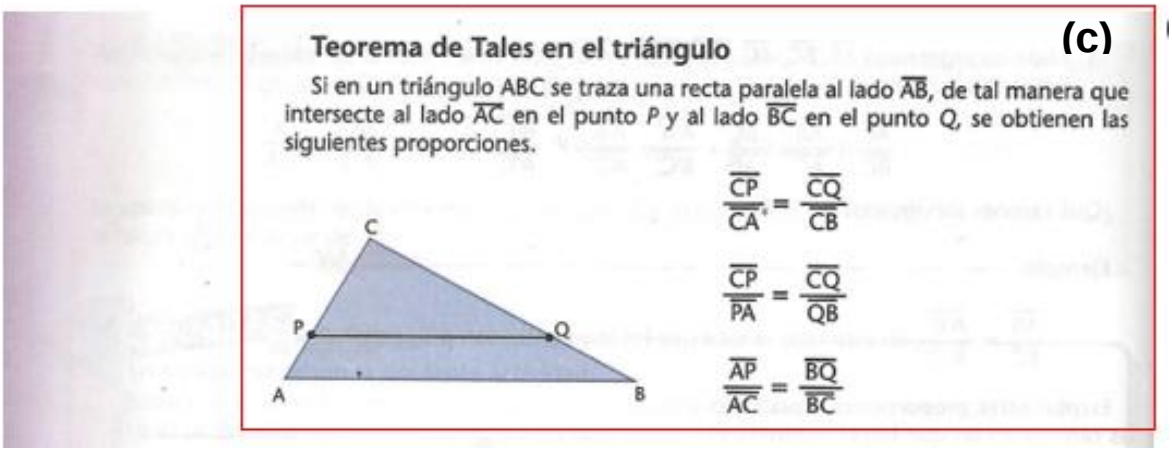


Figura 2.4 Tratamiento de Sánchez (2001) del teorema de Thales a través del tema de semejanza de triángulos. (c) Teorema de Thales.

Finalmente, se menciona lo que afirma el recíproco del teorema de Thales, ver la Figura 2.4(d) (Sánchez, 2001).

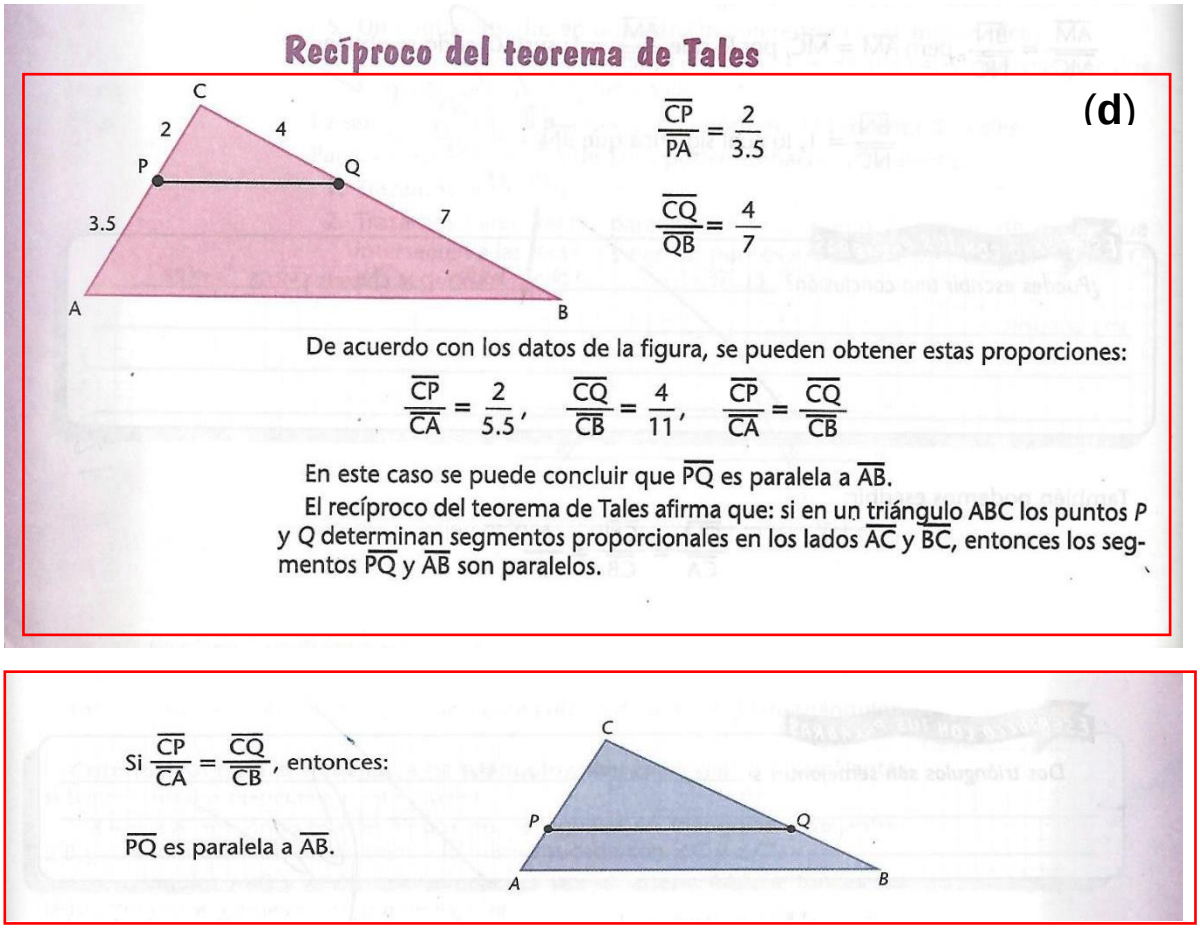


Figura 2.4 Tratamiento de Sánchez (2001) del teorema de Thales a través del tema de semejanza de triángulos. (d) Afirmación del recíproco.

A continuación, en la siguiente sección se describe el tratamiento que realizan los autores de algunos libros empleados en el nivel medio superior.

2.2.2 Tratamiento del teorema de Thales en el nivel medio superior

Un libro empleado en el nivel medio superior es de la SEP (2014), ver la Figura 2.5, se aborda el teorema de Thales en la asignatura de Matemáticas II a través del tema *de Resuelves problemas de semejanza de triángulos y Teorema de Pitágoras*, a diferencia de los libros de texto de secundaria se utiliza un nivel más elevado del teorema de Thales, es decir, se busca directamente su aplicación mediante resolución de problemas de congruencia y semejanza, ver la Figura (a).

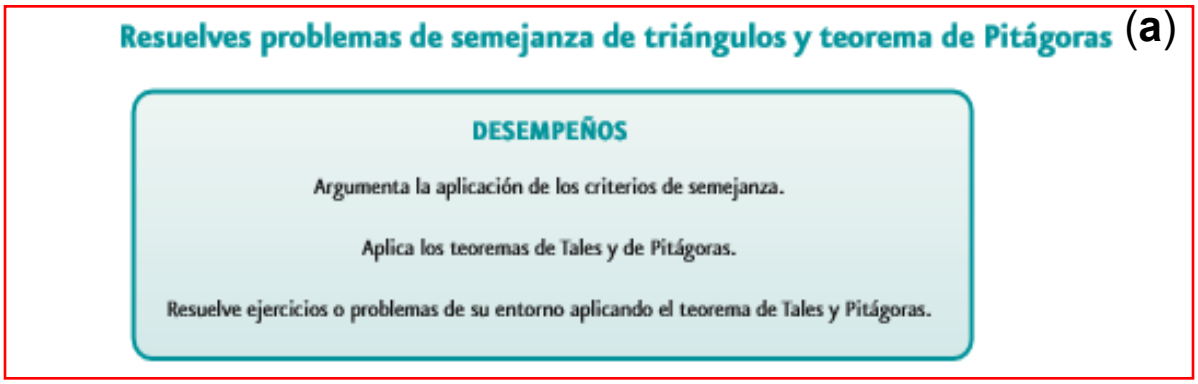


Figura 2.5 Tratamiento de la SEP (2014) del teorema de Thales a través del tema de resolución de problemas de semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras. (a) Aplicación del teorema de Thales.

Se presenta información relevante acerca de Thales, ver la Figura 2.5(b).

(b)

Pitágoras de Samos fue un filósofo y matemático griego que vivió aproximadamente en el año 600 antes de Cristo. Viajó por muchos lugares del Mediterráneo y alrededores, como Egipto, Italia, Babilonia y Fenicia; asimismo, a lo largo de su vida fundó varias escuelas de pensamiento pitagórico que influyeron de manera significativa en cuestiones sociales, espirituales y políticas. Él y su escuela sostenían ya el postulado de que la Tierra era redonda y basaban su filosofía en los números y su esencia.

Uno de sus principales discípulos fue Tales de Mileto, quien con un pensamiento filosófico relevante realizó importantes aportaciones en las áreas de la geometría y astrología.

Si bien la vida de estos dos personajes la conocemos por mezclas de historias y leyendas, lo que nos interesa en mayor parte son las aplicaciones reales y contemporáneas de su trabajo en nuestro entorno.

Ahora comenzamos con el Bloque III; en él podrás conocer y aplicar las aportaciones de estos protagonistas a la ciencia actual.

Figura 2.5 Tratamiento de la SEP (2014) del teorema de Thales a través del tema de resolución de problemas de semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras. (b) Información de Thales.

Finalmente, una serie de actividades para trabajar colaborativamente, como se observa en la siguiente Figura 2.5(c) (SEP, 2014).

(c)

Comenzaremos con la siguiente actividad: el docente describirá brevemente los criterios de semejanza de triángulos (o tú puedes realizar una búsqueda en, al menos, dos fuentes bibliográficas y en dos páginas electrónicas sobre esta información).

Al terminar, deberás contrastar con la información presentada sobre triángulos semejantes, destacando el criterio correspondiente de semejanza. Evalúa con una lista de cotejo la investigación realizada.

Ahora deberán reunirse en equipos y formular problemas relacionados con temáticas relevantes en su comunidad. Intercambien con otro equipo los ejercicios y/o problemas donde se apliquen los criterios de semejanza y resuélvanlos. Será necesario que utilicen una lista de cotejo para evaluar la solución de los ejercicios propuestos.

Figura 2.5 Tratamiento de la SEP (2014) del teorema de Thales a través del tema de resolución de problemas de semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras. (c) Actividades.

Por otro lado, en el libro de Varela (2013), ver la Figura 2.6, se aborda el teorema de Thales en la asignatura de Matemáticas II a través del tema de *Resuelves problemas de semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras*, aquí se busca aplicación en la resolución de ejercicios o problemas de su entorno, ver la Figura(a).

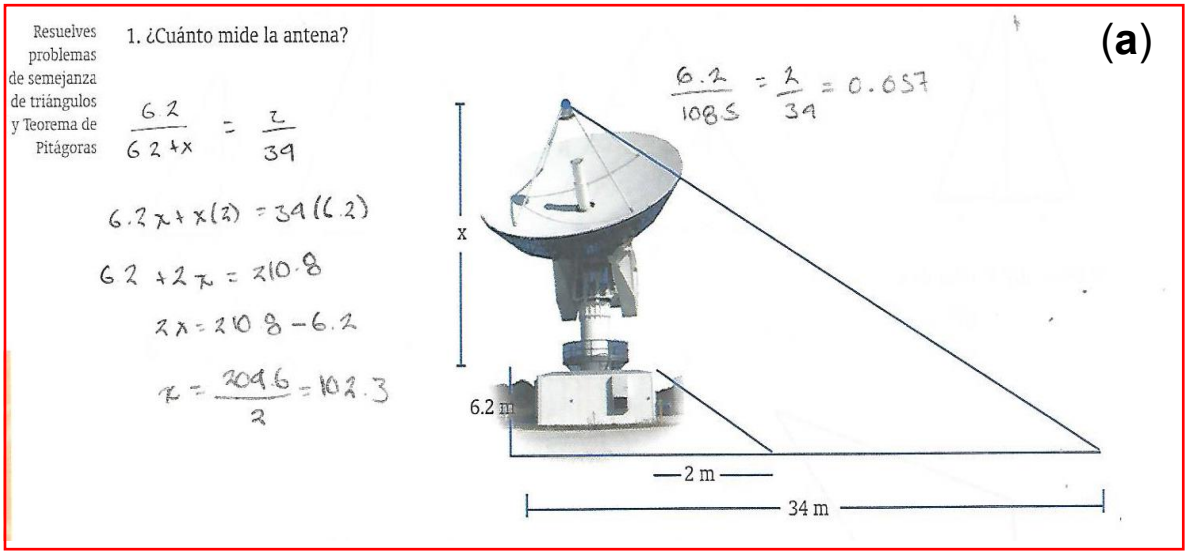


Figura 2.6 Tratamiento de Varela (2013) del teorema de Thales a través del tema Resuelves problemas de semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras. (a) Ejercicios.

Se presenta información relevante acerca de Thales y se enuncia el teorema, ver la Figura 2.6(b).

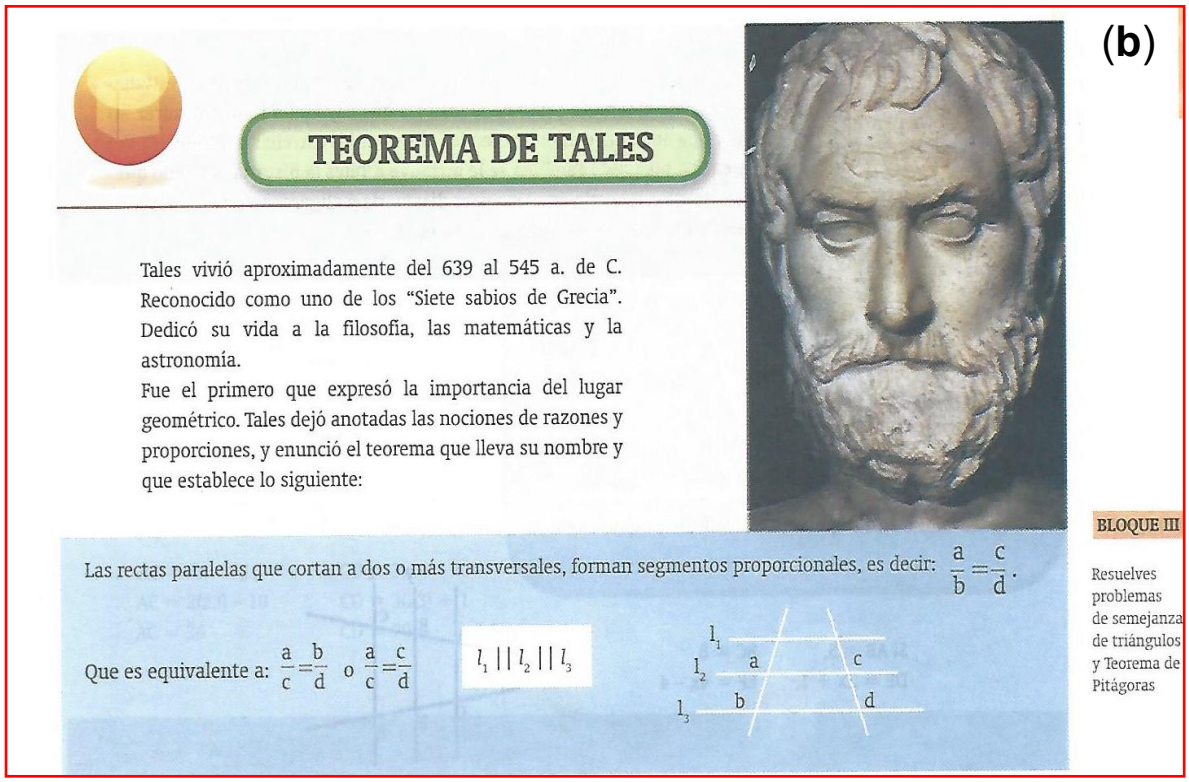
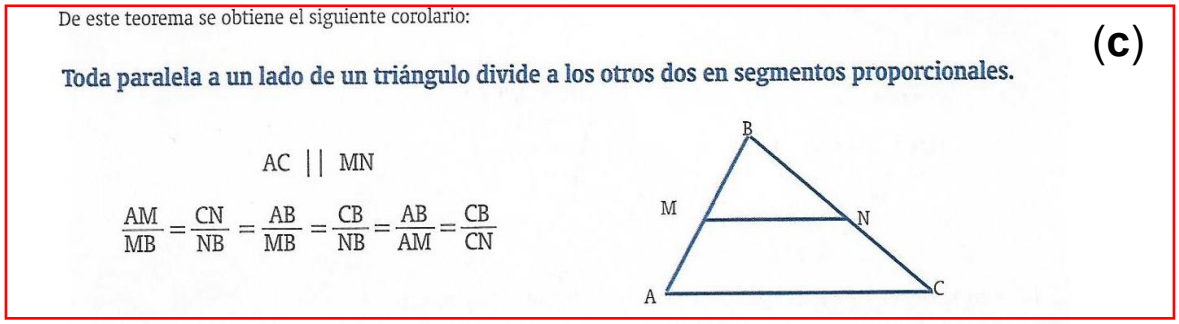


Figura 2.6 Tratamiento de Varela (2013) del teorema de Thales a través del tema Resuelves problemas de semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras. (b) Historia de Thales y teorema.

Se enuncia un corolario, ver la Figura 2.6(c); se muestra la propiedad de la bisectriz del ángulo interior de un triángulo, ver la Figura 2.6(d).



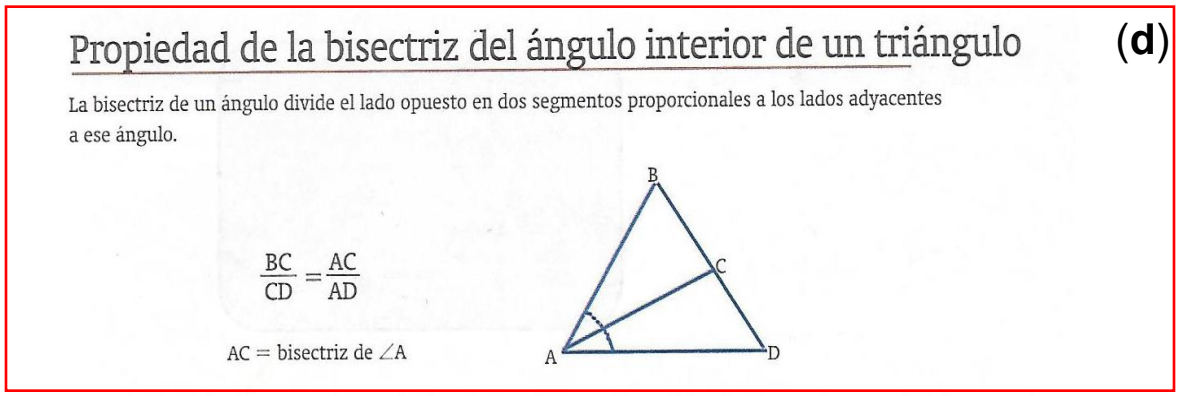


Figura 2.6 Tratamiento de Varela (2013) del teorema de Thales a través del tema Resuelves problemas de semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras. (c) Corolario. (d) Propiedad de la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo.

Se muestran una serie de ejemplos, ver la Figura 2.6(e); se propone una serie de ejercicios de aplicación para trabajar individualmente, ver la Figura 2.6(f) (Varela,2013).

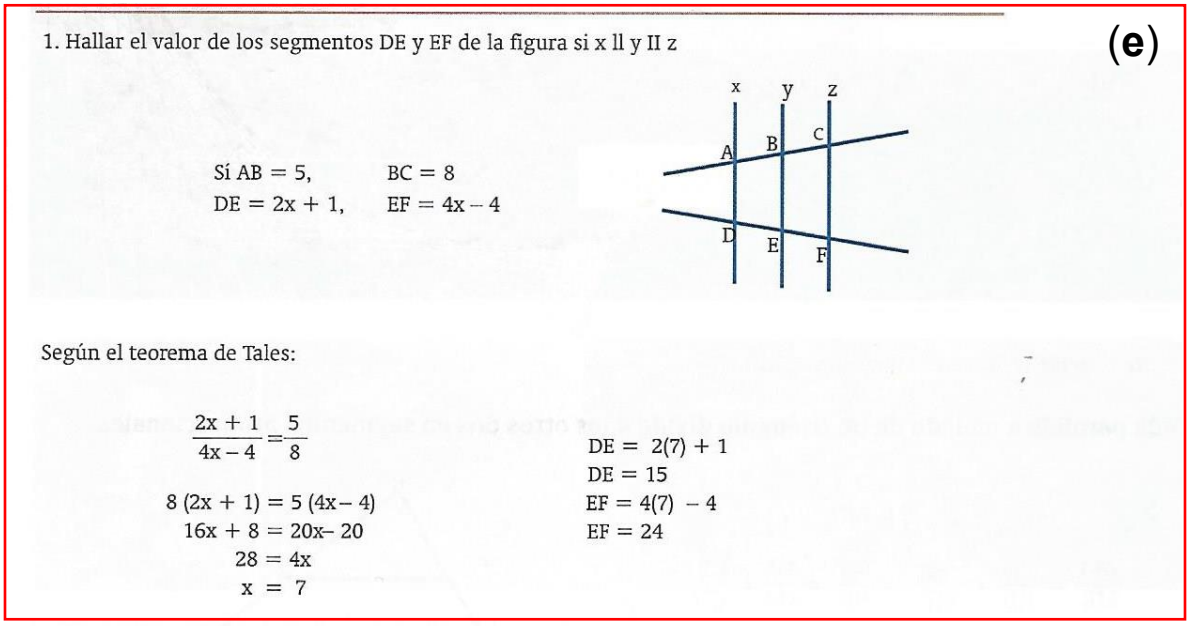


Figura 2.6 Tratamiento de Varela (2013) del teorema de Thales a través del tema Resuelves problemas de semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras. (e) Ejemplos. (f) Ejercicios.

A continuación, en la siguiente sección se describe el tratamiento que realizan los autores de algunos libros empleados en el nivel universitario.

2.2.3 El teorema de Thales en el nivel superior

Finalmente, se realizó una revisión de contenido en los libros de texto de la carrera de Licenciatura en Matemática Educativa, en pre-cálculo se encontró que el teorema de Thales se aborda de manera implícita en algunos ejercicios de aplicación. En este nivel se aborda muy poco este tema matemático y solamente se encuentra en libros específicos.

En el libro de Stewart, Redlin y Watson (2001), ver la Figura 2.7, se presenta a través del subtema de *Aplicaciones de la Trigonometría de los Triángulos Rectángulos*, aquí se presenta información acerca de Thales, ver la Figura(a).

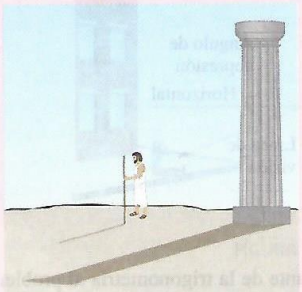
(a)

Tales de Mileto (circa 625–547 a.C.) es el legendario fundador de la geometría griega. Se dice que calculó la altura de una columna griega al comparar la longitud de la sombra de su bastón con la de la columna. Usando las propiedades de los triángulos semejantes, argumentó que la razón de la altura h de la columna y la altura h' de su bastón era igual a la razón de la longitud s de la sombra de la columna y la longitud s' de la sombra del bastón:

$$\frac{h}{h'} = \frac{s}{s'}$$

En vista que tres de estas cantidades son conocidas, Tales pudo calcular la altura de la columna.

Según la leyenda, Tales usó un método similar para determinar la altura de la Gran Pirámide de Egipto, una hazaña que impresionó al rey de Egipto. Plutarco escribió que "aunque él (el rey de Egipto) lo admiraba (a Tales) debido a otras cosas, particularmente le agradaba la forma mediante la cual midió la altura de la pirámide sin ningún esfuerzo o instrumento". El principio utilizado por Tales, es decir, el hecho que las razones de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales, forma los fundamentos de la trigonometría.



EJEMPLO 5 ■ Determinación de la altura de un árbol

Un pino gigante proyecta una sombra de 532 pies de largo. Determine la altura del árbol si el ángulo de elevación del Sol es de 25.7°.

SOLUCIÓN Suponga que la altura del árbol es h. De la figura 10 vemos que

$$\frac{h}{532} = \tan 25.7° \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 532 \tan 25.7° \qquad \text{Multiplique por 532}$$

$$\approx 532(0.48127) \approx 256 \qquad \text{Utilice una calculadora}$$

Por lo tanto, la altura del árbol es de aproximadamente 256 pies.

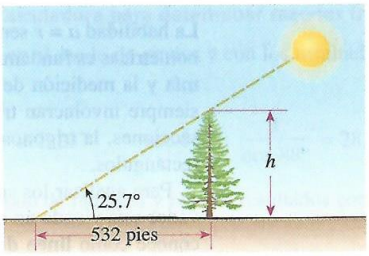


FIGURA 10

EJEMPLO 6 ■ Un problema que involucra triángulos rectángulos

Desde un punto sobre el suelo a 500 pies de la base de un edificio, se observa que el ángulo de elevación hasta la parte superior del edificio es de 24° y que el ángulo de elevación hasta la parte superior del asta bandera del edificio es de 27°. Determine la altura del edificio y la longitud del asta bandera.

SOLUCIÓN La figura 11 ilustra la situación. La altura del edificio se encuentra de la misma manera que se hizo para la altura del árbol del ejemplo 5.

$$\frac{h}{532} = \tan 24° \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 500 \tan 24° \qquad \text{Multiplique por 500}$$

$$\approx 500(0.4452) \approx 223 \qquad \text{Utilice una calculadora}$$

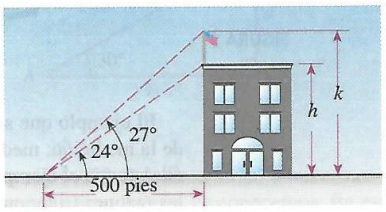
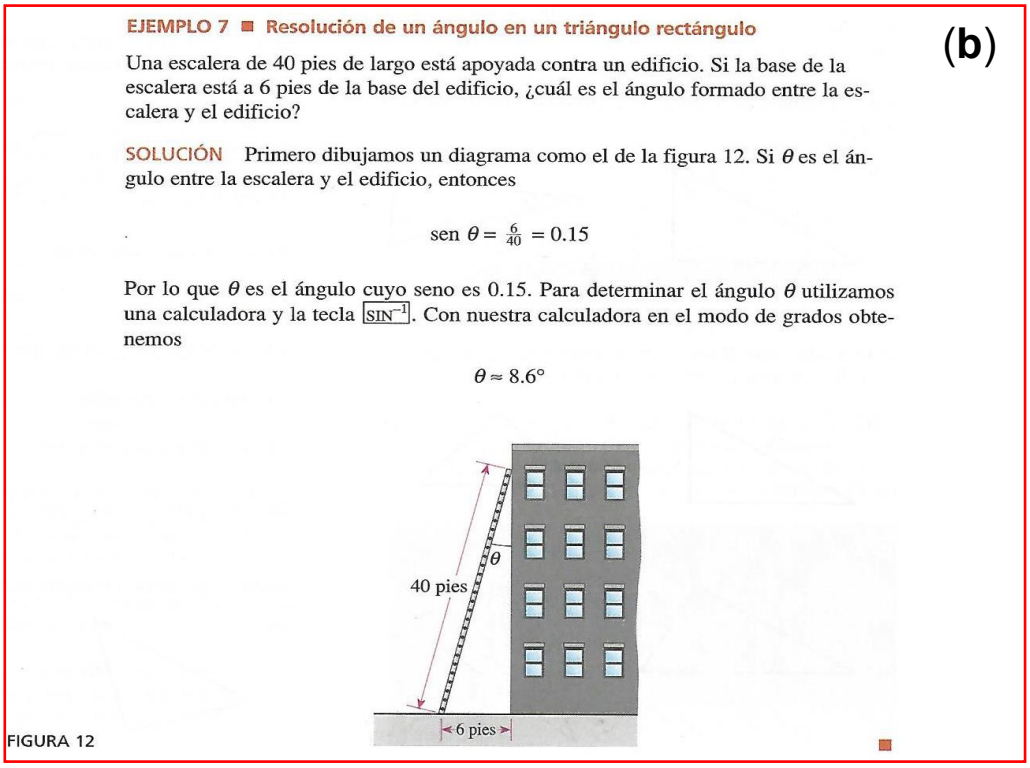


FIGURA 11

Figura 2.7 Tratamiento de Stewart, Redlin y Watson (2001) del teorema de Thales a través del subtema Aplicaciones de la Trigonometría de los Triángulos Rectángulos. (a) Se presenta información.

El teorema está implícito en los ejemplos contextualizados que abarca el tema *Funciones Trigonométricas de los Ángulos*, complementando con una serie de ejercicios de aplicación, ver la Figura 2.7(b) (Stewart, Redlin y Watson, 2001).



EJEMPLO 7 ■ Resolución de un ángulo en un triángulo rectángulo

(b)

Una escalera de 40 pies de largo está apoyada contra un edificio. Si la base de la escalera está a 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo formado entre la escalera y el edificio?

SOLUCIÓN Primero dibujamos un diagrama como el de la figura 12. Si θ es el ángulo entre la escalera y el edificio, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{6}{40} = 0.15$$

Por lo que θ es el ángulo cuyo seno es 0.15. Para determinar el ángulo θ utilizamos una calculadora y la tecla $\boxed{\text{SIN}^{-1}}$. Con nuestra calculadora en el modo de grados obtenemos

$$\theta \approx 8.6°$$

FIGURA 12

Figura 2.7 Tratamiento de Stewart, Redlin y Watson (2001) del teorema de Tales a través del subtema Aplicaciones de la Trigonometría de los Triángulos Rectángulos. (b) Ejemplos contextualizados.

Por otro lado, en la carrera de Licenciatura en Arquitectura, se encontró que el teorema de Thales se aborda de manera implícita en algunos ejercicios específicos.

En el libro de Hernán (1974), ver la Figura 2.8, se presenta en términos generales no como un concepto, los arquitectos lo utilizan, pero generalizado aplicado a construcciones, por ejemplo, explicaré cómo sucede esta relación, primeramente, se explica lo que se entiende por transferente "reducir figuras pequeñas en grandes y grandes en pequeñas", ocurre con el transporte (Serlio) o transferente de "una colonna canellata", cuyo grabado de Serlio debió de inspirar el dibujo de Hernán Ruiz. La idea básica arranca del conocido teorema de Thales de Mileto "los segmentos homólogos determinados sobre dos rectas concurrentes por un sistema de paralelas son proporcionales". Serlio, sin hacer mención de Thales, pues el conocimiento generalizado de este teorema lo hacía innecesario, añade algunos ejemplos, como el de una cornisa, ver la Figura (a).

de Hernán Ruiz. La idea básica arranca del conocido teorema de Tales de Mileto de que «los segmentos homólogos determinados sobre dos rectas concurrentes por un sistema de paralelas son proporcionales». Serlio, sin hacer mención de Tales, pues el conocimiento generalizado de este teorema lo hacía innecesario, añade algunos ejemplos, como el de una cornisa que «havierà da essere maggiore». Del mismo modo nuestro arquitecto recoge

(a)

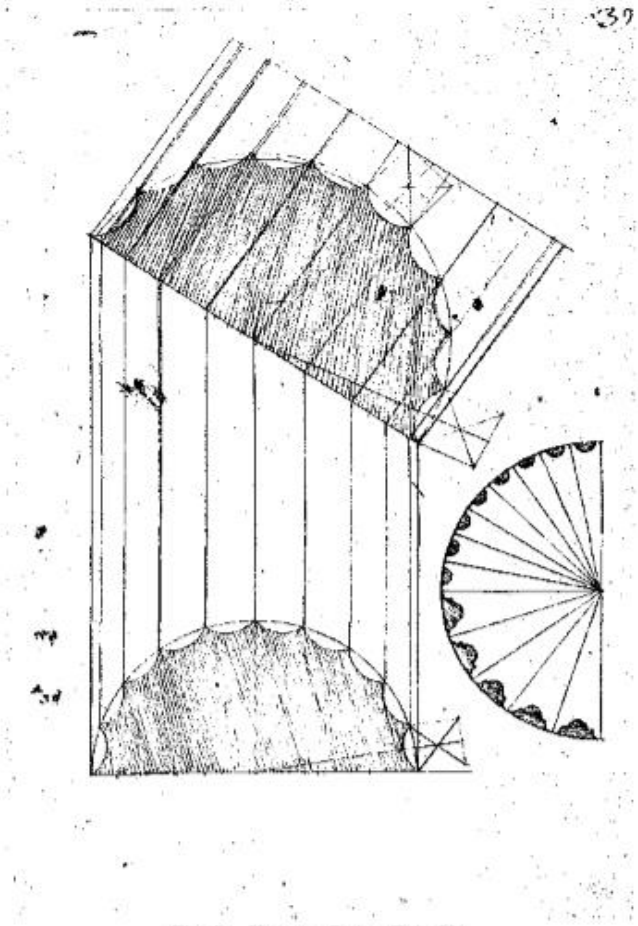


Fig. 7. Hernán Ruiz (Fol. 39).

entre sus dibujos una serie de cornisas (45), pasando luego al «transferente para hallar qualquiera bacuo o maçiço» (46), al «modo de trasferir una por-

Figura 2.8 Tratamiento de Hernán (1974) del teorema de Thales a través de una generalización. (a) Concepto del teorema de Thales (Hernán, 1974, p.15).

En la serie de los transferentes para "proporcionar los artesones en los bolsores" de las bóvedas encontramos varios sistemas para transportar las distintas "labores", pero siempre sobre la base de segmentos homólogos en líneas concurrentes determinados por un sistema de paralelas. Este mismo procedimiento se utiliza para hallar el despiece de un arco o bóveda, cuya altura ha de ser igual a la de un arco de medio punto ya conocido, pero cuya luz es diferente. Es ésta una labor previa y necesaria para solucionar, por ejemplo, el encuentro en rincón de claustro de dos bóvedas de distinta luz, ver la Figura 2.8(b).

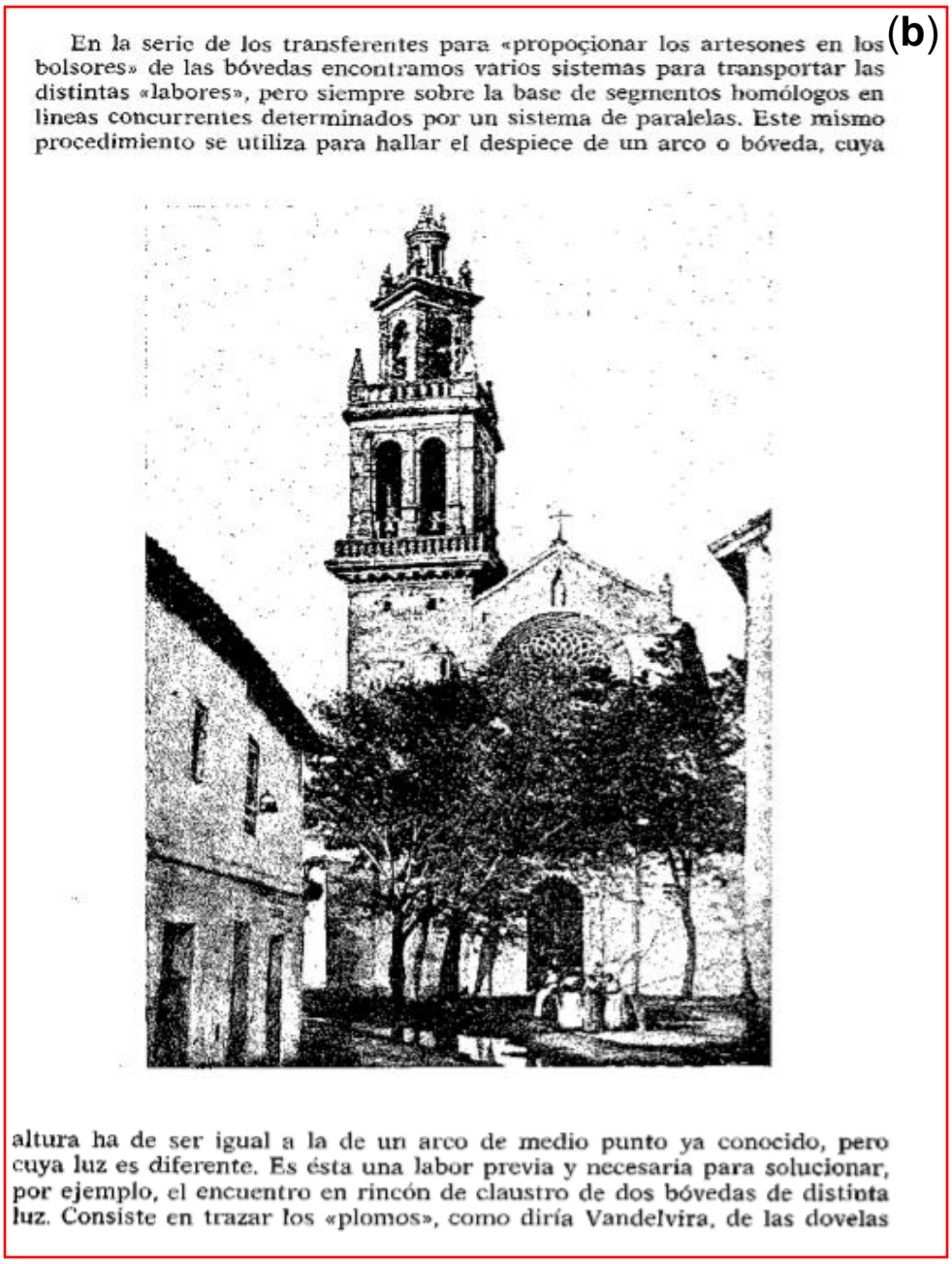


Figura 2.8 Tratamiento de Hernán (1974) del teorema de Thales a través de una generalización. (b) segmentos homólogos en líneas concurrentes determinados por un sistema de paralelas (Hernán, 1974, p.17).

Consiste en trazar los "plomos", como diría Vandelvira, de las dovelas sobre la línea que determina la anchura de la bóveda mayor. Allí, y una vez señalados los segmentos homólogos, se trazan sobre ellos una serie de líneas paralelas, que van a determinar el sólido capaz de las dovelas del arco mayor, faltando tan sólo llevar sobre aquellas líneas la misma altura que tienen el arco menor, ver la Figura 2.8(c) (Hernán, 1974).

sobre la línea que determina la anchura de la bóveda mayor. Allí, y una vez señalados los segmentos homólogos, se trazan sobre ellos una serie de líneas paralelas, que van a determinar el sólido capaz de las dovelas del arco mayor, faltando tan sólo llevar sobre aquellas líneas la misma altura que tienen en el arco menor. En este mismo folio aparece igualmente la escuadría de un salmer y de la dovela inmediata, planteando tímidamente ciertos problemas de estereotomía. (c)

Figura 2.8 Tratamiento de Hernán (1974) del teorema de Thales a través de una generalización. (c) Trazado de plomos.

En Ingeniería, en investigación, el teorema de Thales se aborda en el artículo de Sánchez (2013).

En el trabajo de Sánchez (2013), ver la Figura 2.9, se encontró el teorema de Thales en un artículo esto porque en los libros de texto no se localizó dicho teorema. Este artículo trata variables críticas del proceso de fabricación de una tubería helicoidal: longitud, ángulo de inclinación y rotaciones de costura y longitud de lámina requerida para su fabricación. Se muestra la relación del tubo helicoidal cortado en espiral con el teorema de Thales aplicado directamente al plano del tubo (Sánchez, 2013).

Figura 8. Actividades de doblado en campo de tubería helicoidal SAWH. Obsérvese la perfección del doblado y ausencia de "peaking effect".

Figura 2.9 Tratamiento de Sánchez (2013) del teorema de Thales a través de un tubo helicoidal (Sánchez, 2013, p.15-18).

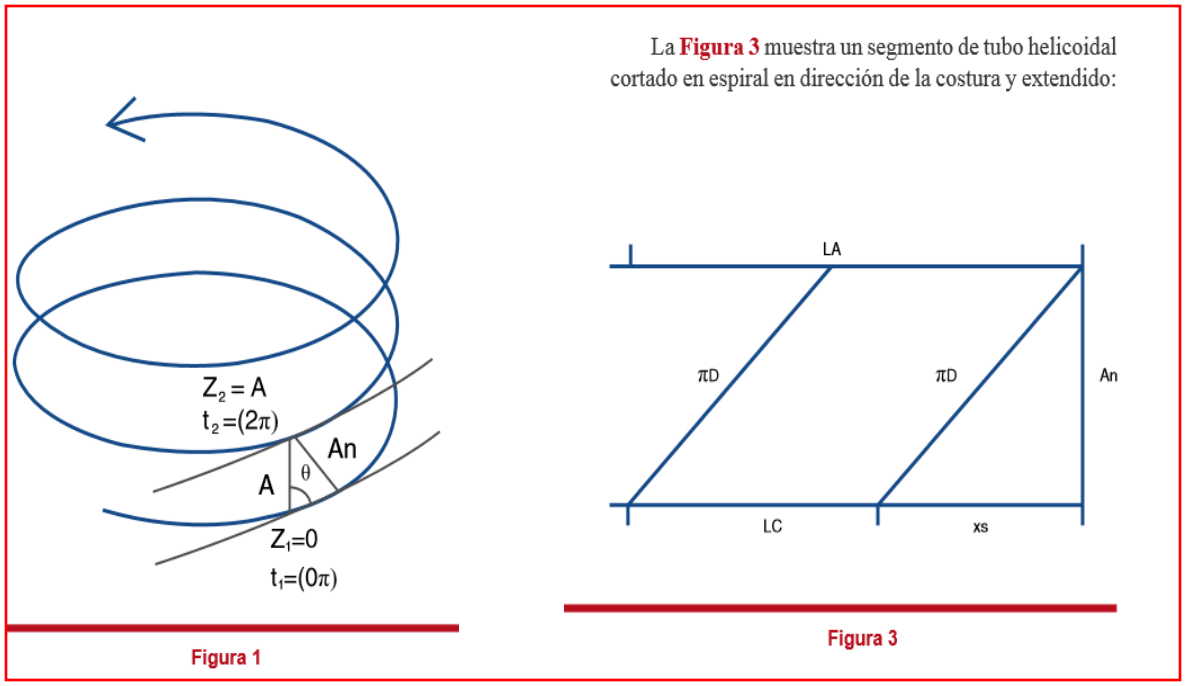


Figura 2.9 Tratamiento de Sánchez (2013) del teorema de Thales a través de un tubo helicoidal (Sánchez, 2013, p.15-18).

2.2.4 Algunos comentarios en relación con el tratamiento de los libros de texto

Como se puede observar, en los libros de texto que se revisaron, a pesar de tener diferencias notables, es posible observar semejanzas en el sentido de que los textos presentan una definición del teorema de Thales y posteriormente se busca que el alumno aplique dicha definición en cierto conjunto de situaciones cotidianas, por ejemplo, ejercicios que involucran al teorema en situaciones problemáticas donde se solicita calcular la longitud de la sombra de una pirámide de Egipto hasta calcular la longitud de una antena de casa, los cuales no son significativos para los estudiantes, es decir, no les encuentran sentido trascendente en su vida diaria, ya que aparecen como ejercicios del libro para obtener una calificación u obtener puntos extra por el libro completo. Es de esperarse entonces que los alumnos no logran una reflexión real de este tema matemático, ya que solamente se aprenden las fórmulas de forma memorística, al ser irrelevantes para ellos.

En el nivel de secundaria se señala el teorema de Thales de manera sintetizada como el libro de Sánchez (2001) o bien, como el libro de Briseño y Verdugo (2007) que demuestra el teorema por medio de un ejemplo particular.

En cambio, en los libros de texto de nivel medio superior se busca directamente la aplicación del teorema de Thales mediante resolución de problemas, además, en este nivel se enuncian corolarios y propiedades tal como la propiedad de la bisectriz del ángulo interior de un triángulo.

Por otro lado, en los libros de texto del nivel superior, el teorema de Thales se aborda muy poco, tendrían que ser libros específicos y de manera implícita en ejercicios determinados o contextualizados.

En ningún libro se abordan situaciones de aprendizaje, pues el tratamiento de los libros de texto está centrado en el objeto matemático acabado (pensado en términos de una definición, fórmula y propiedades asociadas) no en los alumnos, aún con ejercicios que son de la vida cotidiana no son relevantes para el estudiante.

2.3 Teorema de Thales en los planes y programas de estudio

En esta sección se lleva a cabo un breve análisis de cuáles son las competencias o habilidades que se pretenden desarrollar en el alumno a partir de la enseñanza del contenido del teorema de Thales en el aula. La revisión se llevó a cabo en planes y programas de nivel secundaria, preparatoria y universidad.

2.3.1 Nivel secundaria

Como se ha señalado anteriormente, el teorema de Thales se enseña en tercero de secundaria, en este contenido se aborda la resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Thales en el bloque III, eje temático dos (Secretaría de Educación Pública, 2011).

La SEP (2011) señala que, entre los propósitos del estudio de las Matemáticas en Secundaria, se destaca que los alumnos utilicen los criterios de congruencia y semejanza, así como el teorema de Thales al resolver problemas. Los estándares curriculares de Matemáticas presentan la visión de una población que sabe utilizar los conocimientos matemáticos. Comprenden el conjunto de aprendizajes que se espera de los alumnos en los cuatro periodos escolares para conducirlos a altos niveles de alfabetización matemática y se organizan en cuatro ejes temáticos:

1. Sentido numérico y pensamiento algebraico

2. Forma, espacio y medida

3. Manejo de la información

4. Actitud hacia el estudio de las matemáticas

La progresión debe entenderse como: transitar del lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático para explicar procedimientos y resultados, ampliar y profundizar los conocimientos, de manera que se favorezca la comprensión y el uso eficiente de las herramientas y avanzar desde el requerimiento de ayuda al resolver problemas hacia el trabajo autónomo (SEP, 2011).

Solo en el eje temático dos, se espera que los alumnos sean capaces de resolver problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura (SEP, 2011).

La SEP (2011) señala que, al término de la Educación Básica, el alumno desarrolla un concepto positivo de sí mismo como usuario de las matemáticas, el gusto y la inclinación por comprender y utilizar la notación, el vocabulario y los procesos matemáticos. Además, aplica el razonamiento matemático a la solución de problemas personales, sociales y naturales, aceptando el principio de que existen diversos procedimientos para resolver problemas particulares. Asimismo, desarrolla el hábito del pensamiento racional y utiliza las reglas del

debate matemático al formular explicaciones o mostrar soluciones. Finalmente, comparte e intercambia ideas sobre los procedimientos y resultados al resolver problemas (SEP, 2011).

Las cuatro competencias matemáticas que deberá desarrollar el alumno (SEP, 2011) son:

1. Resolver problemas de manera autónoma. Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones. Se trata de que los alumnos sean capaces de resolver un problema utilizando más de un procedimiento, reconociendo cuál o cuáles son más eficaces.

2. Comunicar información matemática. Comprende la posibilidad de que los alumnos expresen, representen e interpreten información matemática contenida en una situación o en un fenómeno.

3. Validar procedimientos y resultados. Consiste en que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal.

4. Manejar técnicas eficientemente. Se refiere al uso eficiente de procedimientos y formas de representación que hacen los alumnos al efectuar cálculos, con o sin apoyo de calculadora.

Los libros de texto de Matemáticas no apoyan la intencionalidad del programa de estudios de secundaria debido a que presentan una enseñanza centrada en el objeto matemático acabado (pensado en términos de una definición, fórmula y propiedades asociadas).

En el año 2018 en el Nuevo Modelo Educativo de secundaria (Secretaría de Educación Pública, 2017) se eliminó por completo del programa de matemáticas el contenido del teorema de Thales, pero se mantiene la idea de que los alumnos desarrollen competencias matemáticas indicadas en el currículo. Por lo que el planteamiento del teorema de Thales en el aula contribuiría al desarrollo de dichas competencias.

2.3.2 Nivel medio superior y nivel superior

En el nivel medio superior entre las materias que se imparten en el segundo semestre se aborda la de Geometría que contiene el tema del teorema de Thales, los propósitos que implica es que el estudiante interprete y resuelva problemas contextualizados que requieran la orientación espacial, a través del análisis, representación y solución por medio de figuras y procedimientos geométricos y algebraicos. En Geometría se abordan teoremas de triángulos, en el contenido central se aborda el estudio de las figuras geométricas y sus propiedades, tratamiento visual de las propiedades geométricas, los criterios de congruencia y semejanza de triángulos, entre otras. El objetivo es aprender matemáticas no reduciéndose a la mera resolución de problemas escolares, se tendrá que asumir un cambio de actitud hacia el saber; es decir, hasta el conocimiento en uso. Habrá de reconocerse el carácter secuencial, transversal y funcional del conocimiento matemáticos a través de situaciones diversas. Estos aprendizajes, en tanto su naturaleza funcional y transversal, habrán de servir a lo largo de la vida en situaciones diversas y cambiantes, de ahí que la mejora de los programas se centre en el aprendizaje del estudiantado (SEP, 2017).

En el contenido específico se aborda el teorema de Thales y semejanza de triángulos, aquí se espera que el alumno interprete visual y numéricamente al teorema de Thales en diversos contextos y situaciones cotidianas. El producto esperado será por ejemplo medir la altura de un árbol a partir de su sombra (Godoy et al., 2017).

La propuesta de este trabajo puede ser implementada en el nivel medio superior dados los requerimientos señalados por el programa de este nivel.

Por otro lado, en el nivel superior en el área de ingeniería, entre las materias que aborda el plan de estudios se encuentran Puentes (con el tema Estudios Hidráulicos), Obras Hidráulicas (con el tema Infraestructura hidráulica), Estructuras de Acero (Conexiones soldadas) e Hidráulica I (Tuberías en paralelo) donde posiblemente los docentes soliciten a los alumnos investigar un tema específico donde se encuentre involucrado implícitamente el teorema de Thales en algún ejercicio de aplicación o problema específico (U.A.S.L.P., 2014).

En el área de arquitectura, entre las materias que aborda el plan de estudios se encuentran Geometría, Forma y Estructura; Geometría, Volumen y Dimensión; y Geometría Estructural a Compresión y Tensión donde se encuentra el teorema de Thales generalizado utilizado en alguna construcción como bóvedas, entre otras (U.A.S.L.P., 2013).

2.3.3 Comentarios en relación con los planes y programas de estudio

El teorema de Thales como se ha mencionado anteriormente, se aborda a partir del tercer grado de Secundaria con el objetivo de que los alumnos resuelvan diversos ejercicios para la aplicación del teorema.

En cambio, en el nivel medio superior tienen asignaturas que implican directamente teoremas de triángulos, criterios de congruencia y semejanza de triángulos. El objetivo es que el alumno no sólo resuelva ejercicios de aplicación, sino que deberá poner en juego sus conocimientos de matemáticas para entender un problema contextualizado o una situación cotidiana.

A diferencia de los niveles anteriores, en el nivel superior depende de la carrera que se estudie, es decir, posiblemente se aborde el teorema de Thales en Licenciatura en Matemática Educativa, Ingeniería Civil y Licenciatura en Arquitectura en la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, ya que en estas tres contienen en sus planes de estudio algunas asignaturas particulares donde se aborda el teorema en algún ejercicio de aplicación, problema específico o bien, en alguna construcción.

Como se puede observar no hay un seguimiento en el tratamiento del teorema de Thales desde secundaria hasta universidad pues no se relacionan los programas. Además, entre los tres niveles educativos, solo en secundaria se enseña dicho teorema, pues en éste se le da más relevancia puesto que se busca que el alumno resuelva problemas que impliquen utilizarlo. En secundaria la enseñanza del teorema de Thales está centrada en el contenido y en cómo lo aborde el docente, puesto que solo tiene relevancia saber aplicar la fórmula y no se toma en cuenta el contexto social del alumno.

En preparatoria ocurre algo similar, los ejemplos o ejercicios que se abordan en este contenido son de la vida cotidiana del alumno y problemas contextualizados, pero el tratamiento del teorema de Thales sigue centrado en el contenido y en el docente, pues se debe saber aplicar la fórmula para llegar a la solución de un problema.

En la universidad se aborda el teorema de Thales en algunas asignaturas de las carreras antes mencionadas, se da el caso en donde se deba aplicar la fórmula del teorema de Thales para resolver algunos ejercicios o problemas específicos.

2.4 Algunas investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje del teorema de Thales

Massuquetto y Zanlorenzi (2014) pretenden a través de la historia de las matemáticas comprobar de qué manera será posible organizar el trabajo pedagógico, buscando aproximar el conocimiento matemático, articulado a su enseñanza y aprendizaje.

Al abordar, explicitar y destacar a través de la *Historia de las Matemáticas* la importancia del teorema de Thales proponen, por medio de su artículo, estrategias que incentiven la creatividad, la intuición y la argumentación de los alumnos, ayudando a obtener un aprendizaje permanente y significativo. Como también, problematizar la interpretación y la producción de cálculos por la observación de la regularidad del teorema de Thales. Todo contenido matemático, presentado y expuesto en el aula, proporcionó al alumno la visión de que éste tiene una historia que se puede conocer, aprender y que lo hace más atractivo y estimula la imaginación (Massuquetto y Zanlorenzi, 2014).

Massuquetto y Zanlorenzi (2014) realizaron un estudio con alumnos de primaria, éste se dividió en tres momentos, el primero fue investigar el conocimiento del alumnado sobre la *Historia de las Matemáticas,* el segundo momento conocer el matemático Thales de Mileto y el método utilizado en el cálculo de la altura de la Pirámide de Keops y el tercer momento que fue la generalización y demostración del teorema de Thales con la construcción y reconstrucción de los conceptos.

> La solución es siempre repensar la metodología aplicada y crear formas para que el aprendizaje realmente sea significativo, pues todavía somos muy convencionales y el medio en que trabajamos, muchas veces, no nos ofrece condiciones para ello. Al utilizar la *Historia de la Matemática*, estaremos contextualizando y oportunizando [*sic*] al aprendiz una forma de resolver los problemas de varias maneras. Al contextualizar, a través de la *Historia de las Matemáticas*, la relación del sujeto y del objeto a ser estudiado, el alumno deja de ser sólo un espectador y pasa a ser el creador de su propio conocimiento (Massuquetto y Zanlorenzi, 2014, p.20).

La estrategia que utilizan estos autores para destacar la importancia del teorema de Thales es a través de su historia, esto ayudará a que los alumnos obtengan un aprendizaje significativo de dicho teorema. Al darle importancia al teorema a través de su historia se estará contextualizando al alumno, y ellos podrán resolver problemas de diferentes maneras. Esto hace que el alumno deje de ser pasivo y pase a ser creador de su propio conocimiento. Como se puede observar, este estudio también tiene el mismo propósito que los libros de texto que

abordamos en la sección 2.2, puesto que los alumnos resolverán ejercicios, pero de diferentes maneras.

Sánchez (2003) en su artículo, da un ejemplo concreto donde es importante analizar las relaciones entre la representación mental que el profesor tiene de conocer un contenido matemático y lo que los profesores destacan cuando estructuran actividades. Ilustra estos aspectos en el desarrollo de una unidad didáctica sobre semejanza de un profesor que imparte un curso en tercero de Secundaria.

El profesor que imparte el curso sitúa en la secuencia de enseñanza "'ejercicios que permitan aplicar el teorema de Thales y su consecuencia'". En los problemas seleccionados coexisten dos criterios: presentar directamente distintas configuraciones de Thales (sin situaciones reales), sobre las que identificar los datos numéricos/algebraicos y posibilitar el reconocer que con estos datos se puede aplicar la fórmula dada. Para el maestro tiene importancia reconocer y conectar unos contenidos ya dados (Sánchez, 2003).

> Abordar desde distintas perspectivas la forma en la que el profesor conoce el contenido matemático como objeto de enseñanza/aprendizaje y el uso que hace de los diferentes modos de representación es clave para aproximarnos a lo que necesita conocer un profesor para desarrollar su compleja labor (Sánchez, 2003, p. 62).

Este autor analiza el caso de un profesor que enseña el teorema de Thales, en los ejercicios que propone el maestro tiene como objetivos presentar distintas configuraciones de Thales para que los alumnos identifiquen datos y reconozcan que con los datos obtenidos se puede aplicar la fórmula. Como podemos observar este estudio persigue los mismos propósitos que los libros de texto, ver sección 2.2, ya que el objetivo es resolver los ejercicios a través de la obtención de datos y aplicar la fórmula dada.

En el trabajo de Pastre de Oliveira y Perleto dos Santos (2011), se relata parte de una investigación cuyo objetivo fue el de verificar cuáles son las dificultades y posibilidades de profesores de Matemáticas al utilizar el software Geogebra en actividades que involucran el teorema de Thales. Se pretendió investigar cuál sería el papel de las tecnologías en el eventual trabajo didáctico de los profesores en relación al teorema de Thales.

En el trabajo de Pastre de Oliveira y Perleto dos Santos (2011) se recurrió al estudio de las aprehensiones propuestas por Duval (1988), al trabajo de Chevallard (1991) sobre transposición didáctica, a la investigación de Balacheff (1994) relacionada a la transposición informática. Además, se utilizó la metodología cualitativa de análisis, habiendo observación informal a partir del contacto sistemático con los sujetos (Pastre de Oliveira y Perleto dos Santos, 2011).

Según Pastre de Oliveira y Perleto dos Santos (2011) se buscó por evidencia la manera en que los profesores se ocupan del tema «Teorema de Thales» en sus prácticas cotidianas, así como la influencia de las TIC' s y de estrategias a ellas ligadas en la comprensión y en la proposición de métodos más interactivos y experimentales de construcción del conocimiento.

Las participantes de la investigación de Pastre de Oliveira y Perleto dos Santos (2011) fueron cuatro profesoras de la Enseñanza Fundamental de la red Pública del Estado de São Paulo (Brasil).

Pastre de Oliveira y Perleto dos Santos (2011) identificaron que la dificultad presentada por las maestras es conceptual y ligada al saber matemático. El uso de Geogebra permitió evidenciar algunas dificultades, así como posibilidades de planificación y composición de estrategias pedagógicas por parte de los profesores.

La importancia del uso de Geogebra para la enseñanza del teorema de Thales, se entiende que su principal relevancia no reside en el software en sí, sino en los procedimientos engendrados por los profesores para utilizarlo como elemento mediador de los aprendizajes, o sea, la estrategia didáctica del profesor es que, al usar el software, crea posibilidades de mayor experimentación de las construcciones y de autonomía (Pastre de Oliveira y Perleto dos Santos, 2011).

Este estudio en particular destaca la importancia de utilizar software para la enseñanza del teorema de Thales. Como se observó, las dificultades que se evidenciaron al utilizar Geogebra no fueron con respecto al uso del software, sino ligadas al saber matemático. Este estudio me permite reflexionar acerca de que, a pesar de utilizar el software para hacer las clases más dinámicas para los estudiantes, y ellos mismos puedan interactuar con éste, se requiere de un conocimiento adecuado del teorema de Thales.

Leite y Oliveira (2016) señalan que el objetivo de su investigación fue identificar de qué forma los profesores de matemática se apropian de conocimientos relativos al teorema de Thales, desde los puntos de vista epistemológico y didáctico, considerando el uso de tecnologías digitales (el software Geogebra) en la organización y resolución de problemas propuestos en secuencias didácticas que consideran tres momentos: apropiación del uso y de la lógica de la interfaz; actividades sobre los conocimientos de contenidos previos relacionados con el teorema de Thales y problemas en los que la demostración del teorema de Thales será una alternativa a la resolución.

Se constataron dificultades acerca de los contenidos que involucran el teorema de Thales, tanto por parte de alumnos de la enseñanza básica, como de algunos profesores que están insertados en los cuadros funcionales de las escuelas municipales (Leite y Oliveira, 2016).

Además, se constató que, en las clases de la mayoría de los profesores, el teorema de Thales había sido raramente abordado, debido a diversos factores, entre los cuales el hecho de que los mismos relataran no poseer suficiente conocimiento de este tema y que tenían que utilizar recursos tecnológicos para abordar dicho contenido, no sabrían por dónde empezar y ni cómo mantener la clase de forma dinámica y participativa (Leite y Oliveira, 2016).

En este estudio se analizaron algunos profesores de matemáticas que abordan el teorema de Thales y que consideraban para ello el software Geogebra. El uso del software no es el problema principal, sino la falta de conocimiento del contenido matemático por parte de los profesores para enseñarlo.

Falcón, Falcón-Ramírez, Núñez y Tenorio (2009) presentan un trabajo interesante por las posibilidades que abre a los profesores para utilizar las TIC en el quehacer de una clase. Su objetivo fue mostrar algunas de las Webquest (WQ) dedicadas a las Matemáticas, exponiendo algunas sobre contenidos geométricos que podemos encontrar en la red tal como el teorema de Thales.

En la Webquest los alumnos buscan información sobre la vida de Thales y sobre cuáles fueron sus principales trabajos, se centra en el teorema que lleva su nombre y que es el motivo principal de la misma (Falcón, Falcón-Ramírez, Núñez y Tenorio, 2009).

El alumno aprende a dividir segmentos en partes iguales y a trazar un plano a escala del aula. Asimilan la semejanza de figuras. Además, en ella el alumnado adquiere capacidades matemáticas aplicadas al mundo que le rodea (Falcón, Falcón-Ramírez, Núñez y Tenorio, 2009).

Incluso se recomienda el uso del programa Cabri II para trabajar los conceptos. Esta Webquest posee una completa colección de recursos: Resultados de Thales, que explica sus cinco teoremas; applet división de un segmento, en el que se aprende a dividir segmentos en partes iguales paso a paso mediante un applet de Java; y Pantógrafo applet, en el que se simula la manipulación de un pantógrafo con otro applet. Se puede evaluar indirectamente la asimilación de dicho teorema por parte de los alumnos (Falcón, Falcón-Ramírez, Núñez y Tenorio, 2009).

Estos autores muestran la utilidad de las Webquest. A pesar de que se utilizan las TIC´ s para enseñar un contenido matemático, el alumnado toma el rol de un estudiante pasivo, pues solo recibe información, pero al no interactuar con su profesor para expresar sus ideas, dudas o comentarios, no logran un aprendizaje significativo. Además, no argumentan o justifican sus razonamientos y procedimientos matemáticos.

Suárez, Mardones, y Madueño (2001) señalan que su trabajo consiste en la utilización del software educativo interactivo “Geomesu” y determina el efecto que produce en la adquisición de conocimientos de Geometría Métrica, específicamente de los alumnos del nivel Medio Diversificado y Profesional. Está fundamentado teóricamente en las teorías del aprendizaje según Gagné, Ausubel y Brunner.

El software persigue moverse progresivamente a un ritmo tal que el alumno se mantenga activamente involucrado en la tarea del aprendizaje de la Geometría (Suárez, Mardones, y Madueño, 2001).

La investigación predice el grado de conocimiento que el alumno debe adquirir en un porcentaje aproximado sobre punto, recta y plano, ángulos, polígonos: triángulos, cuadriláteros, circunferencia, áreas y perímetros, teorema de Pitágoras - Euclides y congruencia-teorema de Thales de tal manera que el alumno supere la crisis planteada y enfrente con éxito en el futuro las pruebas antes mencionadas (Suárez, Mardones, y Madueño, 2001).

Suárez, Mardones, y Madueño (2001) señalan que el estudiante puede decidir, ir directamente a situaciones interactivas donde el conocimiento no es dado directamente, sino que lo induce a una participación activa hacia un aprendizaje por descubrimiento, donde la presentación de un problema depende de una situación ambiental que se presenta como un desafío a la inteligencia del alumno, impulsándolo a resolver problemas más que conseguir transferencias de aprendizaje. Además, propicia ambientes que generen motivación en el estudiante y registro diario de trabajo realizado. Se logra un aprendizaje de conceptos y teoremas sobre Congruencia y teorema de Tales.

Este estudio señala la utilización del software Geomesu, el objetivo es que el alumno resuelva problemas que están contextualizados y que representan un desafío, a pesar de utilizar un software se persigue el mismo propósito que los libros de texto, es decir, resolver ejercicios a través de la fórmula, ver sección 2.2.

La investigación de Porteles y Graterol (2014) tuvo como propósito diagnosticar la necesidad de diseñar una propuesta de unidad didáctica para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, para el contenido del teorema de Thales en tercer año de educación media, haciendo uso del software libre Geogebra (p.98).

La mayoría de los estudiantes manifiestan que sus docentes de matemática no usan, o usan pocas herramientas didácticas para la enseñanza, limitándose a las herramientas tradicionales como el uso de la voz, pizarra y tiza; los estudiantes expresan interés de realizar actividades que incluya el uso de herramientas tecnológicas con software de geometría dinámica; y se detectó la necesidad de elaborar una herramienta didáctica para el desarrollo del contenido del teorema de Thales, debido a que los estudiantes muestran desconocimiento del tema o no tienen claro el teorema, al momento de resolverlo lo hacen de manera incorrecta o no contestan (Porteles y Graterol, 2014).

Con los resultados obtenidos se visualiza que los estudiantes tienen escasos conocimientos previos relacionados con el teorema de Thales pues las respuestas en su mayoría fueron equivocadas (Porteles y Graterol, 2014).

Con esta investigación se comprueba que algunos profesores siguen dando clases de forma tradicional, exponiendo el contenido matemático limitándose al pizarrón y, por esto los alumnos tienen escasos conocimientos del tema y no resuelven los ejercicios de manera correcta.

Según Filloy, Barquera y Carrión (2014) el objetivo principal de su investigación es observar las obstrucciones naturales en el momento de utilizar un Sistema Matemático de Signos, cuando se presenta la noción de variación proporcional geométrica. El estudio fue realizado por medio de entrevistas clínicas. A los alumnos se les presentan situaciones que simulan la demostración del teorema de Thales con un Modelo de Enseñanza previamente diseñado.

> No es suficiente con conocer procedimientos, es necesario, un entendimiento conceptual más profundo y, sobre todo, que sea más flexible en el momento de utilizar ese concepto. El maestro deja de lado la parte expositiva y se convierte

> en un elemento más dinámico. Por otro lado, se observa la independencia del alumno, explora con mayor libertad los alcances y errores, analiza y cuestiona sus procedimientos (Filloy, Barquera y Carrión, 2014, p.5).

Filloy, Barquera y Carrión (2014) descubrieron las obstrucciones cognitivas que se presentan frente a un dibujo realizado con papel y lápiz. Cabrí permite hacer la medición en cada triángulo que se desee, en muy poco tiempo, tan solo utilizando el arrastre. Situación que no es posible en un entorno tradicional de enseñanza con papel y lápiz (Filloy, Barquera y Carrión, 2014).

En la actualidad, la enseñanza de la Geometría ha ido perdiendo espacio y sentido en las instituciones escolares, ya que presenta problemas tanto a nivel curricular como en la práctica efectiva en el aula. Es conocido que muchos docentes "eligen" un libro de texto para desarrollar sus clases (Filloy, Barquera y Carrión, 2014).

Con esta investigación, se evidencia la pérdida de sentido y de las razones de ser, del "por qué" y el "para qué" del estudio del teorema de Thales en las clases de Semejanza y Proporcionalidad Geométrica, debido a que su estudio se limita a la aplicación de las técnicas analíticas y resolución de ejercicios algebraicos. Por lo general la "presentación" del teorema de Thales inicia con una definición introducida por parte del docente, o el libro; y todo su estudio se reduce al planteo de las proporciones correspondientes y la aplicación de operaciones algebraicas (Filloy, Barquera y Carrión, 2014).

En esta investigación se comprueba que algunos profesores les presentan a los alumnos situaciones que simulan la demostración del teorema de Thales. Además, con el uso de Cabrí, el maestro realiza una clase más dinámica y el alumno se hace independiente pues analiza y cuestiona sus procedimientos, pero aun utilizando un software la enseñanza se limita a la aplicación de fórmulas y resolución de ejercicios puramente algebraicos, esto mismo sucede con los libros de texto, ver sección 2.2.

Gutiérrez, Guillén y Jaime (2012) mostraron qué sucede en una clase de geometría analítica o de precálculo en el bachillerato en una clase usual de matemáticas.

Ocurre que el profesor indica lo que se va a hacer en clase, utiliza el pizarrón, los alumnos realizan apuntes de lo que hace el maestro, saben que lo verdaderamente importante es la fórmula obtenida y no la deducción, ya que la fórmula será usada en la resolución de los problemas, en las tareas para la casa, en los exámenes; mientras que la deducción sirvió sólo al profesor al momento de explicar a los alumnos (Gutiérrez, Guillén y Jaime, 2012).

El profesor supuso que el tema estaba bajo el control del estudiante y supuso, además, si bien inconscientemente, que está estabilizada en la mente de sus estudiantes. La mayoría de los alumnos recuerdan el teorema de Thales, lo reconocen, pero algunos dudan de lo que dicen que saben (Gutiérrez, Guillén y Jaime, 2012).

Este enfoque suele dejar bajo la responsabilidad del profesor, la elección de los ejemplos, las herramientas, los argumentos, las estrategias de acción y de explicación, los ejemplos, los tiempos de "enseñanza" así como la elaboración o selección de las actividades

complementarias, sin sentir la necesidad de valorar los estilos y tiempos de aprendizaje de sus alumnos, y sin tomar en cuenta si ya las nociones son estables entre los alumnos (Gutiérrez, Guillén y Jaime, 2012).

En este estudio, el caso que muestran estos autores, es de un maestro que aborda de manera tradicional un tema matemático, él supone que los alumnos ya tienen los conocimientos previos suficientes para entender el tema, más no corrobora si realmente es así. Esto me hace reflexionar acerca de lo que la gran mayoría de los docentes hacen, suponer que los alumnos ya saben el contenido, y ésto provoca que los alumnos no aprendan de manera adecuada ni refuercen lo poco o mucho que conocen del tema que se está abordando, se queden con dudas y lleven estas carencias al siguiente nivel educativo.

Báez, et al. (2015) diseñan y desarrollan una propuesta didáctica, partiendo de la elaboración de un mapa de enseñanza y aprendizaje sobre el teorema de Thales y la identificación de las habilidades asociadas a los niveles de razonamiento geométrico propuestos en el modelo de Van Hiele, con el propósito de que los estudiantes de 9° grado de Educación Básica reconozcan las definiciones implicadas en el teorema de Thales y la aplicación del mismo en la resolución de problemas.

Con el diseño de esta propuesta didáctica, se ha evidenciado la utilidad del análisis didáctico como una herramienta que facilitó la toma de decisiones en cuanto al alcance del tema tratado (biografía de Thales de Mileto y sus aportes al desarrollo de la Geometría en la Grecia Antigua; razones y proporciones; figuras semejantes, criterios de semejanza para triángulos; enunciado, demostración y aplicaciones del teorema de Thales), las habilidades geométricas que se pretende sean desarrolladas y puestas en práctica por los estudiantes y la planificación de estrategias didácticas que combinaron el uso de un video educativo (con fines informativos y motivacionales), el uso del Cabri Géomètre II Plus como herramienta para realizar construcciones geométricas con regla y compás y efectuar mediciones (tareas reproducibles haciendo uso del juego geométrico) y de los juegos didácticos, valiéndose de la adaptación a estructuras conocidas como los juegos tipo memoria o tipo rally (Báez, et al., 2015).

Esta propuesta persigue el mismo propósito que los libros de texto, ver sección 2.2, aun utilizando software y materiales didácticos, la finalidad es dar las definiciones del teorema de Thales y aplicarlas para resolver ejercicios o problemas.

Gamboa y Ballestero (2010) señalan que, en secundaria, usualmente los contenidos de geometría son presentados al estudiantado como el producto acabado de la actividad matemática, “la enseñanza tradicional de esta disciplina se ha enfatizado en la memorización de fórmulas, así como definiciones geométricas, teoremas y propiedades apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas” (Gamboa y Ballestero, 2010, p. 127).

En este artículo se muestran los resultados obtenidos de un cuestionario dirigido a estudiantes de secundaria y docentes. Los procesos de descripción, comprensión, análisis, construcción, exploración, visualización, entre otros, deben ser implementados en la enseñanza de la geometría mediante el planteamiento de situaciones problema que impliquen para el alumnado un nivel cognitivo no limitado al uso de una fórmula o proceso algorítmico. En la

mayoría de los casos el proceso de enseñanza está condicionado por los libros de texto por esto el aprendizaje de la geometría carece de sentido (Gamboa y Ballestero, 2010).

Los contenidos no representan un conocimiento útil para el alumno y donde el ensayo, el error y la discusión no son aprovechados como un medio para lograr un aprendizaje. No se trata sólo de enseñar contenidos como una "receta" o por cumplir con lo estipulado en el currículo, sino que se pretende que con la enseñanza de la geometría el estudiantado aprenda a pensar lógicamente. El docente debe proponer situaciones de aprendizaje innovadoras con el fin de lograr un aprendizaje significativo (Gamboa y Ballestero, 2010).

El estudiantado tiene mayores dificultades en el teorema de Thales, entre otros temas. La principal dificultad que presentan es interpretar lo que dice un problema. La gran parte de estudiantes señalan que su profesora no le da una importancia específica. Se pone de manifiesto que la memorización constituye para el estudiantado un importante elemento en el aprendizaje de la geometría, dada la "necesidad" de saber fórmulas, definiciones y características (Gamboa y Ballestero, 2010).

La mayoría del estudiantado indica que el profesorado desarrolla su clase de manera "tradicional", es decir, inicia definiendo conceptos, y luego realiza algún ejemplo en la pizarra. Resultó la calculadora como el recurso más utilizado para las clases (Gamboa y Ballestero, 2010).

En esta investigación se comprueba que algunos profesores para enseñar un tema de Geometría, como es el teorema de Thales, presentan las definiciones, fórmulas y teoremas como receta y totalmente alejada de la realidad del alumno, los ejemplos y ejercicios no están relacionados con su contexto, y esto provoca que no consideren importante el estudio de la Geometría porque no es aplicable a la vida cotidiana (Gamboa y Ballestero, 2010). El proceso de enseñanza está condicionado por los libros de texto (Gamboa y Ballestero, 2010), presentar la definición y buscar la aplicación en un conjunto de ejercicios, como lo observamos en la sección 2.2.

Mora, L., Monge, J., Barrantes, J., Mora, A., Camacho, C. y Víquez, H. (2014) señalan que surgió la necesidad de elaborar una propuesta didáctica en matemáticas para la enseñanza de un tema en particular de la geometría, como es el teorema de Thales, la cual fue aplicada y documentada a estudiantes regulares de octavo año. El propósito es lograr una mejor transmisión y entendimiento de la teoría.

Las teorías que sustentan el trabajo de la propuesta didáctica de Mora et al. (2014) son: la teoría de la Transposición Didáctica por Chevallard (1997), la teoría de las Situaciones Didácticas por Verdejo (2009), la teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990) y la Ingeniería Didáctica por Artigue (1998). La teoría de las competencias profesionales de los autores Tobón (2008) y Verdejo Freixas (2009). La teoría del pensamiento complejo de los autores Morin (1995), Margery (2010), Verdejo Freixas (2009), Tobón (2008), y las TIC´s (Mora et al., 2014).

La competencia que se pretendió desarrollar en los estudiantes en el trabajo de Mora et al. (2014) fue que el estudiante aplicara el teorema de Thales y sus derivados en la solución de ejercicios y de problemas extraídos de su cultura cotidiana y sistematizada con base en razonamientos matemáticos. Durante el desarrollo de la propuesta se realizaron ejemplos contextualizados por medio del software Geogebra, para acercar a los estudiantes a situaciones problemas que se podrían presentar en sus actividades cotidianas, además se construyeron ejemplos con el mismo recurso con el fin de corroborar procedimientos y resultados de ejercicios construidos durante las clases (Mora et al., 2014).

Se requería la participación activa de los estudiantes. Además, se utilizó la red social Facebook para que los estudiantes realizaran preguntas por los mensajes o el chat en directos con el profesor o sus compañeros. La evaluación consistió en diferentes estrategias como la observación directa del docente sobre los procesos desarrollados por los estudiantes. Entre los criterios que se evaluaron en la propuesta fueron: resuelve problemas geométricos y algebraicos por medio de herramientas matemáticas y aplica el teorema de Thales y sus derivados para resolver problemas de su entorno (Mora et al., 2014).

La incorporación del uso de TIC y del enfoque por competencias conlleva a una enseñanza integral. Se logró determinar que utilizando TIC las lecciones resultan más atractivas para los estudiantes, por lo que esta propuesta para la enseñanza del teorema de Thales el incremento en la motivación fue significativo, marcando un antes y un después en la dinámica del grupo (Mora et al., 2014).

Como se describió, esta propuesta tiene el propósito de lograr una mejor enseñanza del teorema de Thales utilizando software, si bien se logra motivar a los estudiantes utilizando Geogebra y corroborando los procedimientos de los alumnos, la enseñanza sigue siendo tradicional, es decir, el estudiante aplica el teorema para resolver ejercicios y problemas de su entorno. Esta propuesta tiene el mismo propósito que los libros de texto que abordamos en la sección 2.2.

Al utilizar software para la enseñanza del algún tema matemático da la posibilidad de creación de clases más dinámicas y que el alumno desarrolle su autonomía.

Sin embargo, la mayoría de los profesores abordan poco el teorema de Thales, debido a diversos factores, entre los cuales destaca el hecho de que los mismos maestros relataran no poseer suficiente conocimiento de este tema, no sabrían por dónde empezar y ni cómo mantener la clase de forma dinámica y participativa.

Como se pudo observar en las investigaciones, los profesores enseñan el teorema de Thales de manera tradicional, algunos se limitan al pizarrón y otros utilizando software, sin embargo, se sigue el mismo patrón de enseñarlo de manera algorítmica de modo que los estudiantes resuelvan ejercicios o problemas contextualizados aplicando la fórmula. Lo que ocasiona que los estudiantes no tengan un aprendizaje adecuado de este teorema.

Mientras el alumno no tenga una correcta interpretación de todos los conceptos que están involucrados en el teorema de Thales, no podrá contar con las nociones estables y por lo tanto

comprender el teorema. Asimismo, se considera que no se discute la importancia de preparar a los estudiantes para entender mejor las matemáticas, ni cómo usarlas para comunicarse con ella a lo largo de su vida. Sin embargo, hay casos excepcionales como el caso particular que señala Sánchez (2003) acerca del maestro que quiere que los alumnos relacionen sus conocimientos previos, primeramente, indaga que ideas tienen los alumnos y de ahí centra el concepto principal. Luego, selecciona problemas que presenten situaciones reales, justificando la elección de los mismos con base en que el alumno vea las matemáticas más cerca de la vida diaria, además, deben justificar matemáticamente porque se procede de esa forma. Sin embargo, la manera en cómo aborda la clase este maestro, es tradicional, debido a que sigue el mismo patrón que los libros de texto, ver sección 2.2, es decir, a pesar de que les presente a los alumnos situaciones reales y les solicite justificar sus razonamientos, los alumnos deberán resolver los ejercicios utilizando la fórmula.

Se conocen propuestas enfocadas en el estudio de las nociones del teorema de Thales y semejanza de triángulos, no como instrumentos sino como objetos de estudio. Así mismo, por lo general la "presentación" del teorema inicia con una definición introducida por parte del docente, o el libro; y todo su estudio se reduce al planteo de las proporciones correspondientes y la aplicación de operaciones algebraicas. Por lo tanto, la mayoría de los alumnos tienen una concepción inadecuada del teorema de Thales, ocasionada por una práctica de la enseñanza reforzada por los libros de textos, y se considera aquí que tal vez por este motivo muchos alumnos no perciben la aplicación del teorema en cualquier configuración.

2.5 Problema de investigación

Como se muestra en las investigaciones previas discutidas en la sección anterior, "los profesores dedican más tiempo a la enseñanza de algoritmos dejando de lado la formación de ideas variacionales tan necesarios para la comprensión de un concepto matemático" (Caballero y Cantoral, 2013, p. 1585).

Como bien se puede comprobar lo que señalan Caballero y Cantoral (2013) acerca de que los profesores enseñan a base de algoritmos, en las secciones 2.2 y 2.4 de los libros de texto y las investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje del teorema de Thales, algunos profesores enseñan el teorema, muchas veces sin ellos mismos comprenderlo, utilizan los software para el diseño de las clases más dinámicas pero no logran que los alumnos tengan un aprendizaje significativo del teorema, debido a que se siguen los objetivos de enseñar algorítmicamente, dándoles a los alumnos problemas contextualizados y, a pesar de la variedad de los ejercicios, les enseñan modos diferentes de resolverlos y analizarlos, finalmente, los alumnos deben aplicar la fórmula para llegar a la solución incluso justificando sus procedimientos, esto provoca que los estudiantes tengan una concepción inadecuada del teorema de Thales.

"Los alumnos tienen básicamente la misma necesidad de actividades significativas que los matemáticos, lo que incluye el conocimiento, la comprensión y experimentación de la funcionalidad (utilidad) de las actividades en las que participan" (Villiers, 1993, p.28).

Los alumnos no tienen un conocimiento sólido del teorema de Thales, pero tampoco están motivados para aprenderlo, siendo que la enseñanza es puramente algorítmica, y no ven esa necesidad de funcionalidad del teorema puesto que no tienen actividades que les den significado al teorema. Por esto, memorizan los problemas puesto que sólo conocen la fórmula y no visualizan el teorema de Thales.

Con todo lo dicho en este trabajo se asume como problemática que el teorema de Thales se enseña mediante una definición y fórmula para luego buscar su aplicación en distintos contextos que si bien son cotidianos resultan artificiales y poco relevantes en los que se busca la aplicación directa de la fórmula.

2.6 Hipótesis y preguntas de investigación

La mayoría de los profesores de matemáticas en secundaria mantienen casi exclusivamente la visión formalista de verificación/ convicción sobre la función de la demostración en matemáticas (Villiers, 1993). La demostración de un teorema, en secundaria, entendida como verificación de una proposición, no necesariamente es el único mecanismo para lograr que los estudiantes obtengan una convicción de certeza acerca de la validez de un teorema.

A partir de la aplicación del teorema de Thales en un ejemplo concreto se tiene la idea ingenua de que sí funciona y los alumnos tendrán la certeza absoluta de la validez de dicho teorema.

En el presente trabajo se investiga la manera en que los estudiantes logran comprender el teorema de Thales a través de una actividad observable en la vida cotidiana, la actividad de la Pailería relacionada con la construcción de tubos T, con objeto de que logren una convicción acerca de la validez de dicho teorema "la evidencia es tan fuerte que conduce a la convicción incluso sin demostración rigurosa" (Villiers, 1993, p.19).

En la industria de la Pailería, se construyen diversas estructuras metálicas entre las que se encuentran la unión de tubos con diferentes cortes, por ejemplo, el tubo T corte boca de pescado que se utilizó en este trabajo. Se adaptó esta práctica para llevarla al aula con un grupo de estudiantes de nivel secundaria, para ello se planteó un problema específico obtenido de una noticia verídica y proveniente del entorno social de los alumnos, el cual tiene que ver con el robo de combustible y que tiene una problemática energética a nivel nacional.

También se les pidió a las alumnas tomar el rol de un pailero donde se les propuso seguir una serie de pasos para construir cuatro tubos corte boca de pescado con distintas secciones, esto con la finalidad de obtener plantillas tal como un pailero, y finalmente, se adaptó el teorema de Thales con el análisis de la curvatura en cada corte de tubo. Con esto se pretende que el alumno resignifique el teorema de Thales abordándolo no como un concepto netamente matemático, sino dándole un uso al teorema, pues en el contexto de la Pailería va a ser resignificado en términos de precisión en la construcción de tubos y tiene el impacto de reducir la probabilidad de fractura y el gasto de soldadura, es aquí donde se le da un significado funcional.

La pregunta principal que orientó este trabajo es la siguiente:

¿Cómo se lleva a cabo la comprensión del teorema de Thales en el contexto de una situación variacional que implica el proceso de construcción de tubos T en pailería?

Para abordar el problema de investigación se plantean las hipótesis de trabajo, en base a que el alumno va a lograr visualizar el teorema de Thales a través de la variación y predicción en el proceso de construcción de tubos.

Hipótesis 1: En el nivel educativo básico, en secundaria, podría ayudar a resignificar el teorema de Thales a partir de la adaptación de la actividad de Pailería al aula relacionada con la construcción de tubos "T".

Pregunta 1.1 ¿Cuáles son las características que debe tener una situación variacional para poder resignificar el teorema de Thales en términos del proceso de construcción de tubos?

Pregunta 1.2 ¿Qué elementos podrían tomarse del oficio de la Pailería, relacionado con el teorema de Thales en el contexto de la construcción de tubos para adaptarlo al aula?

Caballero y Cantoral (2013) señalan que el estudio de la variación es un elemento necesario para poder significar las ideas y conceptos, pero el actual discurso matemático escolar no propicia este desarrollo de ideas variacionales. Propiciar el estudio de la variación fomenta un aprendizaje rico en significados. Aunque la variación tiene un papel en los libros de texto, a segundo plano.

Se plantea la búsqueda de los procesos cognitivos implicados en la resignificación del teorema de Thales en el contexto de la actividad de construcción de los tubos. Para esto, nos apoyamos en la idea de estrategias variacionales y se busca conocer cuáles son las estrategias y cómo éstas se organizan para la resignificación.

Hipótesis 2: Existen algunos procesos cognitivos específicos los cuales se organizan a lo largo de la resignificación del teorema de Thales en el contexto de la actividad de Pailería relacionada con la construcción de tubos.

Pregunta 2.1 ¿Cuáles son y cómo se organizan los procesos cognitivos específicos a lo largo del proceso de resignificación del teorema de Thales en el contexto de la actividad de Pailería relacionada con la construcción de tubos?

2.7 Objetivos de investigación

Con base en el problema de investigación, la hipótesis y preguntas de investigación, a continuación, se plantean los objetivos general y específico.

El objetivo general es entender cómo se lleva a cabo la comprensión del teorema de Thales en el nivel educativo de secundaria, tomando en cuenta el saber matemático que se encuentra en el contexto cotidiano de la construcción de tubos T en pailería.

Uno de los objetivos específicos consiste en lograr una resignificación del teorema de Thales a través de la adaptación de la práctica de Pailería que involucra la construcción de tubos en forma de "T".

Además, identificar los procesos cognitivos que se encuentran presentes en la comprensión del teorema de Thales y conocer la manera en cómo se organizan.

Así mismo, caracterizar la situación a ser aplicada en el aula de tal manera que permita la realización de dichos procesos cognitivos.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

Introducción

Esta investigación se apoya en la teoría de la Socioepistemología, Cantoral (2013), puesto que tiene como objetivo explorar formas de pensamiento matemático, teorema de Thales en este caso, dentro y fuera del aula, que pudiesen difundirse socialmente y ser caracterizadas para su uso efectivo entre la población, alumnos de nivel básico. La Socioepistemología postula que se debe problematizar al saber situándolo en el entorno de la vida del aprendiz, es decir, su cultura, sus conocimientos, sus saberes, su historia, su presente y la propia historia que permitió la emergencia de los saberes matemáticos, lo que exige del rediseño del discurso Matemático Escolar con base en las prácticas sociales (Cantoral, Montiel y Reyes, 2015).

En este capítulo se presenta el Pensamiento y Lenguaje Variacional (*Pylvar*) como línea de investigación sustentada en la teoría Socioepistemológica. Cantoral y Farfán (2003) señalan que el *Pylvar* pone énfasis en encontrar marcos de referencia que resignifiquen los conocimientos matemáticos, y comprender el papel que juegan los ambientes socioculturales en ello. Según Cabrera y Cantoral (2010) para lograr tal construcción y significación, el *Pylvar* parte de las ideas intuitivas que poseen los estudiantes sobre el cambio y la variación, y las hace evolucionar a través de situaciones donde el estudio del cambio es el eje principal. Donde el enfrentamiento con la situación exige del uso y desarrollo de *estrategias variacionales* (Aparicio, 2003).

3.1 La Socioepistemología

La Socioepistemología nace en la escuela mexicana de Matemática Educativa a fines de los ochenta y se extiende hacia Latinoamérica y otras latitudes durante los noventa con el objetivo de atender colectivamente un problema mayor: explorar formas de pensamiento matemático, fuera y dentro de la escuela, que pudiesen difundirse socialmente y ser caracterizadas para su uso efectivo entre la población (Cantoral, 2016). Covián (2005) señala que esta teoría surge como enfoque teórico al seno del grupo de investigación de Matemática Educativa en el Centro de Investigaciones Avanzadas del Instituto Politécnico Nacional; teniendo como punto de partida el análisis desarrollado en la tesis doctoral de Cantoral (2001).

La Socioepistemología descansa en cuatro principios fundamentales: el principio de la racionalidad contextualizada, el principio del relativismo epistemológico, el principio de la resignificación progresiva o de la apropiación situada y el principio normativo de la práctica social (Cantoral, Reyes y Montiel, 2014).

"El problema de investigación que plantea la Socioepistemología es el análisis de los procesos de construcción del conocimiento matemático cuando éstos se encuentran dirigidos por el pensamiento físico. Especialmente estudia aquellos fenómenos de flujo continuo en la naturaleza" (Covián, 2005, p. 42).

Buendía (2006) señala que, desde la génesis de la Socioepistemología, "esta visión teórica marca una forma de hacer investigación en matemática educativa, donde se reconocen y estudian científicamente los mecanismos sociales de construcción del saber matemático" (p.232).

"La Socioepistemología pretende desarrollar estrategias de investigación con naturaleza epistemológica, donde ésta sea entendida como el estudio de las circunstancias que favorecen la construcción del conocimiento, las cuales darán cuenta de la relación entre prácticas sociales y conocimiento matemático" (Buendía, 2006, p.233). Buendía (2006) señala de Cantoral (2001) que "se pretende formar con dichos elementos una primera base de significaciones para los conceptos y procesos matemáticos, buscando incidir, con su auxilio, en el discurso matemático escolar" (p.233).

"El término Socioepistemología plantea un corrimiento al problema del saber, lo contextualiza y lo sitúa" (Cantoral, Molina y Sánchez, 2005, p.463). Cantoral et al. (2005) señalan que:

> La Socioepistemología es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (p.463).

Cantoral et al. (2005) señala de Cantoral y Farfán (2004) que "la Socioepistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión" (p.463).

Covián (2005) señala que:

> La teoría socioepistemológica viene a ampliar el tipo de investigación que es desarrollada en la Matemática Educativa, se considera que (p.41):
>
> > *El proceso de desarrollo que se nutre de la reflexión matemática, al seno de lo didáctico por una parte y de apoyar, por otra, la explicación didáctica con base en la construcción social e individual del conocimiento, ha sido en nuestra opinión, una de las principales y más recientes contribuciones en esta disciplina* (Cantoral, Farfán, 1998 p. 3).

Covián (2005) señala que:

> La teoría socioepistemológica no sólo centra el estudio en los conceptos, sino que basa su perspectiva en comprender la construcción social del conocimiento matemático reconociendo que las prácticas sociales forman parte de ésta, teniendo la necesidad de elaborar una incesante interacción entre la elaboración teórica y la evidencia empírica, tal como lo mencionan Cantoral y Farfán (2003), puesto que es a través de ésta que se tienen los elementos para estudiar y entender

> el aparato social, y así, explicar los fenómenos y mecanismos de construcción social del conocimiento matemático (p.51).

De la teoría de la Socioepistemología destaco el término visualización (de ahora en adelante) en el sentido de Cantoral y Montiel (2003), la visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y lenguaje del que aprende. De modo que al realizar la actividad de visualización se requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a los ámbitos numéricos, gráficos, algebraicos o verbales. La visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación.

3.2 Práctica social

La Socioepistemología de la Matemática Educativa surge en un cruce de caminos en un intento por explicar las relaciones entre mente, saber y cultura en el campo de las matemáticas apoyándonos en la noción de práctica social. "La práctica social no se filma, se infiere, pues como constructo teórico sirve para explicar la construcción del conocimiento basado en prácticas; se trata, en consecuencia, de un constructo desde una perspectiva pragmática del significado" (Cantoral,2016, p.16).

> La Socioepistemología es un marco en el que las "prácticas sociales" son las acciones de un grupo social, ubicado en un contexto histórico o actual que actúan de acuerdo a ideologías predominantes en ese momento; este grupo social puede estar compuesto por científicos, matemáticos, investigadores en matemática educativa, profesores, alumnos e instituciones; pero también puede estar constituido por individuos y/o grupos sociales que utilizan a la matemática como herramienta para el desarrollo de actividades domésticas y profesionales (Covián, 2005, p.51).

Cantoral, Gasperini y Montiel (2014) señalan que:

> La Socioepistemología considera a las prácticas sociales como la base del conocimiento, en la medida en que son el sustento y la orientación para llevar a cabo una construcción social del conocimiento matemático. Asumiremos a la práctica social como normativa de la actividad humana, más que como una actividad humana reflexiva o la reflexión sobre una práctica (la praxis). La práctica social no es lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen, aun sin adquirir conciencia de sus acciones (Cantoral, 2002; Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006). (p.98).

Es decir, sugiere observar las prácticas en una comunidad, modificar dicha práctica y llevarla al aula con objeto de resignificar el concepto.

3.3 Dimensiones epistemológicas

La Socioepistemología está conformada por cuatro dimensiones: Epistemológica, Didáctica, Cognitiva y Sociocultural que se describirán a continuación.

Dimensión Epistemológica

La dimensión epistemológica se centrará en analizar la naturaleza social de la construcción del conocimiento matemático, su conformación histórico-cultural y el papel esencial que juega en el marco de otras prácticas de referencia. La respuesta epistemológica que se obtiene es guiada por la pregunta sobre cómo se constituye el objeto de conocimiento (Buendía, 2006).

Dimensión Didáctica

El aspecto didáctico abordará cuestiones relativas a los contextos argumentativos que se proponen a los estudiantes y las formas y mecanismos para argumentar y llegar a consensos. La respuesta didáctica que se obtiene es guiada por cómo se enseña el objeto (Buendía, 2006).

Dimensión Cognitiva

El aspecto cognitivo deberá ahora ser guiado por la pregunta sobre cómo los estudiantes y el profesor, interactivamente, construyen y reconstruyen identidades, significados, sus realidades y su propia cognición. La respuesta cognitiva que se obtiene es guiada por cómo el estudiante aprende el objeto (Buendía, 2006).

Dimensión Sociocultural

En la dimensión socio-cultural las relaciones entre prácticas sociales y conocimiento matemático que no sólo circunscriben al ámbito didáctico actual, sino también pueden dar cuenta de la función de dicho conocimiento en diferentes momentos a lo largo de su historia, así como de su origen en el seno de paradigmas sociales y de su vínculo con otras prácticas de referencia conforma el aspecto social en el estudio de la construcción del saber matemático (Buendía, 2006). Buendía (2006) señala además que la dimensión sociocultural propone entender por qué y cómo los grupos humanos tuvieron o tienen que hacer ciertas cosas para construir ese sistema complejo de conceptos. Esas "ciertas cosas" son las prácticas sociales que realizan los grupos humanos para construir conocimiento (Cordero, 2005). Así el saber matemático se problematiza y se reconoce que, antes de hablar sobre un saber matemático como un objeto acabado no cuestionable, "*habrá que hacerlo sobre un complejo de prácticas, de naturaleza social, que den sentido y significado al saber matemático*" (Cantoral, 2004, p.6).

A continuación, se presenta el Pensamiento y Lenguaje Variacional (*Pylvar*) como línea de investigación sustentada en la teoría Socioepistemológica (Caballero y Cantoral, 2013) y la situación variacional, que según Salinas (2003) es el conjunto de problemas cuyos tratamientos demandan la puesta en juego de estrategias variacionales y que requieren establecer puntos de análisis entre diversos estados del cambio.

3.4 Situación variacional y estrategias variacionales

Un artículo consultado que es de mucha relevancia para esta investigación es el de Caballero y Cantoral (2013), debido a que propicia el estudio de la variación y representa una tarea importante para fomentar un aprendizaje rico en significados, tarea ante la cual se han

desarrollado investigaciones enmarcadas en el Pensamiento y Lenguaje Variacional (*Pylvar*), línea de investigación que estudia los saberes matemáticos propios de la variación y el cambio, y que enfatiza el carácter variacional de las ideas matemáticas y no únicamente en su manejo simbólico y analítico (Caballero y Cantoral, 2013).

> Las situaciones donde se pone en juego el *Pylvar* permiten significar los conocimientos matemáticos más allá de la sola manipulación simbólica, por medio de ideas variacionales que dieron vida y desarrollaron esos conocimientos. Por tanto, las ideas de cambio y variación son fundamentales en el *Pylvar*, pues representa la base en la cual se sostiene y cuyo estudio permite resignificar los conocimientos matemáticos. De modo que el *Pylvar* se caracteriza por centrarse en la forma en que los fenómenos estudiados cambian de un estado a otro, identificando aquello que cambia, cuantificando ese cambio y analizando la forma en que se dan esos cambios (Caballero y Cantoral, 2013, p.1197).

El sustento teórico de la investigación de Caballero y Cantoral (2013) se encuentra en la teoría Socioepistemológica, que plantea que el conocimiento matemático tiene su origen en el conjunto de prácticas humanas que son aceptadas y establecidas socialmente llamadas prácticas sociales (Cantoral, 2004). Son las prácticas las que favorecen la construcción del conocimiento matemático, lo que implica un énfasis distinto que caracteriza a la Socioepistemología: pasar de los objetos a las prácticas. Es la praxis la que favorece y permite el surgimiento y significación de un determinado concepto, noción, proceso o procedimiento (Cabrera, 2009) (p.1198).

Según Caballero y Cantoral (2013) para desarrollar un pensamiento variacional se debe "identificar aquello que cambia, cuantificar ese cambio y analizar como varían los cambios. Si sólo se verifica que alguna propiedad o regla se cumple, no hay un pensamiento variacional, ya que no requiere comprender los procesos de variación" (p.1201).

Se toma como punto de referencia la caracterización que propone Salinas (2003) de estrategias variacionales (Caballero y Cantoral, 2013, p.1202) señalan que:

Comparación: Asociada a la acción de establecer diferencias entre estados, lo que permite identificar si hubo un cambio y poder analizarlo con base en las características de esos cambios y su variación.

Seriación: Se relaciona con la comparación, ya que está asociada con la acción de analizar entre estados sucesivos y establecer relaciones entre ellos, pero se diferencia en que se analizan varios estados y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos.

Estimación: Conociendo el comportamiento de un fenómeno en estados previos, se proponen nuevos estados a corto plazo de manera global, a diferencia de la predicción, donde los estados propuestos son locales.

Predicción: Asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de la variación en estados previos, de manera que se sintetiza y abstrae esta información en modelos predictivos.

También, se estableció una nueva caracterización de elementos característicos del *Pylvar* (Caballero y Cantoral, 2013, p.1201):

Situación Variacional: Es el conjunto de problemas cuyos tratamientos demandan la puesta en juego de las estrategias variacionales y que requieren establecer puntos de análisis entre diversos estados del cambio.

Argumentos Variacionales: Son razonamientos que recurren al análisis del cambio y de su cuantificación, y que son utilizados por las personas cuando hacen uso de "maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando".

Estrategia Variacional: Consiste en una forma particular de razonar y actuar ante una situación variacional, y que permite la generación de los argumentos variacionales que dan explicación a la situación.

Tareas Variacionales: Consisten en actividades, acciones y ejecuciones dentro de una situación variacional, que comparten similitudes en cuanto a sus objetivos y los contextos en que se desarrollan.

Análisis de datos en tablas numéricas: Dada cierta información en forma de datos agrupados en tablas numéricas, se realiza un análisis de esos datos fijándose en patrones de comportamiento, y relaciones entre datos.

Construcción de gráficas con la variación como punto de referencia: Consiste en la construcción de gráficas apoyándose en el análisis de las variaciones, ya sea por medio de datos numéricos o de alguna gráfica.

"Para generar el desarrollo del pensamiento variacional es necesario el uso sistemático e interacción de los elementos que conforman al *Pylvar*, debido a que el desarrollo del pensamiento variacional implica usar todos estos elementos de manera conjunta y no aislada" (Caballero y Cantoral, 2013, p.1204).

> El desarrollo del pensamiento variacional tiene lugar dentro de una situación variacional, donde el uso las estrategias variacionales generan el estudio de la variación, pues resultan ser el punto de partida para el análisis y reflexión acerca del cambio y sus efectos al permitir identificar aquello que cambian en una situación, cuantificar ese cambio y analizar la forma en que se dan los cambios (Caballero y Cantoral, 2013, p.1204).

Caballero y Cantoral (2013) señalan que:

> El uso combinado de las estrategias variacionales y estructura variacional específica permite a la persona analizar la variación involucrada y con ello

> generar los argumentos variacionales para dar explicación a la situación que se plantea. Este tipo de argumentos se caracterizan por manifestar respuestas basadas en la variación, y que son articulados por códigos variacionales que dan cuenta del estudio de la variación, como pueden ser frases, dibujos, esquemas o gráficas. De esta forma, una situación variacional es resuelta por medio del uso de argumentos variacionales, y se caracteriza por el empleo de estrategias variacionales. (p.1204).

Esta caracterización realizada al *Pylvar* "nos brinda una manera de comprender la forma en que se genera el desarrollo del pensamiento variacional, lo que a su vez nos brinda herramientas para analizar las dificultades para desarrollar este pensamiento analizando las respuestas a una actividad" (Caballero y Cantoral, 2013, p.1204).

3.5 Una perspectiva socioepistemológica para la enseñanza del teorema de Thales

Del marco teórico se retoman las practicas sociales, entendidas como las acciones de un grupo social ubicado en un contexto histórico constituido por grupos sociales que utilizan la matemática como herramienta para el desarrollo de actividades profesionales como lo señala Covián (2005), debido a que se toma la práctica social de la pailería, ésta observada se modificó para llevarla al aula con objeto de resignificar el teorema de Thales.

Como indicios que permiten advertir una práctica social que involucra un saber matemático relacionado con el teorema de Thales que vive en la comunidad de paileros, se encuentra aquel que está relacionado con la componente histórica y sociocultural discutida en el capítulo 1, se trata del saber matemático implicado en la construcción del tubo de gran utilidad para la sociedad y la economía. Es decir, no se trata de la aplicación del conocimiento matemático, en el sentido de la aplicación de definición o fórmula, más bien se trata del uso del conocimiento que tiene sentido y utilidad para el grupo de paileros.

De la teoría de la Socioepistemología se retoman las cuatro dimensiones: didáctica, cognitiva, epistemológica y sociocultural. Para esta investigación las dimensiones se tomarán de esta manera: en la dimensión epistemológica, se va a estudiar naturaleza de ese saber matemático. La dimensión didáctica, a través de la secuencia de instrucciones por parte del profesor-investigador y los pasos que llevarán a cabo los alumnos. La dimensión cognitiva, basadas en secuencias de aprendizaje donde el alumno aprende el objeto a través de procesos, como son las estrategias variacionales, propios del desarrollo del pensamiento matemático y la dimensión sociocultural, donde se entenderá por qué y cómo los paileros tuvieron o tienen que hacer "ciertas cosas" para construir ese sistema complejo de conceptos.

Se llevó a cabo una situación variacional diseñada para alumnos de tercer grado de secundaria con la finalidad de identificar aquellos mecanismos cognitivos que permiten que los alumnos resignifiquen el teorema de Thales de la práctica de Pailería en el proceso de la construcción de tubos en forma de "T".

En una situación variacional como la que se desarrolló a través del análisis de la variación implicado en la construcción de tubos T cada vez más precisos, tiene cabida el pensamiento variacional y para desarrollarlo es necesario el uso de los elementos que conforman al *Pylvar*,

debido a que el desarrollo del pensamiento variacional implica usar todos estos elementos de manera conjunta (Caballero y Cantoral, 2013).

La situación variacional está compuesta por cinco etapas, la primera es evaluación diagnóstica y presentación del problema, la segunda etapa es la construcción de la plantilla del tubo T1, la tercera es la construcción de la plantilla del tubo T2, la cuarta es la construcción de la plantilla del tubo T3 y la etapa final es la de análisis, las cuales llevan de manera progresiva a la resignificación de dicho teorema.

La situación variacional diseñada tiene su fundamento en la teoría de la Socioepistemología. Esta teoría sostiene que las prácticas sociales sirven para explicar la construcción del conocimiento. La práctica social sugiere observar las prácticas en una comunidad, modificar dicha práctica y llevarla al aula con objeto de resignificar el concepto (Cantoral, 2002; Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006), es la praxis la que favorece y permite el surgimiento y significación de un determinado concepto, noción, proceso o procedimiento (Cabrera, 2009).

Particularmente, se trabajó en el contexto de la Pailería, donde la construcción de tubos es desarrollada por los paileros, y dicha actividad se encuentra caracterizada por un lenguaje propio, por los materiales y las herramientas que se utilizan en la elaboración de tubos y de una gran variedad de estructuras metálicas en donde distintas nociones matemáticas juegan un papel importante en la realización de distintas técnicas.

Se trata de una comunidad de prácticas (Cantoral, 2002; Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006), entre éstas, la práctica que guía a los paileros en la construcción de tubos. La manera en que los paileros realizan la construcción de los tubos es muy diversa, por lo cual, con el objeto de que los estudiantes logren una resignificación del concepto matemático, se llevó a cabo una adaptación de la práctica que guía la construcción de tubos en Pailería para poder insertarla en el ámbito escolar con la intención de que los estudiantes comprendan el teorema de Thales en el proceso de construcción de tubos en forma de “T”.

La adaptación consistió en modificar la práctica que realiza un pailero para llevarla al aula, enseguida, se mencionan las adaptaciones realizadas en este trabajo: la primera adaptación fue la introducción de la construcción del tubo en forma “T” a través de un problema verídico, como lo fue la noticia del robo de combustible, ver la Figura 3.5.1, esto con la finalidad de motivar al alumno.

Figura 3.5.1 Introducción de la construcción del tubo por medio de una noticia (López, 2017).

La segunda adaptación fue la construcción de distintos tubos forma “T” con distintas particiones, ver la Figura 3.5.2, con la finalidad de que observaran cambios entre cada uno. La tercera adaptación fue la obtención de plantillas en hojas milimétricas, ver la Figura 3.5.2.

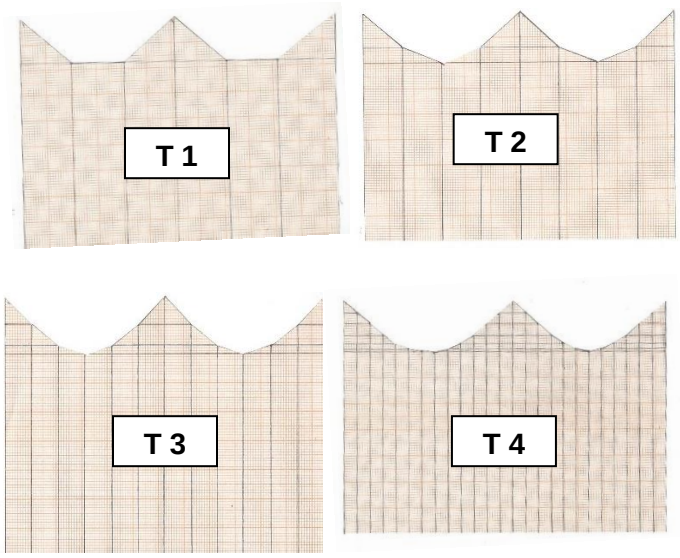


Figura 3.5.2 Plantillas de los 4 tubos.

La cuarta adaptación fue señalar explícitamente la relación de los triángulos que se formaban al juntar la plantilla con el plano de trabajo, ver la Figura 3.5.3. La quinta adaptación fue la de visualizar la relación de los triángulos en los cuatro tubos.

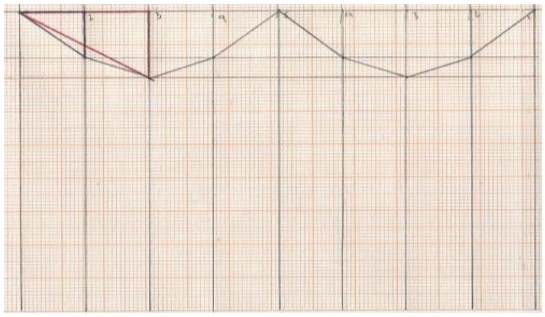


Figura 3.5.3 Par de triángulos del plano de trabajo y plantilla (T2).

La sexta y última adaptación fue la recolección de medidas de los triángulos.

Estas adaptaciones aparecen en las cinco etapas de la situación variacional que se describen en el siguiente capítulo.

La situación variacional permitió a las alumnas entender el teorema no como una fórmula que tiene que ser memorizada sino más bien como una condición que se tiene que alcanzar a través de un proceso de cambio donde se tiene el propósito de construir un tubo con un corte más preciso con borde suave en el sentido de que se requiera menos cantidad de soldadura y con menor probabilidad de fractura.

A través de la unidad de análisis, la cual consiste en la coordinación de estrategias variacionales empleadas en la situación variacional, las alumnas resignificaron el teorema de Thales y lo hicieron al interpretarla a través de la noción de precisión que se va alcanzando cada vez que se practicaban más cortes en la construcción del tubo T.

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA

Introducción

En este capítulo se presenta la metodología de tipo cualitativa que se llevó a cabo. Además, se describen los participantes y el contexto de la investigación.

Finalmente, se presenta la implementación de la situación variacional a partir de cada una de las etapas realizadas en cinco sesiones.

4.1 Tipo de estudio

La perspectiva metodológica ha sido la interpretativa o cualitativa. Cualitativa porque se trata de un estudio de tipo exploratorio para analizar cómo los estudiantes predicen, estiman y comparan.

Canedo (2009) señala que "en la investigación cualitativa el interés está puesto en comprender los significados que los individuos construyen, es decir, cómo toman sentido de su mundo y de las experiencias que tienen en él" (p.107).

Quecedo y Castaño (2002) mencionan que "puede definirse la metodología cualitativa como la investigación que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable" (p.7), en este trabajo se les dio relevancia a los argumentos de las estudiantes habladas en el grupo y escritas en la pregunta que se les proporcionó en hoja.

Fernández y Díaz (2002) señalan "la investigación cualitativa evita la cuantificación" (p.1), por lo que en este estudio no se elaboraron gráficos ni diagramas con variables cuantificadas.

Una premisa que menciona Moral (2006) es la de una combinación de prácticas metodológicamente múltiples, materiales empíricos, perspectivas y observadores, permite que un estudio particular sea mejor comprendido y que tenga mayor rigor y profundidad, como se aplica en esta investigación.

Garrido (s.f.) que señala que, para un buen diseño de investigación de tipo cualitativa, el muestreo intencionado de sujetos-tipo permite bosquejar el alcance de la muestra de participantes que deben considerarse, según el autor los tipos de sujetos son cinco: sujetos voluntarios, sujetos expertos y sujetos tipo. En esta investigación se tomará en cuenta lo sujetos voluntarios, es decir, personas que pertenecen a un contexto determinado que están dispuestos a participar como informantes o protagonistas de la indagación, es decir, las alumnas de tercer grado de secundaria.

Por otro lado, Sautu et al. (2005) señala que, en la investigación cualitativa para la metodología, las técnicas de producción de datos son: entrevistas interpretativas, entrevistas etnográficas, observación no participante, análisis de documentos y análisis de material

visual/auditivo. De los cuales utilizaré la observación no participante y el análisis de material visual como serán las plantillas de los tubos que obtendrán los alumnos.

En la investigación cualitativa el investigador es el principal instrumento en la obtención y análisis de datos (Canedo, 2009).

4.2 Participantes y contexto de la investigación

Los sujetos de estudio fueron estudiantes del grupo "A" del tercer grado de secundaria, en la escuela Secundaria Técnica No. 1 del estado de San Luis Potosí, S.L.P. Según los resultados obtenidos en las diferentes pruebas estandarizadas *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes* (PLANEA), *Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo* (EXCALE) y la página oficial de *Mejore Tu Escuela*, posicionan a la institución en el lugar 257 de 1473 con una clasificación de *bien* según los criterios de evaluación.

La muestra estuvo constituida por un grupo de 22 alumnas de edades de 15 años. Se trabajó con un grupo de estudiantes mujeres, debido al permiso que proporcionó la subdirectora Profa. Fabiola Hernández Cristales y la profesora a cargo de la materia de Matemáticas, las estudiantes conforman el grupo completo de 3º." A".

La actividad se llevó a cabo en el aula de Matemáticas donde cuenta, actualmente, con dos pizarrones en los cuales uno era tecnológico, un proyector, una habitación con equipo de computación, dos escritorios y con 32 mesas de trabajo individual.

El material utilizado fue previamente planeado y estructurado para los tiempos estimados en los que se diseñó la situación variacional.

Todo el material fue proporcionado a las estudiantes para facilitar el desarrollo de la actividad en las diferentes etapas.

La aplicación de la situación variacional se realizó los días 26, 27,28 de febrero y los días 01 y 02 de marzo del año 2018 en el horario de lunes 8:15-9:00, martes 10:50-11:35, miércoles 8:15-9:00, jueves 7:30-9:00 y viernes 12:20-13:05.

Las técnicas de recolección de datos son herramientas que nos permiten recabar, interpretar y verificar la información que nos lleve a alcanzar los objetivos de la investigación. Estas técnicas son utilizadas para acercarse a las prácticas y extraer información oportuna. Las técnicas utilizadas en esta investigación fueron observación directa, examen diagnóstico, pregunta escrita, preguntas abiertas y grabaciones en video con audio. Los instrumentos de recolección de información fueron las plantillas de cada pareja, hojas de respuestas de la pregunta escrita, los tubos armados de cada pareja y las tablas con las medidas de los triángulos.

4.3 Implementación

4.3.1 Etapa 1, evaluación diagnóstica y presentación del problema.

La primera sesión se llevó a cabo en 50 minutos, se realizó dentro del aula de matemáticas, las alumnas utilizaron las mesas de trabajo y realizaron la actividad en parejas. En esta sesión se contaba con un total de 21 alumnas, a partir de la segunda sesión asistieron 22.

Por cada par de mesas de trabajo se encontraban distribuidas 2 parejas. Se realizó la presentación del profesor-investigador ante el grupo, así como el rol que desempeñaría dentro del aula. La sesión se llevó a cabo de manera estructurada, se les guió a las estudiantes en cada paso, y tomando en consideración el tiempo asignado para cada parte de la actividad.

En la primera parte de la actividad, se realizó un examen diagnóstico, el cual resolvieron individualmente, ver Anexo A, al estilo en que se presenta en el libro de Briceño y Verdugo, ver sección 2.2.1, se les indicó que contestaran únicamente lo que sabían y no contaran con el apoyo de apuntes. Contestaron el examen en un máximo de 25 minutos, esto con la finalidad de indagar los conocimientos previos de las estudiantes acerca del teorema de Thales.

Al concluir el tiempo asignado para esta primera parte, se recogieron todas las hojas y se prosiguió a la segunda parte de la actividad.

En la segunda parte, antes de comenzar se les preguntó a las alumnas ¿Conocen qué es la Pailería?, ¿Qué se imaginan que hace un pailero?, y con base en sus respuestas se llevó a cabo la presentación en PowerPoint, ver Anexo B, donde sus elementos fueron: la noticia sobre el robo de combustible en las tuberías de Pemex, la descripción de la Pailería, las actividades de un pailero y el problema que se presentará para dar comienzo a la actividad. Además, se dieron a conocer ejemplos de estructuras metálicas para mostrarles a las alumnas la existencia de lo que se hace en Pailería.

Una vez terminada la explicación, se les comentó que ellas jugarían el rol de paileros en el resto de la actividad, para esto, según el problema dado construirían tubos en forma de “T” bajo la condición señalada en el mismo.

Las alumnas reflexionaron acerca de cómo se realizaría la acción, expresaron sus ideas y comentarios acerca de la posible solución. Finalmente, se les solicitó compás de precisión.

4.3.2 Etapa 2, construcción de la plantilla del tubo T1, análisis del tubo e identificación de los triángulos.

La segunda sesión se llevó a cabo en 2 horas, se abordó de manera estructurada, se les guió en cada paso, y tomando en consideración el tiempo asignado para cada parte de la actividad.

Se les recordó el problema a abordar, y se dio paso al inicio de la actividad. En esta sesión, se llevó a cabo la construcción de la plantilla del corte del tubo T1, se les pidió un radio de 2 centímetros con 3 secciones y se les guió en el procedimiento. Se les proporcionó una hoja milimétrica con el plano cartesiano trazado, ver la Figura 3.5.2, una plantilla en blanco para recortar, que servirá para ensamblar con la plantilla del corte, además de regla, compás, exactos para cortar y cinta adhesiva para pegar los tubos.

Destaco que la plantilla en blanco para recortar y ensamblar con la plantilla del corte del tubo será llamada a partir de ahora como “tubo receptor”.

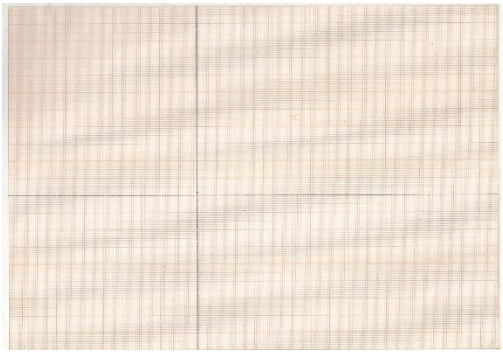


Figura 3.5.2 Plano de trabajo.

Al finalizar la construcción del corte del tubo T1, se les pidió recortar la plantilla y recortar también el tubo receptor para ensamblarlos y los sujetaron con la cinta adhesiva formando su tubo en forma de "T". Posteriormente, al ensamblar ambas plantillas se dio paso a una serie de preguntas para el grupo, por ejemplo:

- ¿Ahora que tenemos nuestro tubo T1, que observan?
- ¿Este tubo al ensamblarlo con el otro, se utilizará más o menos soldadura?
- ¿Qué podemos hacer para utilizar menos soldadura?
- ¿Si analizamos una parte de lo que quedó en el plano de trabajo, que podemos observar?
- ¿Si tomamos una parte, que figura geométrica podemos contemplar?

Cuando las alumnas llegaron finalmente a la conclusión de que había dos triángulos, se les preguntó nuevamente:

- ¿Ahora que localizamos dos triángulos, qué datos podemos obtener de ahí?

Luego, se nombraron los dos triángulos, el triángulo mayor color rojo será ABC y el triángulo pequeño color azul será AB'C'. Para cerrar la sesión, se les recogió el material y los tubos los cuales serían utilizados en las siguientes sesiones.

4.3.3 Etapa 3, construcción de la plantilla del tubo T2.

La tercera sesión se llevó a cabo en 50 minutos, se abordó de manera estructurada y se retomaron los pasos del tubo anterior.

Se les recordó el par de triángulos del tubo anterior y se retomó la conclusión de una alumna acerca de la curvatura.

En esta sesión, se llevó a cabo la construcción de la plantilla del corte del tubo T2, se les pidió nuevamente un radio de 2 centímetros, pero ahora con 4 secciones y se les guió en el procedimiento apoyados en las diapositivas, hasta obtener su plantilla.

Se les proporcionó una hoja milimétrica ya con el plano cartesiano trazado, el tubo receptor para recortar, que servirá para ensamblar con la plantilla del corte, además de regla, compás, exactos para cortar y cinta adhesiva para pegar los tubos.

Al finalizar la construcción del corte del tubo T2, se les pidió recortar la plantilla y recortar también el tubo receptor para ensamblarlos y los sujetaron con la cinta adhesiva formando su tubo en forma de "T". Para cerrar la sesión, se les recogió el material y los tubos los cuales serían utilizados en las siguientes sesiones.

4.3.4 Etapa 4, construcción de la plantilla del tubo T3, análisis del tubo T2 y toma de medidas.

La cuarta sesión se llevó a cabo en 2 horas, se abordó de manera estructurada, se analizaron los tubos T1 y T2, se retomaron los pasos del tubo anterior para dar paso a la construcción del tubo T3 y se tomó en consideración el tiempo asignado para cada parte de la actividad.

Se repartió el material de los tubos anteriores, se les pidió que analizaran el tubo T2 y se les pidió lo compararan con el tubo T1, para esto se les hizo una serie de preguntas:

- ¿En el tubo T2, que observan?
- ¿Qué figura observan?
- ¿Si analizamos una parte de lo que quedó en el plano que observan?
- ¿Ven alguna diferencia con el anterior?
- ¿Con la plantilla y el tubo para ensamblar, que observan?
- ¿Se usará menos soldadura que en el anterior?
- ¿Habrá menos posibilidad de fractura?
- ¿Qué observan en ambos triángulos del tubo T1 y T2?

Una vez que las alumnas identificaron los triángulos, se les proporcionó la tabla, ver la Figura 3.5.4, para obtener los datos de los triángulos de los tubos T1 y T2.

	AB	AC	AB'	AC'	$\frac{AB}{AB'}$	$\frac{BC}{AB'}$	$\frac{AC}{AC'}$	$\frac{BC}{B'C'}$	$\frac{B'C'}{BB'}$
T1									
T2									
T3									
T4									
pT5									
pT6									
Observaciones T1-T2-T3 hasta T6:									

Tabla.

Figura 3.5.4 Tabla de datos.

Las alumnas obtuvieron los datos de los triángulos de los tubos T1 y T2 con apoyo de las diapositivas, ver Anexo C.

La segunda parte de la actividad se dio paso con la construcción del tubo T3, se les dijo que se utilizaría el mismo radio, pero ahora con 6 secciones, para ello se retomaron los pasos de los tubos anteriores, se les proporcionó los materiales, el tubo receptor y con apoyo de las diapositivas, ver Anexo D, se les fue guiando en el procedimiento.

Al finalizar la construcción del corte del tubo T3, ver la Figura 3.5.4, se les pidió recortar la plantilla y recortar también el tubo receptor para ensamblarlos y los sujetaran con la cinta adhesiva formando su tubo "T", con esto se cerró la sesión y se recogió el material con los tubos.

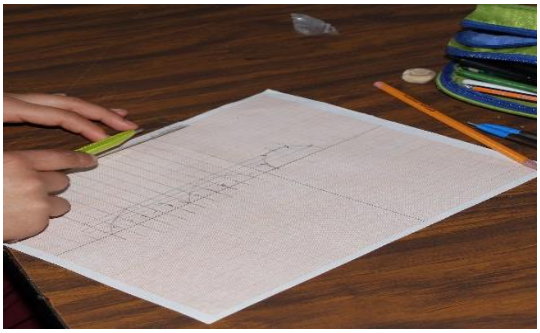


Figura 3.5.4 Plantilla tubo T3.

4.3.5 Etapa 5, análisis de los tubos T3 y T4, toma de medidas, reflexión de la pregunta escrita, enunciación del teorema y solución del problema.

La quinta sesión se llevó a cabo en 2 horas, se abordó de manera estructurada, se verificaron datos del tubo T1 y T2 y se prosiguió a analizar el tubo T3, recortaron el tubo T4 y se continuó con el análisis de éste, por último, se analizaron los cuatro tubos y se llegó a la conclusión del problema principal y se tomó en consideración el tiempo asignado para cada parte de la actividad.

Se repartió el material de los tubos anteriores, se les pidió verificar datos de los tubos T1 y T2 tomando nuevamente las medidas. Enseguida, se ensambló el tubo T3 y se realizó el análisis, para ello se les preguntó:

- ¿Qué observan en T3?
- ¿Al ensamblarlo, que observan?
- ¿Qué figura hay en común con los tubos anteriores?

Luego, se pasó a la explicación de los triángulos del tubo T3, ver Anexo E, para obtener los datos y agregarlos a la tabla.

Destaco que en el tubo T3 las alumnas comentaron que se hacía más visible una curva suave que se va haciendo continua, a partir de ahora, se mencionará la curva continua en el sentido de G.Zill (1985), "una curva *continua* es una curva sin aberturas o interrupciones. Es decir,

aquella curva que puede dibujarse sin levantar la pluma o el lápiz del papel" (p.85) y una curva suave en el sentido de que el borde del tubo T3 no tiene forma poligonal (hexagonal).

Después, se prosiguió a la segunda parte de la actividad, para ello se pidió recortar el tubo T4, ver la Figura 3.5.5, que se las había dado y se les proporcionó además el tubo receptor y cinta adhesiva.

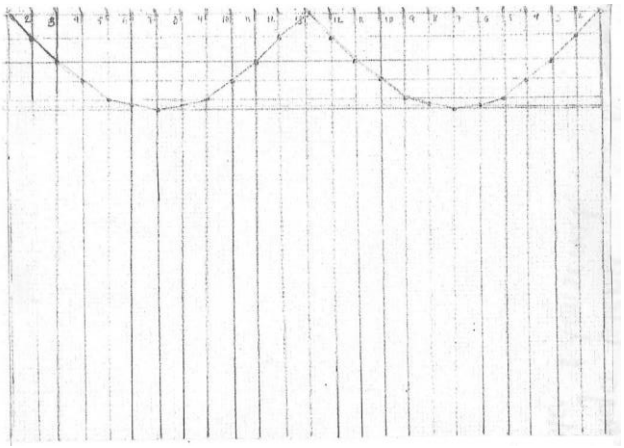


Figura 3.5.5 Plantilla tubo T4.

Al obtener su plantilla T4 se les pidió ensamblarlo con el otro tubo, y se dio paso a una serie de preguntas que se realizaron por cada pareja:

- ¿Qué observan en T4?
- ¿Qué figura hay en común con los anteriores?
- ¿Al ensamblarlo, que observan?

Luego, se dio paso a la explicación de los triángulos del tubo T4 y se pidió a las alumnas obtener los datos para vaciarlos en la tabla y se verificó las medidas de cada tubo en el pizarrón.

Al terminar de llenar los datos de este tubo, se les preguntó:

- ¿Qué pasaría con un tubo T5 o T6?

Se les pidió llenar la tabla con estas predicciones y contestar la parte de observaciones.

Posteriormente, se explicó qué pasaba con los triángulos en los cuatro tubos y luego se prosiguió a preguntarles:

- ¿Qué se tiene que hacer para lograr una precisión alta?

Al contestar esta pregunta y reflexionar sobre ésta, se les proporcionó una hoja con una pregunta escrita que contestaron en parejas: ¿Relación entre el cociente de la tabla y la precisión?

Como se mostraban con dudas, se les añadió otra pregunta de manera verbal: ¿Qué creen ustedes que tengan que ver los cocientes con los cortes y la precisión?

Se les dijo que la precisión estaba relacionada con qué tanto el tubo se ajusta al otro. Si realizan pocos cortes será menos preciso.

Luego, al terminar de contestar la pregunta anterior, se les preguntó:

- ¿Por qué estos valores de la tabla se mantienen constantes?
- ¿A qué valor se aproximan los cocientes?
- ¿Por qué $\frac{BC}{AB'}$ y $\frac{B'C'}{BB'}$ no se aproximan a ningún valor?, ¿A qué se debe?

4.4 Esquema de las etapas

A continuación, se describe cada una de las etapas llevadas a cabo durante las sesiones, ver la Figura 4.4.

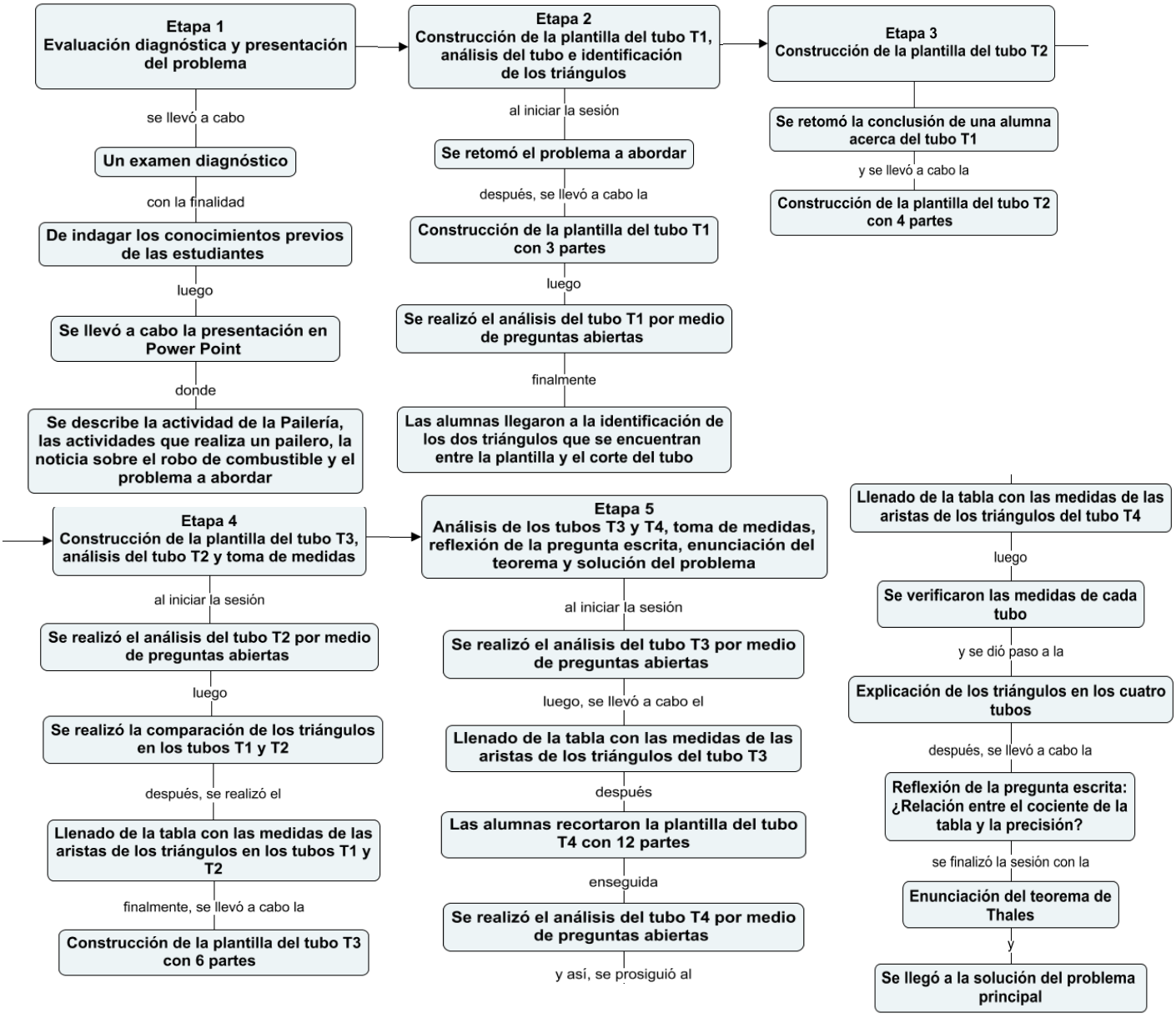


Figura 4.4 Esquema de las etapas.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA SITUACIÓN VARIACIONAL

CAPÍTULO 5

RESULTADOS DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA SITUACIÓN VARIACIONAL

Introducción

En este capítulo se presentan los resultados que se generaron de la implementación de la situación variacional a partir de cada una de las etapas. Los estudiantes fueron capaces de observar el teorema de Thales a través del proceso de construcción del tubo en forma "T". También, las alumnas lograron una resignificación de dicho teorema, lo cual tiene que ver con la búsqueda de una mayor precisión y reducción de probabilidad de fractura del tubo. La resignificación aparece como una respuesta al problema planteado.

5.1 Resultados de la etapa 1: evaluación diagnóstica y presentación del problema.

En esta sesión se destaca que, en el examen diagnóstico, 5 alumnas realizaron el ejercicio III por teorema de Pitágoras (2 exámenes realizados en parejas y un examen realizado individualmente), ver la Figura 5.1.1, y, 2 alumnas distintas aplicaron este mismo teorema al ejercicio V, ver la Figura 5.1.2, por lo que obtuvieron respuestas erróneas y las 14 alumnas restantes no contestaron los ejercicios III y V. Los ejercicios restantes del examen diagnóstico no fueron resueltos por ninguna alumna. A continuación, se describe cada uno de los casos resueltos por las alumnas en los ejercicios III y V del examen diagnóstico.

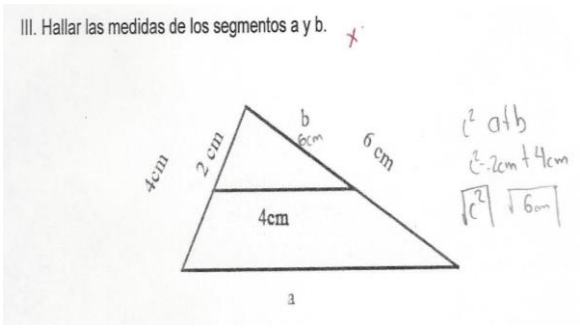
Como se puede observar en la Figura 5.1.1, se muestran tres casos diferentes de resolución del ejercicio III del examen diagnóstico en donde las alumnas resolvieron el problema aplicando el teorema de Pitágoras, por lo que no llegaron a las respuestas correctas. En ningún momento se mencionó que el examen se trataba del tema teorema de Thales.

En la imagen (a) de la Figura 5.1.1, se puede decir que las alumnas tienen la noción del teorema de Pitágoras, sin embargo, es erróneo el conocimiento previo que tienen acerca de este teorema, puesto que éste solo aplica a triángulos rectángulos y la fórmula correcta es $c^2 = a^2 + b^2$.

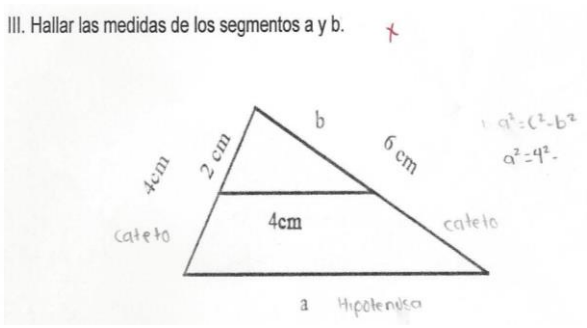
En la imagen (b) de la Figura 5.1.1, las alumnas tienen noción del teorema de Pitágoras porque saben que los elementos involucrados son dos catetos y la hipotenusa, a pesar, de que los nombran en el triángulo del ejercicio es erróneo el acomodo de éstos, puesto que el teorema solo aplica a triángulos rectángulos, también, se puede decir que, aunque escribió una fórmula expresada adecuadamente no obtuvo la medida correcta del segmento a.

Sucedió algo similar en la imagen (c) de la Figura 5.1.1, debido a que estas alumnas también tenían noción del teorema de Pitágoras, los elementos involucrados y una de las fórmulas para obtener un cateto. Sin embargo, es erróneo el conocimiento previo de las alumnas, puesto que como se ha dicho en los dos casos anteriores, el teorema de Pitágoras solo aplica a triángulos rectángulos. La diferencia con los casos descritos anteriormente, es que las alumnas colocaron un ángulo recto en el triángulo que se forma entre las medidas 2cm, 4cm y el segmento b. Este ángulo colocado por las estudiantes es erróneo, ya que el triángulo que

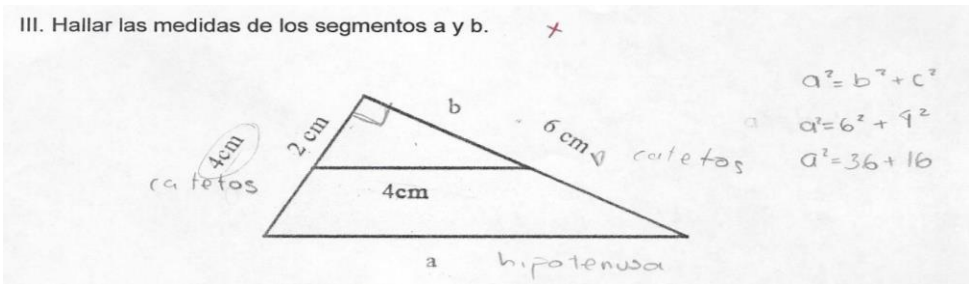
se encuentra entre esas medidas no es un triángulo rectángulo. A pesar de esto, no lograron obtener la medida correcta del segmento a.



(a)



(b)



(c)

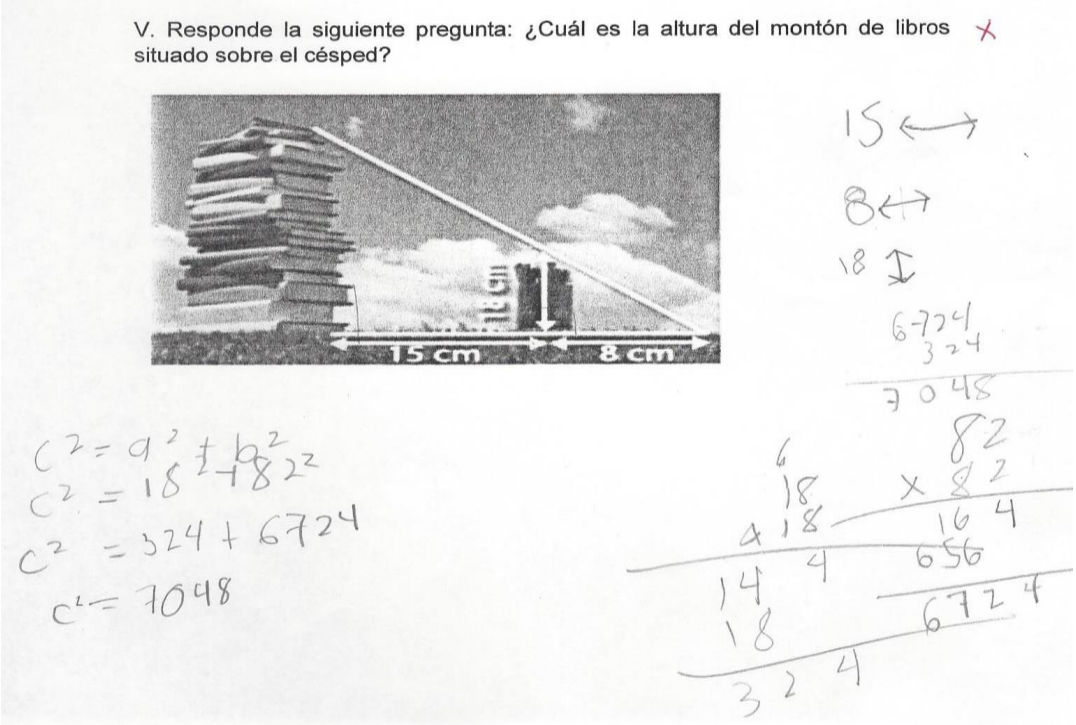
5.1.1 Respuestas de las alumnas en el ejercicio III del examen diagnóstico (Teorema de Thales, s.f.).

Como se puede observar en la Figura 5.1.2, se muestran dos casos diferentes de resolución del ejercicio V del examen diagnóstico en donde las alumnas resolvieron el problema aplicando el teorema de Pitágoras, por lo que no llegaron a las respuestas correctas.

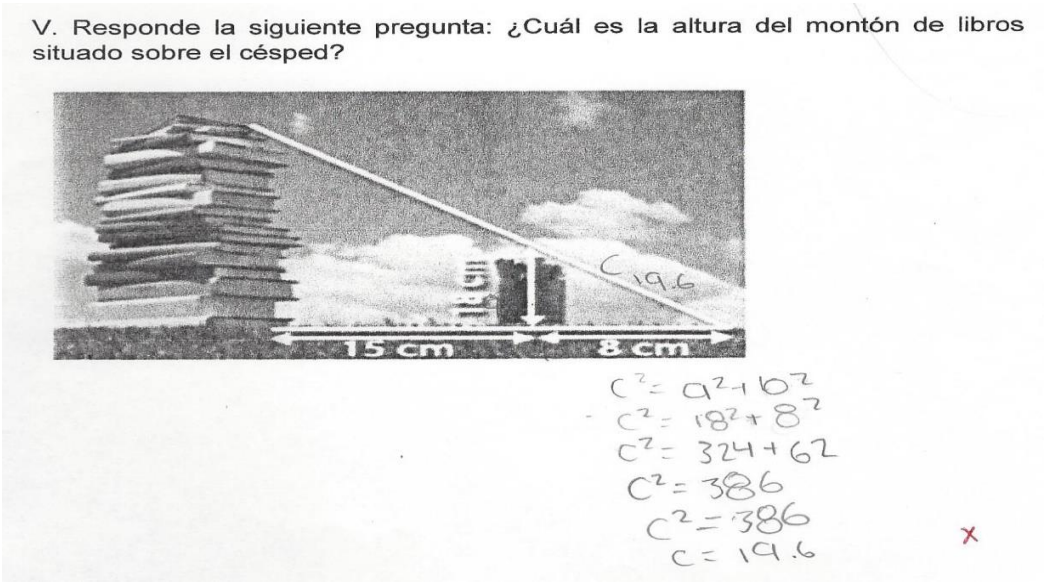
En la imagen (a) de la Figura 5.1.2, las alumnas tienen noción del teorema de Pitágoras, escriben adecuadamente la fórmula de dicho teorema, pero no llegan a la respuesta correcta.

Lo mismo sucede en la imagen (b) de la Figura 5.1.2, puesto que las alumnas aplican el teorema de Pitágoras para resolver este problema, plantean la fórmula, pero no llegan a la respuesta correcta. A diferencia del caso anterior, las alumnas toman el triángulo pequeño para aplicar dicho teorema, es decir, toman los catetos como las medidas de 18cm y 8 cm y como la hipotenusa el segmento “c”.

(a)



(b)



5.1.2 Respuestas de las alumnas en el ejercicio V del examen diagnóstico (Cruz, 2015).

Estos fueron los casos en los que las alumnas contestaron estos ejercicios, las demás alumnas ni siquiera los intentaron responder, puesto que los dejaron en blanco. El teorema de Thales no aparece como conocimiento previo de las alumnas. Cabe destacar que este grupo de alumnas acababan de ver el tema del teorema de Thales antes de iniciar la actividad, sin embargo, algunas tenían más presente el teorema de Pitágoras.

Con respecto a la presentación de PowerPoint que fue empleada para describir qué es la Pailería, ver la Figura 5.1.3, las alumnas no sabían qué es la Pailería ni se imaginaban de lo que trata la actividad. Al momento de plantearles el problema principal del robo de combustible, se mostraron interesadas y algunas mostraron curiosidad por saber que pasaría en la semana, puesto que algunas preguntaron si se construirían los tubos.

Figura 5.1.3 Presentación en PowerPoint.

En toda la sesión se mostraron con interés y con completa atención al profesor-investigador.

Puesto que era la recolección de información y la presentación de lo que se trata la actividad, la única dificultad que tuvieron las alumnas fue con el examen diagnóstico, a pesar de que se les comentó la intención de esta prueba ellas sacaron sus apuntes, y aún con éstos no resolvieron correctamente algún ejercicio.

En esta etapa no se observó ninguna estrategia variacional debido a que solamente se presentó el problema por medio de PowerPoint y después, se realizó la evaluación diagnóstica.

5.2 Resultados de la etapa 2: construcción de la plantilla del tubo T1, análisis del tubo e identificación de los triángulos.

En esta sesión las alumnas se mostraron inquietas y sólo al principio pusieron atención.

La mayoría de las alumnas terminaban rápidamente los pasos de construcción del tubo T1, puesto que trabajaron con sus propios instrumentos y tenían más facilidad de trazar con su compás. Estuvieron más participativas e interesadas en esta sesión.

Hubo una pareja de alumnas que en los primeros pasos no sabían cómo dividir el semicírculo que se utiliza para obtener la medida exacta de la abertura del compás, en partes iguales, por lo que se tuvo que dar la explicación personalmente.

Finalmente, las alumnas obtuvieron su tubo T1 y lo ensamblaron con el tubo receptor que se les proporcionó, para formar su tubo “T”, como se muestra en la Figura 5.2.1.

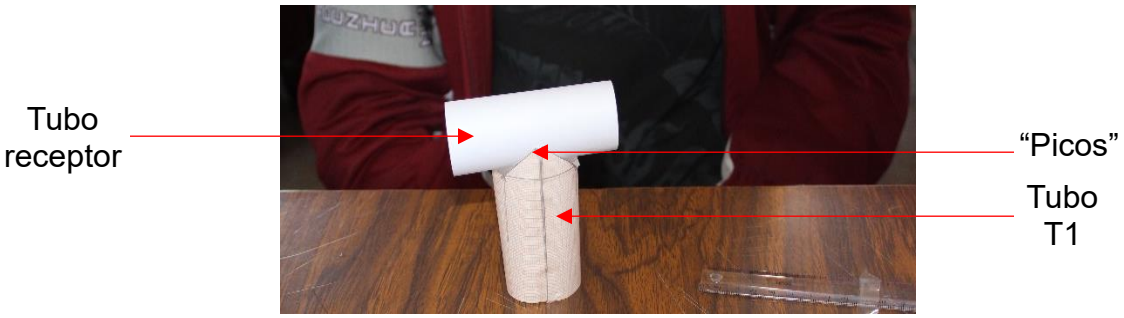


Figura 5.2.1 Tubo forma "T".

Después de haber construido su tubo en forma "T", se prosiguió al análisis del tubo T1 por medio de preguntas abiertas.

A continuación, se presenta el diálogo que estableció el profesor-investigador con algunas de las alumnas que participaron en la discusión:

Diálogo 1

Profesor-investigador: ¿Qué sucede al ensamblar el tubo T1 con el tubo receptor? (ver Figura 5.2.1)

Alumnas: Queda una abertura

Profesor-investigador: Y ¿Qué es lo que podríamos hacer para utilizar menos soldadura?

Alumnas: Hacer otros picos (ver la Figura 5.2.1), le faltan partes, hacer partes redondas para que encaje bien, hacer curvas, los trazos están muy rectos, …

Profesor-investigador: Al ensamblar no embona bien, ahora vamos a despegar la plantilla del tubo T1 y lo vamos a colocar al plano de trabajo, ¿Qué observan con su plano de trabajo y la plantilla?

Alumnas: Picos

Profesor-investigador: ¿Qué podemos observar al analizar esta parte?

Alumnas: Qué está muy recto, tiene que ser curveado para que no queden huecos, … (la alumna se refiere a una curva suave)

Profesor-investigador: ¿Cómo podemos hacer para que quede esa curva?

Alumnas: Marcarlo con compás

Diálogo 1. Transcripción del video tomado durante la sesión. Respuestas de las alumnas a las preguntas del profesor-investigador.

Con estas preguntas, las alumnas reflexionaron acerca del tubo y algunas observaron que entre el tubo T1 y el tubo receptor quedaba una abertura, también, que hacían falta más picos para que embonaran bien los tubos y que con esto se haría más suave el corte del tubo T1.

Al terminar el análisis del tubo "T", se prosiguió a la identificación de los triángulos. Con base en las preguntas de parte del profesor-investigador, algunas alumnas llegaron a la identificación de uno de los triángulos que se formaba en el borde del corte del tubo T1, ver triángulo AB'C' en la Figura 5.2.2, más no veían el otro triángulo, ver triángulo ABC en la Figura 5.2.2, puesto que descubrían otras figuras o triángulos en otras partes de la curva, entre las figuras que señalaban se encontraban trapecios, rectángulos, triángulos rectángulos y un hexágono. Por lo que se tuvo que mostrar exactamente donde quedaba ese otro triángulo.

A continuación, se presenta el diálogo que estableció el profesor-investigador con algunas de las alumnas que participaron en la discusión:

Diálogo 2

Profesor-investigador: ¿Qué figura se encuentra en esta parte?

Alumnas: Rectángulo y triángulos rectángulos

Profesor-investigador: ¿Qué es lo que pasa con estos tres puntos?

Alumnas: Se encuentran triángulos rectángulos y un trapecio

Profesor-investigador: Ya tenemos un triángulo rectángulo, ¿Qué otra figura se puede formar con esos tres puntos?

Alumnas: Se puede completar otro triángulo

Diálogo 2. Transcripción del video tomado durante la sesión. Identificación de los dos triángulos.

El profesor-investigador guía en todo momento a las alumnas con base en preguntas, para que el objeto geométrico sea visto por ellas. Cabe destacar que todas estaban atentas, pero solo algunas participaban activamente durante esta sesión, otras participaban después en las siguientes sesiones, es decir, no siempre participaban las mismas estudiantes.

Después, de localizar los dos triángulos, se les nombró, triángulo mayor y triángulo pequeño, es decir, el mayor es de color rojo ABC y el pequeño es de color azul AB'C', como se muestra en la Figura 5.2.2, finalmente se les recogió el material y los tubos.

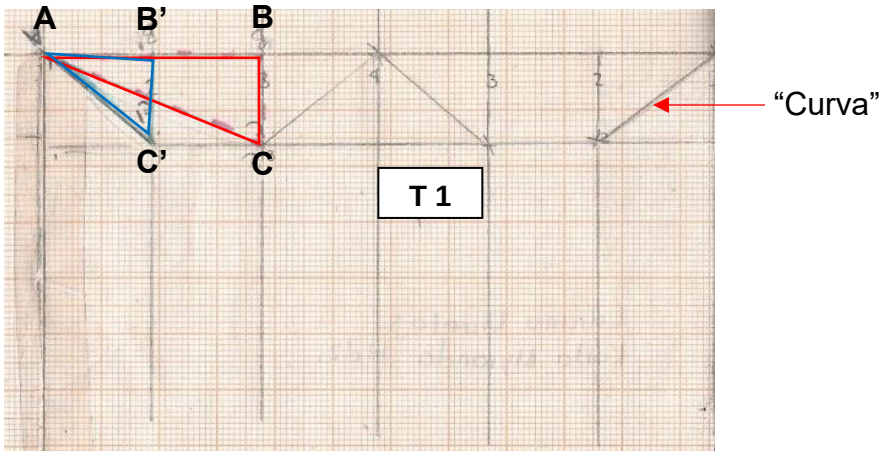


Figura 5.2.2 Triángulo mayor y triángulo pequeño (rojo y azul).

Las alumnas reflexionaron acerca del corte, en acuerdo común, decían que debía haber una curva suave para que no hubiera probabilidad de fractura en el tubo y por consecuencia se utilizara menos soldadura.

Dos parejas de alumnas tuvieron dificultades al construir el tubo T1 debido a que hicieron mal los trazos del semicírculo, es decir, no encontraban la medida exacta de la abertura del compás, tampoco colocaban en el centro de los cortes, el trazo de la línea horizontal, por lo que se tuvo que regresar a la explicación desde el inicio.

La mayoría de las alumnas mostraron dificultad al utilizar el compás, puesto que las que no llevaban su material se les prestó, pero se les advirtió que debían afinarle la punta con el exacto, y como sólo unas pocas lo hacían, las demás se desfasaban con las medidas, puesto que no daban la precisión que se pedía.

En esta etapa no se observó ninguna estrategia variacional debido a que solamente se realizó la construcción de la plantilla del tubo T1, ver la Figura 5.2.3.

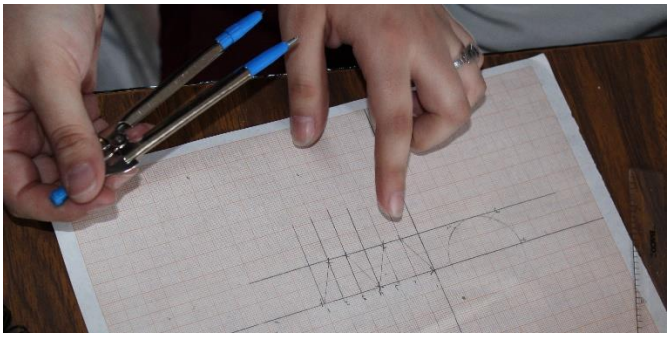


Figura 5.2.3 Construcción de la plantilla del tubo T1.

En esta etapa las alumnas identificaron los triángulos del tubo T1, ver Figura 5.2.2, uno mayor y uno más pequeño, además, estuvieron de acuerdo con los comentarios de algunas de sus compañeras respecto a que decían que debía haber una curva, ver Figura 5.2.2 "curva", para que no se fracturara el tubo.

5.3 Resultados de la etapa 3: construcción de la plantilla del tubo T2.

En esta sesión se construyó el tubo T2 y no se realizó la discusión de este tubo pues el tiempo de una hora sólo alcanzó para construirlo.

La gran mayoría de las alumnas no tardaron en la construcción del tubo, ver Figura 5.3(a), pues ya conocían los pasos, ver la Figura 5.3(b), incluso hubo algunas alumnas que se adelantaban y trabajaron más rápido puesto que con apoyo de las diapositivas, de la presentación en PowerPoint, comprendieron mejor el desarrollo del corte, además, estuvieron participativas y menos inquietas.

(a) (b)

Figura 5.3 Tubo T2 y construcción de la plantilla.

En esta etapa sólo se recordó las observaciones que realizaron las alumnas del tubo T1, es decir, la visualización de los dos triángulos, pero no se pudo continuar la discusión del tubo T2 debido a que la sesión solo permitió realizar la construcción de la plantilla.

Solo una pareja de alumnas no entendió el procedimiento de la construcción del tubo T2, puesto que la sesión anterior también les resultó muy difícil y trataron de hacer lo que habían entendido.

En esta etapa no se observó ninguna estrategia variacional debido a que solamente se realizó la construcción de la plantilla del tubo T2.

5.4 Resultados de la etapa 4: construcción de la plantilla del tubo T3, análisis del tubo T2 y toma de medidas.

Se retomó la discusión del tubo T2 abordado en la sesión anterior. La conclusión que obtuvieron la gran mayoría de las alumnas fue que el corte de la plantilla del tubo T2 se va haciendo curva suave debido a las secciones que tiene el tubo. A continuación, se presenta el diálogo que estableció el profesor-investigador con algunas de las alumnas que participaron en la discusión:

Diálogo 3

Profesor-investigador: ¿Qué observan en T2?

Alumnas: Todavía hay un espacio

Profesor-investigador: Entonces queda menos probabilidad de fractura, ¿Qué pasa con la soldadura?

Alumnas: Se utiliza menos y se está haciendo más curveado (es decir se está haciendo una curva suave)

Profesor-investigador: ¿Por qué se está haciendo más curveado?

Alumnas: Porque hay más partes o cortes (secciones)

Profesor-investigador: ¿Qué observan en esta parte con la plantilla y el plano de trabajo?

Alumnas: Triángulos (ver la Figura 5.4.1)

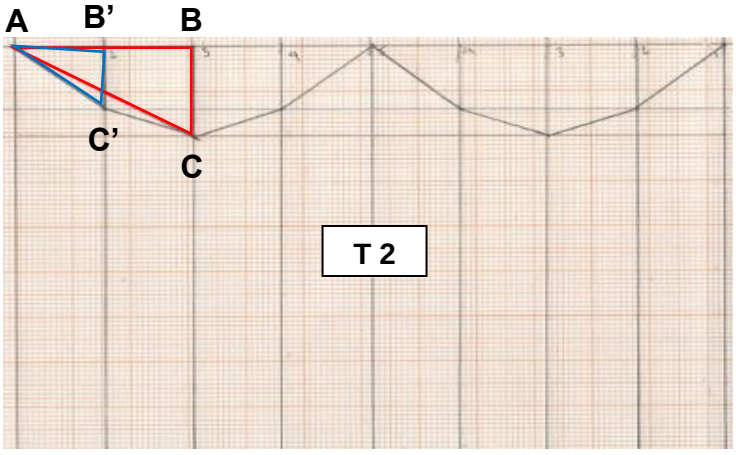


Figura 5.4.1 Triángulo mayor y triángulo pequeño (rojo y azul).

Profesor-investigador: y ¿Qué es lo que pasa con esos triángulos?

Alumnas: Se curvean (las alumnas se refieren a que el triángulo pequeño azul se va metiendo en el triángulo grande rojo)

Profesor-investigador: ¿Qué datos obtenemos de los triángulos del tubo T1?, ¿Por qué nos interesa? Porque en esta parte es justamente que la curva empieza a verse más marcada y se ocupa menos espacio en el ensamble de los tubos

Alumnas: Medidas

Profesor-investigador: ¿Cuáles medidas?

Alumnas: Base de ambos y alturas

Diálogo 3. Transcripción del video tomado en la primera parte de la sesión. Identificación de los triángulos en el tubo T2.

En general, las alumnas identificaron más rápido los triángulos, ver la Figura 5.4.1, del tubo T2. Las alumnas señalaron que también era posible realizar mediciones de las bases y las alturas de los triángulos ABC y AB'C', ver la Figura 5.4.1, de esta nueva plantilla, con esto se dio paso al llenado de la tabla con los tubos T1 y T2.

En la Figura 5.4.2, se presenta un ejemplo de las tablas de dos equipos de alumnas en donde se puede apreciar los datos obtenidos de las mediciones de los triángulos ABC y AB'C', ver las Figuras 5.2.2 y 5.4.1, en los tubos T1 y T2. También, se puede observar que las mediciones de la primera tabla con la segunda son valores aproximados.

	AB	AC	AB'	AC'	$\frac{AB}{AB'}$	$\frac{BC}{AB'}$	$\frac{AC}{AC'}$	$\frac{BC}{B'C'}$	$\frac{B'C'}{BB'}$
T1 3c	4	4.4	2	2.6	2	0.9	1.6	1	0.8
T2 4c	3	3.8	1.6	2	2	1.8	1.6	1.5	0.8

	AB	AC	AB'	AC'	$\frac{AB}{AB'}$	$\frac{BC}{AB'}$	$\frac{AC}{AC'}$	$\frac{BC}{B'C'}$	$\frac{B'C'}{BB'}$
T1	4.0	4.4	2	2.6	$\frac{4.0}{2}=2.6$	$\frac{1.2}{2}=0.9$	$\frac{4.4}{2.6}=1.6$	$\frac{1.2}{1.6}=1.0$	0.8
T2	3.0	3.8	1.6	2	2	1.2	1.6	1.5	0.8

Figura 5.4.2 Tablas de los tubos T1 y T2 de dos equipos de estudiantes.

Por otra parte, también se llevó a cabo la construcción del tubo T3, ver la Figura 5.4.3, que se realizó en 30 minutos, este proceso fue más lento que en los tubos T1 y T2 debido a que éste era con 6 secciones. Sin embargo, las alumnas estaban más familiarizadas con el proceso de construcción pues ya conocían los pasos para llevar a cabo la realización de la plantilla. Algunas alumnas empezaban a observar ciertas regularidades entre los tubos y en los resultados de las mediciones de los triángulos de cada tubo.

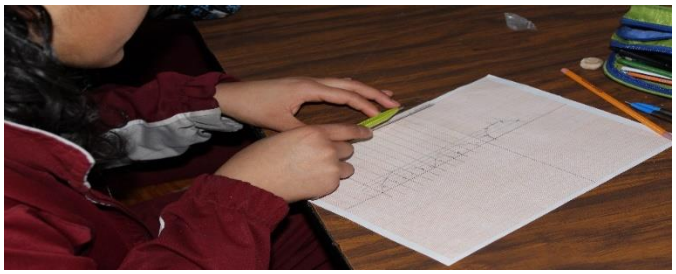


Figura 5.4.3 Construcción de la plantilla del tubo T3.

Finalmente, las alumnas obtuvieron la plantilla del corte “boca de pescado” y el tubo T3, ver la Figura 5.4.4.

(a) (b)

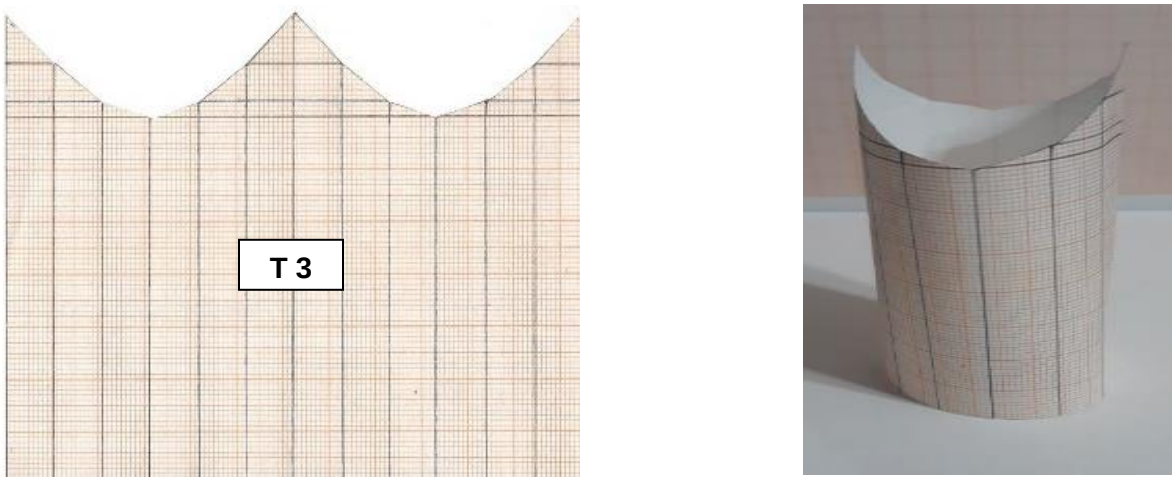


Figura 5.4.4 Plantilla del corte “boca de pescado” y tubo T3.

Una de las dificultades que se observó en esta sesión fue la pérdida de control de grupo, debido a un error al analizar los triángulos del tubo T3, esto por el acomodo de los mismos en el pizarrón. Por esta razón se terminó la sesión poco antes de tiempo.

Al iniciar esta etapa se llevó a cabo la discusión del tubo T2 construido en la etapa 3 donde las alumnas observaron qué sucedía con la curvatura del tubo, y se observó la estrategia variacional *comparación* puesto que las alumnas al haber analizado el tubo T1 y T2 se percataron de varias situaciones, comentaron que en el tubo T2 todavía quedaba espacio a comparación del tubo T1, también que se utilizaría menos soldadura en este tubo que en el anterior debido a que se estaba haciendo más suave el corte y, además que la curva era consecuencia de las secciones.

Cuando se finalizó la construcción del tubo T3, ver la Figura 5.4.5, se observó la estrategia variacional *estimación* puesto que las alumnas ya tenían la idea de que pasaría con el tubo T4 antes de darles las plantillas, estimaron que la curva se haría más marcada debido a la cantidad de cortes porque se doblaron las partes de 6 cortes a 12, además estimaron que quedaría menos espacio que en el tubo T3.

Figura 5.4.5 Construcción de la plantilla del tubo T3.

En esta etapa las alumnas concluyeron que el corte del tubo T2 se va haciendo más suave debido a las partes que tiene el tubo.

También, las estudiantes visualizaron más rápido los triángulos del tubo T2, ver Figura 5.4.1, y de éstos sabían que se podrían obtener medidas como la base y la altura de cada uno.

En esta etapa se observaron indicios de las estrategias variacionales *comparación* y *estimación*.

5.5 Resultados de la etapa 5: análisis de los tubos T3 y T4, toma de medidas, reflexión de la pregunta escrita, enunciación del teorema y solución del problema.

Esencialmente en esta etapa se llevó a cabo el análisis de las regularidades de los cuatro tubos.

En esta sesión, se retomaron los datos obtenidos del tubo T1 y T2 a partir de la medición de las aristas de los triángulos que aparecen entre las plantillas y los planos de trabajo de ambos tubos y se prosiguió a analizar el tubo T3. En el tubo T3 las alumnas comentaron que todavía había espacio entre éste y el tubo receptor pues no tenía una curva suave, pero notaron que se utilizaría menos soldadura y habría menos probabilidad de fractura, también, observaron que para hacerlo curvo se requería de más divisiones en la plantilla, después, observaron que los triángulos de este tubo cambiaron de forma y que eran semejantes.

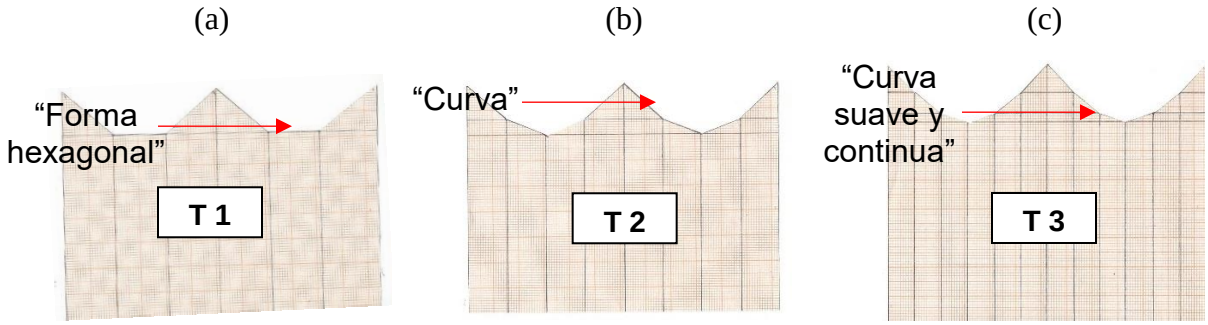


Figura 5.5.1 Plantillas de los tubos T1, T2 y T3.

Retomando las observaciones que realizaron algunas alumnas respecto a los tres tubos T1, T2 y T3, observaron que en la plantilla del tubo T1 los cortes forman una figura hexagonal puesto que son sólo 3 secciones, ver la Figura 5.5.1(a), en cambio, en la plantilla del tubo T2 los cortes hacen que el tubo forme una curva suave, debido a que aumenta a 4 secciones, ver la Figura 5.5.1(b), por otro lado, en la plantilla del tubo T3 debido a que tiene 6 secciones, el corte del tubo tiende a hacerse más suave que el tubo T2, la curva es más suave pues se va haciendo una curva continua, ver la Figura 5.5.1(c).

En el tubo T3 las alumnas comentaron que se hacía más visible una curva suave que se va haciendo continua.

En la primera parte de la sesión, se llevó a cabo el análisis del tubo T3, en este tubo las alumnas percibieron la necesidad de realizar más particiones, puesto que el tubo tendrá una curva más suave, ver Diálogo 4.

A continuación, se presentan los diálogos que estableció el profesor-investigador con algunas de las alumnas que participaron en la discusión:

Diálogo 4

Profesor-investigador: ¿Qué observan al ensamblar los tubos (tubo T3 y tubo receptor)?

Alumnas: Todavía hay un espacio, aún no está bien curveado, todavía quedan huecos (ver la Figura 5.5.2), …

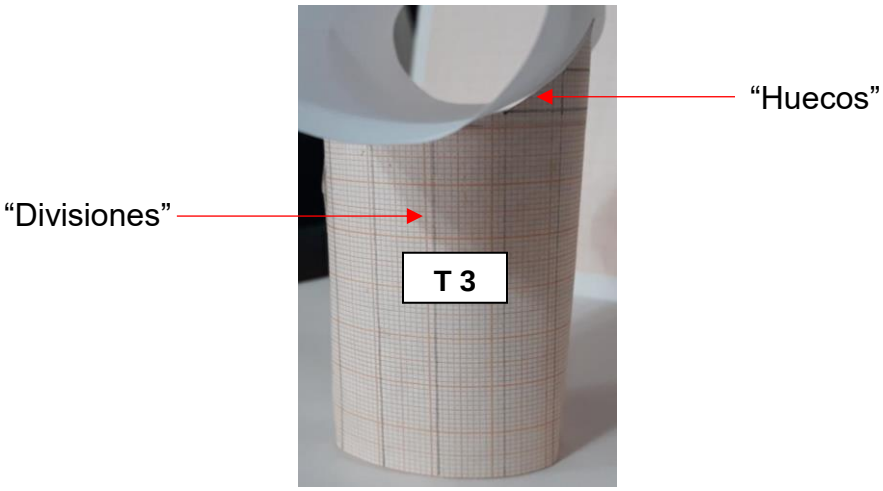


Figura 5.5.2 Tubo en forma "T".

Profesor-investigador: ¿Cómo son esos huecos en comparación con el tubo T1?, ¿Qué es lo que va ocurriendo conforme se hacen más divisiones?, ¿Creen que cada vez más se va ajustando mejor al otro tubo?,¿Qué quiere decir en relación con la soldadura?

Alumnas: Va a ser menor la soldadura y habrá menos fractura

Profesor-investigador: ¿Qué hay de diferencia?

Alumnas: Aún quedan algunos espacios, todavía le falta, que la curva se va haciendo más grande y va embonando mejor, …

Profesor-investigador: ¿Qué debemos hacer para que sea más preciso?

Alumnas: Hacerlo más curvo (es decir, una curva suave)

Profesor-investigador: ¿Y cómo?

Alumnas: Haciendo más divisiones (ver la Figura 5.5.2)

Diálogo 4. Transcripción del video tomado durante la sesión. Análisis del tubo T3.

Las alumnas llegaron más rápido a la visualización de los triángulos que se formaban entre la plantilla y el plano de trabajo en el tubo T3, y observaron que iban cambiando de forma, también, identificaron que se trataban de triángulos rectángulos, y algunas de las alumnas concluyeron que se trataba de triángulos semejantes, ver Diálogo 5.

Diálogo 5

Profesor-investigador: Al colocar su plantilla al plano de trabajo, ¿Qué observan?

Alumnas: Triángulos

Profesor-investigador: ¿Dónde están los triángulos?

Alumnas: En las orillas (ver la Figura 5.5.3)

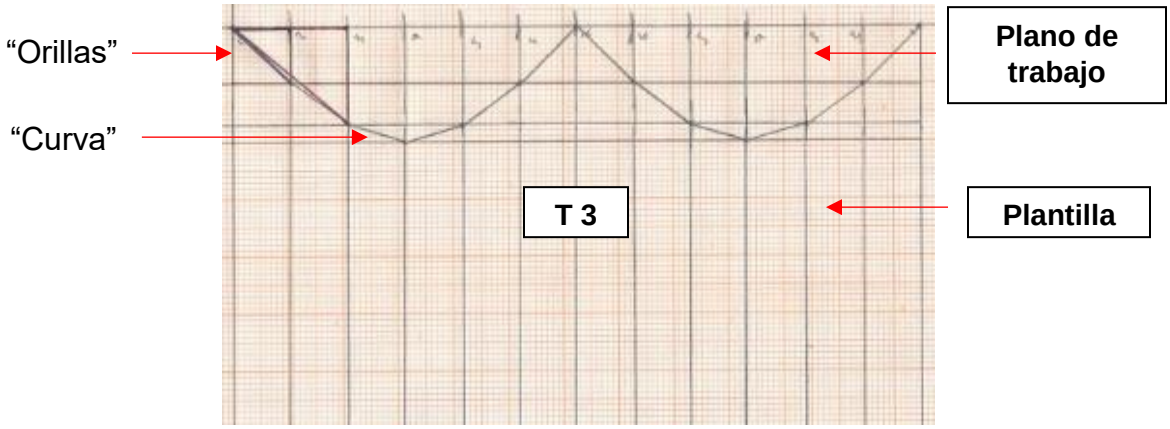


Figura 5.5.3 Plantilla del tubo T3 y plano de trabajo.

Profesor-investigador: ¿Son los mismos triángulos que en los tubos anteriores?

Alumnas: Cambió en la forma

Profesor-investigador: ¿Qué es lo que va ocurriendo con estos triángulos?

Alumnas: Son más alargados, se van pareciendo más, …

Profesor-investigador: ¿Cómo se llama a este tipo de triángulos?

Alumnas: Triángulos rectángulos

Profesor-investigador: Si lo son, pero al parecer uno está dentro del otro

Alumnas: Son triángulos semejantes, proporcionales, congruentes, ...

Profesor-investigador: ¿Son congruentes?

Alumnas: no, porque los congruentes deben tener la misma medida en los ángulos y los lados

Profesor-investigador: ¿Qué está pasando con la curva de nuestra plantilla?

Alumnas: Se está haciendo más curveado y ensambla mejor (ver la Figura 5.5.3)

Diálogo 5. Transcripción del video tomado durante la sesión. Identificación y análisis de triángulos.

Después de que las alumnas llegaron a la visualización de los dos triángulos en el tubo T3, se llevó a cabo el llenado de la tabla con las medidas de las aristas de los triángulos.

Posteriormente, se inicia la segunda parte de la sesión, en donde a las alumnas se les proporcionó la plantilla del tubo T4 con 12 secciones sólo para recortar, debido a que no es necesario llevar a cabo el proceso de construcción de esta plantilla, puesto que las alumnas ya conocían la técnica.

Al terminar de embonar el tubo T4 con el tubo receptor para formar el tubo "T", se llevó a cabo el análisis del tubo, en donde algunas alumnas concluyeron que para que ambos tubos embonaran mejor se requería de hacer más secciones en la plantilla del tubo T4 y también que, al hacer más divisiones en la plantilla, se haría la "curva" del tubo más "suave", ver Diálogo 6.

A continuación, se presenta el diálogo que estableció el profesor-investigador con algunas de las alumnas que participaron en la discusión:

Diálogo 6

Profesor-investigador: ¿Qué pasa al ensamblar los tubos (tubo T4 con el tubo receptor)?

Alumnas: Ensambla mejor

Profesor-investigador: ¿Por qué ensambla mejor?

Alumnas: Porque tiene más cortes, necesita más divisiones para que sea más suave, …

Diálogo 6. Transcripción del video tomado durante la sesión. Relación de los cortes con la curva.

Al finalizar la discusión del tubo T4, se llevó a cabo la visualización de los dos triángulos en la plantilla del corte, en este tubo las alumnas los identificaron enseguida, luego se prosiguió a medir las aristas y registrar dichos datos en la tabla, ver la Figura 5.5.4.

Figura 5.5.4 Estudiante midiendo una arista de uno de los triángulos en la plantilla del tubo T4.

Después de que las alumnas obtuvieron las medidas de las aristas de los triángulos en el tubo T4, se verificaron todos los datos de los cuatro tubos en el pizarrón, ver la Figura 5.5.5, las alumnas no llenaron los espacios correspondientes a los tubos T5 y T6 (ver renglón pT5 y pT6 en tabla de la Figura 5.5.6), los cuales no se construyeron y sólo se pusieron en la tabla para su llenado mediante la predicción.

Figura 5.5.5 Verificación de los datos obtenidos de los triángulos de los cuatro tubos en el pizarrón.

Luego de verificar las medidas de las aristas de los triángulos en los cuatro tubos, las alumnas predijeron, con base en las regularidades observados en el resto de los datos, como serían las medidas de las aristas de los tubos T5 con 24 secciones y T6 con 36. En la Figura 5.5.6 se presenta un ejemplo de una tabla que llenaron dos de alumnas.

	AB	AC	AB'	AC'	$\frac{AB}{AB'}$	$\frac{BC}{AB'}$	$\frac{AC}{AC'}$	$\frac{BC}{B'C'}$	$\frac{B'C'}{BB'}$
T1	4.0	4.9	2.6	2.6	$\frac{4}{2}=2$	$\frac{1.6}{2.0}=0.9$	$\frac{4.9}{2.6}=1.6$	$\frac{1.6}{1.6}=1$	0.8
T2	3	3.8	1.6	2	2	1.2	1.6	1.5	0.8
T3	2	2.7	1	1.9	2	1.7	1.9	1.7	1
T4	1	1.3	0.5	0.6	2	1.8	1.8	1.8	2
pT5	0.5	0.6	0.2	0.3	1	0.9	0.9	0.9	1
pT6	0.25	0.3	0.1	0.25	0.50	0.45	0.45	0.45	0.5

Figura 5.5.6 Tabla de un equipo de alumnas con los datos completos.

A continuación, se presenta el diálogo que estableció el profesor-investigador con algunas de las alumnas que participaron en la discusión:

Diálogo 7

Profesor-investigador: ¿Qué pasaría con un tubo T5 o T6?

Alumna: Las medidas (de las aristas de los triángulos) ya no cambian porque los triángulos ya son semejantes, entonces, aunque se hagan más cortes, los triángulos van a seguir siendo del mismo tamaño, es decir, ya no puede ser más pequeño uno que otro

Profesor-investigador: ¿Qué opinan de ello?

Alumnas: La curva en el corte del tubo sería más exacta, ya no va a necesitar tanta soldadura, ya no quedan espacios, va a ser más preciso, no se va a romper el tubo "T", …

Diálogo 7. Transcripción del video tomado durante la sesión. Hallazgo de las alumnas.

De ahí concluyeron que las medidas de las aristas en los triángulos ya no cambian porque ya son triángulos semejantes, entonces, aunque se hagan más cortes o divisiones en la plantilla, los triángulos van a seguir siendo del mismo tamaño, es decir, ya no puede ser más pequeño uno que otro (el triángulo mayor no puede hacerse pequeño y viceversa), además, que la curva en el corte del tubo será más exacta (es decir será una curva continua más suave). Por lo cual, en el contexto de la aplicación o utilidad a un nivel social (industrial), las alumnas aseveraron que con un tubo de estas características no se va a tener un exceso de soldadura, sino más bien, el mínimo de soldadura por lo que no habrá probabilidad de fractura.

Al finalizar la verificación de los datos obtenidos en la tabla y la predicción de los tubos T5 y T6, se dio paso a la explicación de los triángulos de los cuatro tubos en las diapositivas presentadas en la presentación en PowerPoint, con esto las alumnas observaron como el triángulo pequeño se fue metiendo en el triángulo mayor hasta llegar a formar triángulos semejantes.

Las alumnas relacionaron la precisión con la división de cortes en la plantilla del tubo T4 y entonces se les dijo que la precisión estaba relacionada con que tanto el tubo T4 se ajusta al tubo receptor, ver la Figura 5.5.7., es decir, entre más cortes se hagan, por ejemplo, en la plantilla del tubo T4, se hará más precisa la curva del corte del tubo.

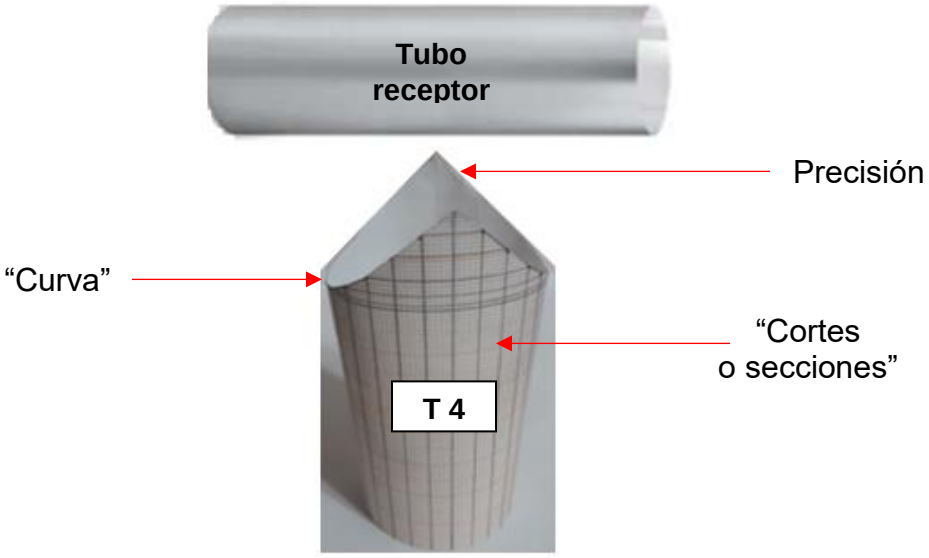


Figura 5.5.7 Tubo en forma "T".

A continuación, se presenta el diálogo que estableció el profesor-investigador con algunas de las alumnas que participaron en la discusión:

Diálogo 8

Profesor-investigador: ¿Qué se tiene que hacer para lograr una precisión alta?

Alumnas: Dividirla en más partes, con la curva se empareja más, …

Diálogo 8. Transcripción del video tomado durante la sesión. Relación de precisión.

Las alumnas se mostraron atentas durante esta sesión, puesto que cada vez que se les explicaba pausaban la actividad para prestar atención al profesor-investigador, también, realizaban comentarios entre cada pareja acerca de lo que observaban. El ambiente de trabajo fue favorable debido a que las alumnas sabían que iba a ser la última sesión, además, al momento de que se les explicaba lo que sucedía en cada par de triángulos en las plantillas de

los 4 tubos estuvieron más atentas y mostraron más interés, conforme se les iba explicando las alumnas iban ubicando cada plano de trabajo con su respectiva plantilla. En particular en la explicación del tubo T4, la mayoría de las alumnas acordaron que este tubo ensamblaba mejor que los tubos anteriores, debido a que tenía más divisiones.

Las estudiantes finalmente, llegaron al valor esperado de la aproximación de los cocientes señalado por el teorema de Thales y solamente dos alumnas, cada una perteneciente a distintos equipos, respondieron que 2 de esos cocientes no se aproximan a ningún valor debido a que una medida de un lado del triángulo es parte de la base de otro.

A continuación, se presenta el diálogo que estableció el profesor-investigador con estas alumnas:

Diálogo 9

Profesor-investigador: ¿A qué valor se aproximan los cocientes (de la tabla)?

Alumna 1: a 2

Profesor-investigador: ¿Por qué $\frac{BC}{AB'}$ y $\frac{B'C'}{BB'}$ no se aproximan a ningún valor?, ¿A qué se debe?

Alumna 2: Porque tienen diferentes tamaños (las aristas de los triángulos), porque una medida de un lado del triángulo es parte de la base de otro

Diálogo 9. Transcripción del video tomado durante la sesión. Conclusiones de dos estudiantes.

Estas mismas alumnas obtuvieron las conclusiones correctas, como se muestra en el Diálogo 9. El aplicador cierra la sesión con el comentario de que los cocientes y el valor que obtuvieron expresan el teorema de Thales.

El diálogo profesor-grupo llevó a la mayoría de las alumnas a observar el teorema de Thales. Si bien fueron 2 alumnas de equipos distintos las que llegaron al resultado esperado, se observó que la mayoría de las estudiantes llegaron a estar de acuerdo con las observaciones de estas dos alumnas, inclusive llevaron a sus demás compañeras a aseverar la existencia del teorema de Thales.

En general, fue una sesión interesante debido a que la mayoría de las alumnas contestaron las preguntas correctamente, comentaron, opinaron, y llegaron a la respuesta que esperaba, esto con apoyo de las diapositivas presentadas en PowerPoint, donde se les mostró qué sucede con los triángulos en cada tubo, ver la Figura 5.5.8, también se les explicó la relación entre los triángulos de cada tubo, el borde y la precisión utilizando la pregunta escrita que se les proporcionó.

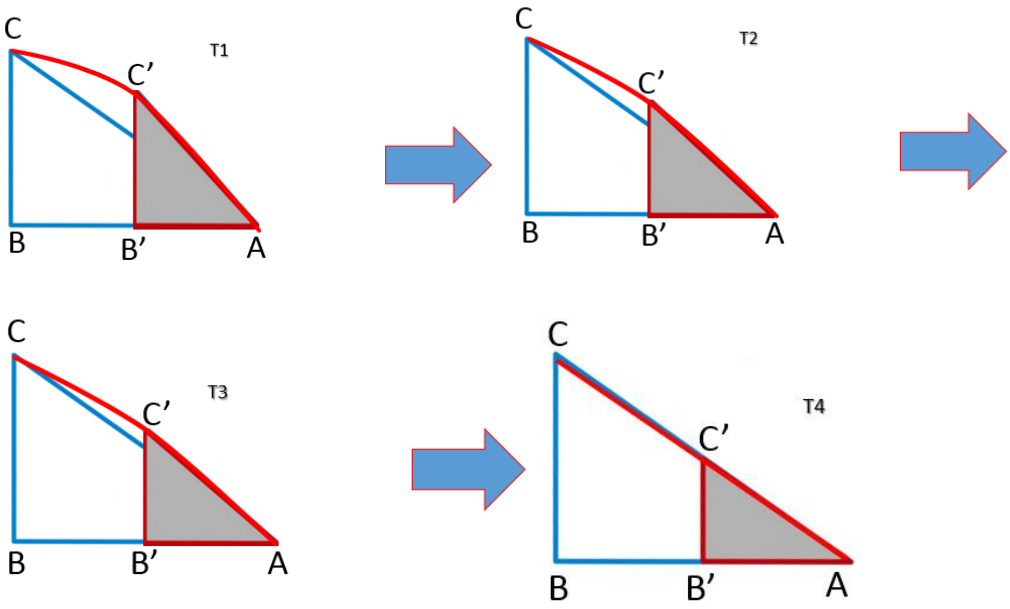


Figura 5.5.8 Triángulos formados entre las plantillas y los planos de trabajo de los cuatro tubos.

En esta última etapa se encontraron las estrategias variacionales *predicción y seriación*, puesto que las alumnas llegaron al valor que se aproxima el cociente, en este caso, a 2, cuyo valor es la precisión de la curvatura debido a que los triángulos llegan a ser proporcionales, además, se percataron que, aunque se hagan más cortes, los triángulos ya no pueden ser uno más pequeño que otro, es decir, que seguirán siendo del mismo tamaño. Otro comentario que realizaron las alumnas fue que la curva del corte se haría más exacta y que por eso no se requeriría de tanta soldadura como en el tubo T1, ver la Figura 5.5.9.

Figura 5.5.9 Comentarios y conclusiones de las alumnas.

En el tubo T3 las estudiantes observaron varias cosas:

1. Qué todavía quedaba espacio al ensamblar los tubos pues no tenía una curva suave
2. Qué se utilizaría menos soldadura que en los dos anteriores
3. Qué habría menos fractura
4. Qué para hacerlo más curvado se requería de más divisiones

5. Qué los triángulos cambiaron de forma
6. Qué los triángulos podrían ser semejantes o congruentes

Al finalizar el análisis del tubo T4 llegaron a la conclusión de que los tubos embonan mejor si se hacen más divisiones.

Luego, predijeron como sería T5 y T6, concluyendo que las medidas de los triángulos ya no cambian porque ya son semejantes. Además, que a pesar de que se realicen más cortes los triángulos van a seguir siendo del mismo tamaño. Así mismo, la curva será más exacta y no se requerirá de mucha cantidad de soldadura y por consecuencia, no habrá posibilidad de fractura.

Las alumnas relacionaron la precisión con la división de cortes. Solo dos alumnas obtuvieron las conclusiones correctas, debido a que respondieron que 2 de esos cocientes no se aproximan a ningún valor porque una medida de un lado del triángulo es parte de la base de otro, esto con apoyo de las diapositivas, al ver que sucedía con los triángulos de los 4 tubos.

En esta etapa se observó indicios de las estrategias variacionales *predicción* y *seriación.*

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

Introducción

En este capítulo se presenta el análisis y la discusión de los resultados obtenidos mediante de la situación variacional que, revela la manera en que las alumnas resignificaron el teorema de Thales a través de la unidad de análisis, la cual consiste de una organización específica de estrategias variacionales, relacionada con la construcción de tubos de conducción en forma de "T", la cual tuvo como marco teórico la teoría de la Socioepistemología.

El análisis se enfoca en la identificación de la realización de las estrategias variacionales (éstas discutidas en la sección 3.4) llevada a cabo por las estudiantes y la manera en cómo éstas organizan dichas estrategias con el propósito de resolver el problema planteado. El análisis y la discusión se presentan por etapas a partir de los resultados obtenidos, ver capítulo 5.

Con esta investigación se pretende observar cómo las estudiantes llevan a cabo la comprensión del teorema de Thales en un caso específico, es decir, en la construcción de un tubo "T".

6.1 Análisis y discusión de los resultados de la etapa 1.

Esta etapa se dividió en dos partes, la primera fue la resolución del examen diagnóstico y la segunda fue la presentación en PowerPoint que se llevó a cabo para poner en contexto a las estudiantes.

Como se observó en el capítulo anterior, en particular dos de los ejercicios que aparecían en el examen diagnóstico, las alumnas que los contestaron, realizaron los procedimientos aplicando el teorema de Pitágoras. A pesar de que la profesora comentó antes de iniciar la actividad que las alumnas acababan de abordar el teorema de Thales, las alumnas tenían más presente el teorema de Pitágoras. Estas estudiantes tienen una noción acerca de éste, más no tienen claro que solo aplica a triángulos rectángulos. Estas alumnas sabían correctamente algunas de las fórmulas de dicho teorema y los elementos que involucra, como son los dos catetos y una hipotenusa. A pesar de ello, las fórmulas son aplicadas incorrectamente en estos ejercicios, puesto que el triángulo del ejercicio III, ver la Figura 5.1.1, no es rectángulo. Por otro lado, en el triángulo del ejercicio V, ver la Figura 5.1.2, las alumnas observaron que, al tratarse de un triángulo rectángulo, intuyeron que lo podían resolver aplicando el teorema de Pitágoras, por lo que no llegaron a la respuesta correcta.

Como se mencionó en el capítulo anterior, el teorema de Thales no aparece como conocimiento previo de las alumnas. En las clases previas, las alumnas no lograron un aprendizaje adecuado del teorema de Thales, también, tuvieron confusión entre usar el teorema de Pitágoras o el teorema de Thales en los dos ejercicios del examen diagnóstico. Los resultados obtenidos muestran que hubo una enseñanza tradicional centrada en el objeto matemático, es decir, una enseñanza basada en la fórmula, por lo que para las estudiantes el teorema de Thales no tiene sentido. Esto deja ver una problemática, es decir, restar

importancia a la enseñanza del teorema de Thales y privilegiar al teorema de Pitágoras sobre éste.

Respecto a la presentación que se llevó a cabo en PowerPoint, al mencionarles a las alumnas el problema a abordar sobre el robo de combustible, estaban más relacionadas con el tipo de noticia, puesto que comentaban entre ellas noticias similares. La mayoría de las alumnas no sabían que era la Pailería ni donde se podían encontrar estructuras de este oficio por lo que prestaron atención al profesor-investigador.

6.2 Análisis y discusión de los resultados de la etapa 2.

En esta etapa, como se observó en el capítulo anterior, mediante la discusión que se llevó a cabo entre la profesor-investigador y las alumnas respecto al tubo "T" formado por el tubo T1 y el tubo receptor, ver la Figura 5.2.1, las alumnas observaron que había una abertura en el tubo, y acordaron en que hacía falta más picos, ver la Figura 5.2.1, para que embonara bien el tubo "T", además, comentaron que con esto se haría más suave el corte del tubo T1, ver la Figura 5.2.2.

También, se llevó a cabo el análisis del tubo T1 con la plantilla y el plano de trabajo, donde se guió a las alumnas por medio de preguntas abiertas para que llegaran a la visualización de los dos triángulos rectángulos, ver la Figura 5.2.2, que se formaban y así nombrarlos.

Retomo el término visualización, destacada en el marco teórico, es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y lenguaje del que aprende. De modo que al realizar la actividad de visualización se requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a los ámbitos numéricos, gráficos, algebraicos o verbales. La visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación (Cantoral y Montiel, 2003).

De acuerdo a la teoría socioepistemológica, las alumnas si llevaron a cabo la visualización pero no de los objetos que la situación pretendía que las estudiantes observaran, es decir, no visualizaron los dos triángulos desde el principio solamente el triángulo pequeño, sin embargo, al final de la sesión fue necesaria la intervención del docente para que las alumnas llegaran de manera adecuada la visualización del triángulo grande, ver la Figura 5.2.2.

Las estudiantes habían reflexionado acerca del corte del tubo T1 y, cómo se mencionó en el capítulo anterior, decían que debía haber una curva, ver la Figura 5.2.2, para que se redujera la probabilidad de fractura en el tubo y se utilizara menos soldadura.

Puesto que algunas alumnas llevaban sus propios instrumentos de trabajo, tuvieron más facilidad para construir el tubo, sin embargo, no lograron la precisión esperada, pero obtuvieron mejores resultados que las que lo realizaron con material proporcionado. Algunas tuvieron dificultades al utilizar el compás puesto que no tenían mucha práctica.

Durante la sesión, dos estudiantes no sabían cómo dividir un semicírculo en partes iguales por lo que se les tuvo que explicar.

Los comentarios que realizaban las alumnas que participaban durante la sesión incitó a que algunas se motivaran para expresar sus ideas o comentarios.

6.3 Análisis y discusión de los resultados de la etapa 3.

En esta etapa sólo se llevó a cabo la construcción del tubo T2. La mayoría de las alumnas no tuvieron dificultades en realizar la plantilla puesto que ya se habían familiarizado con la técnica de construcción de tubos.

Cabe destacar que una dificultad que se observó durante la construcción de la plantilla del tubo T3, fue que una pareja de alumnas no entendió el procedimiento de la construcción del tubo puesto que en la sesión anterior también les resultó difícil.

6.4 Análisis y discusión de los resultados de la etapa 4.

Al iniciar esta etapa se llevó a cabo la discusión del tubo T2 abordado en la etapa anterior donde las alumnas observaron qué sucedía con el borde del tubo, y se observó indicios de que las estudiantes llevaron a cabo la estrategia variacional *comparación* puesto que las alumnas al haber analizado los tubos anteriores se percataron de ciertas regularidades en el registro de los datos que se encontraban en la tabla, ver la Figura 5.4.2, comentaron que en el tubo T2 todavía quedaba espacio en comparación con el tubo T1, ver las Figuras 5.2.1 y 5.3, también que se utilizaría menos soldadura en este tubo que en el anterior debido a que se estaba haciendo más suave el corte y, además que la curva era consecuencia de la existencia de más cortes.

Una de las conclusiones que obtuvieron la gran mayoría de las alumnas fue que el corte de la plantilla del tubo T2 se iba haciendo más suave debido a las secciones que tiene el tubo.

Las alumnas visualizaron más rápido los dos triángulos en el tubo T2, debido a que en el tubo anterior ya habían ubicado los otros dos triángulos, ver la Figura 5.4.1, y comentaron que estaban "metiéndose" (las alumnas se referían a que el triángulo pequeño azul se va metiendo en el triángulo grande rojo). De este par de triángulos las alumnas también comentaron que se podían obtener medidas de las aristas.

Se dio paso al llenado de la tabla con los tubos T1 y T2, como se observó en la Figura 5.4.2, los valores de las dos tablas de dos equipos de alumnas varían debido a la obtención de las medidas de los triángulos, sin embargo, esto no fue impedimento para que las alumnas estimaran.

Por otra parte, se llevó a cabo la construcción del tubo T3, por lo que las alumnas comenzaron a observar ciertas regularidades entre los tubos y en los resultados de las mediciones de los triángulos de cada tubo.

Cuando se finalizó la construcción del tubo T3, al embonarlo con el tubo receptor para formar el tubo "T", las alumnas se percataron de lo que iba sucediendo con los espacios y con el borde del corte.

Se observó indicios de la estrategia variacional *estimación* puesto que las alumnas ya tenían la idea de que pasaría con el tubo T4 antes de darles las plantillas, ver la Figura 6.5.2,

estimaron que la curva se haría más suave debido a la cantidad de secciones porque se doblaron las partes de 6 a 12, además estimaron que quedaría menos espacio que en el tubo T3.

6.5 Análisis y discusión de los resultados de la etapa 5.

En esta última etapa, las alumnas retomaron las experiencias con los tubos T1, T2 y T3 para poder explicar lo observado en el tubo T4, observaron que en la plantilla del tubo T1 los cortes formaban una figura hexagonal puesto que eran sólo 3 secciones, en cambio, en la plantilla del tubo T2 los cortes hacían que el tubo formara un borde, debido a que aumentaba a 4 secciones, por otro lado, en la plantilla del tubo T3 debido a que tenía 6 secciones, el corte de éste tendía a hacerse más suave que el tubo T2, pues va de un contorno poligonal a un contorno más suave cada vez, ver la Figura 6.5.1.

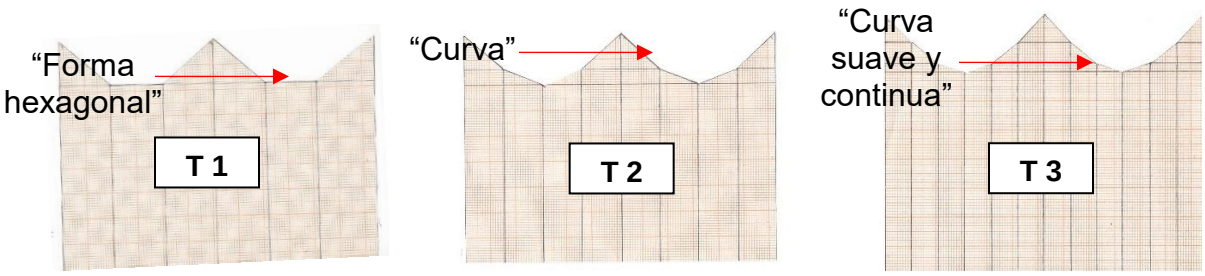


Figura 6.5.1 Plantillas de los tubos T1, T2 y T3.

En esta etapa, al realizar la actividad del tubo T3, las alumnas comentaron que todavía había huecos entre éste y el tubo receptor al momento de embonar uno con otro (para formar el tubo “T”), ver la Figura 6.5.2, pues no tenía una curva suave (ver la definición de este término en el capítulo 4, sección 4.3.5), observaron que se utilizaría menos soldadura y habría menos probabilidad de fractura, también, observaron que para hacerlo con curva suave se requería de más divisiones en la plantilla del tubo T3, ver la Figura 6.5.2, después, observaron que los triángulos de este tubo cambiaron de forma y que eran semejantes.

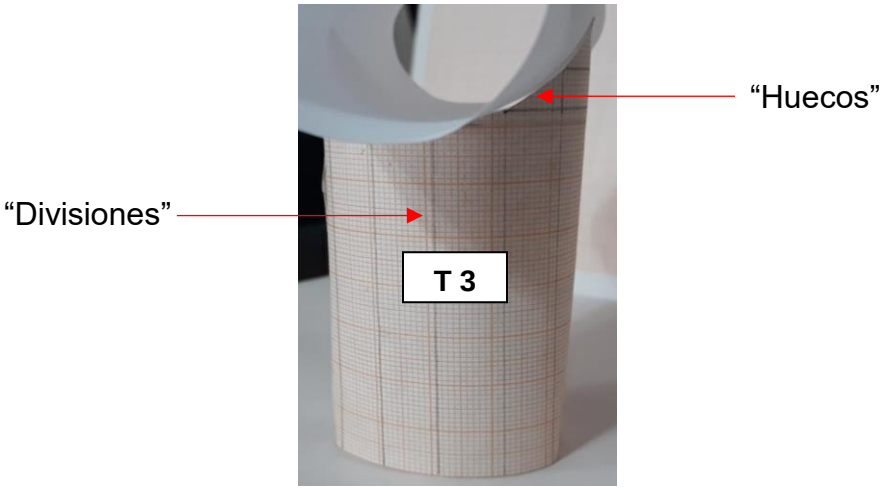


Figura 6.5.2 Tubo en forma “T”.

Las alumnas llegaron más rápido a la visualización de los triángulos que se formaban entre la plantilla y el plano de trabajo en el tubo T3, los visualizaron y compararon con los triángulos de los tubos anteriores, también, identificaron que se trataban de triángulos rectángulos, ver la Figura 6.5.3, y algunas de las alumnas concluyeron que se trataba de triángulos semejantes.

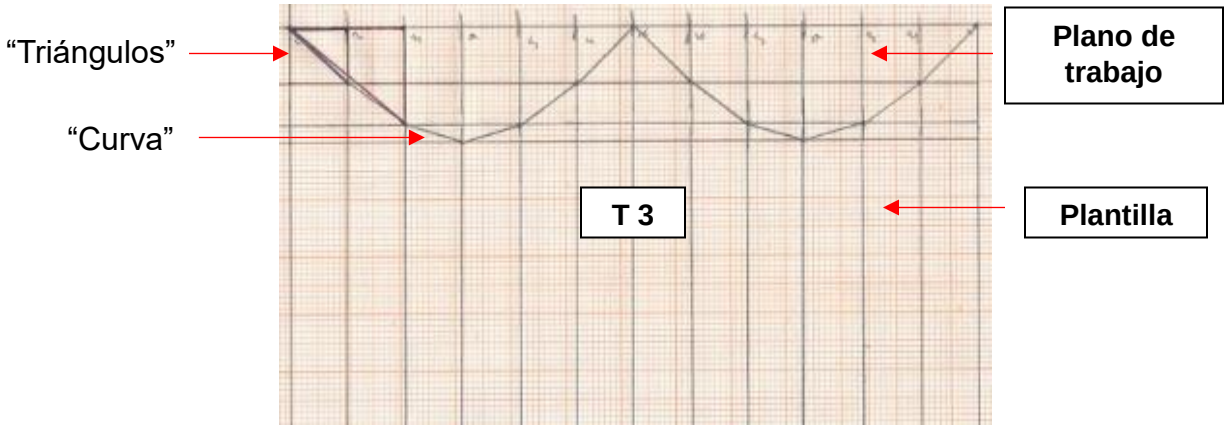


Figura 6.5.3 Plantilla del tubo T3 y plano de trabajo.

Los tubos T5 y T6 no se construyeron puesto que se utilizaron para que las alumnas realizaran sus predicciones en la tabla.

Al terminar de embonar el tubo T4 con el tubo receptor para formar el tubo "T", ver la Figura 6.5.4, se llevó a cabo el análisis del tubo, en donde algunas alumnas concluyeron que para que ambos tubos embonaran mejor se requería de hacer más cortes en la plantilla del tubo T4 y también que, al hacer más divisiones en la plantilla, se haría la "curva" del tubo más "suave", es decir, se haría una curva continua y no poligonal.

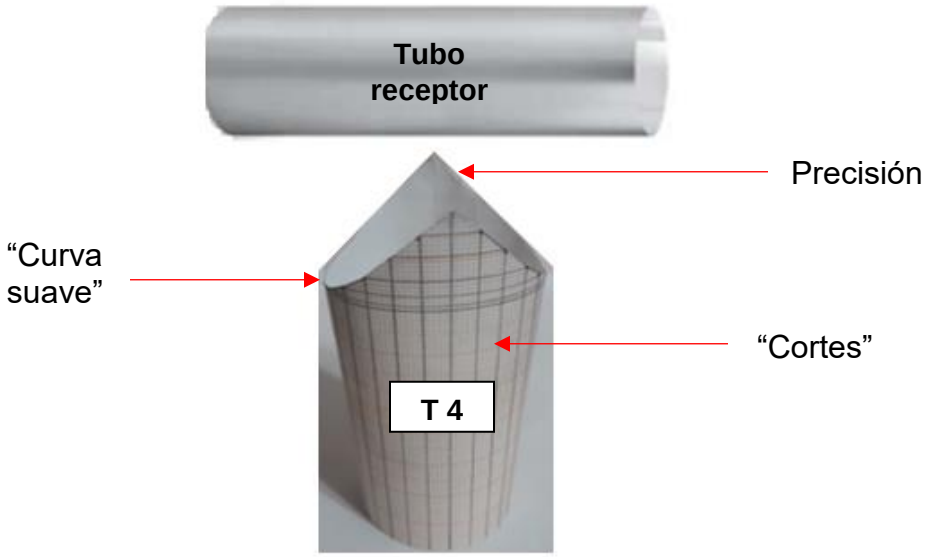


Figura 6.5.4 Tubo en forma "T".

Luego de verificar las medidas de las aristas de los triángulos en los cuatro tubos, las alumnas predijeron, con base en las regularidades observadas en el resto de los datos, como serían las medidas de las aristas de los tubos T5 con 24 partes y T6 con 36 partes.

Las alumnas concluyeron que las medidas de las aristas en los triángulos del tubo T4 ya no cambiaban porque ya eran triángulos semejantes, ver la Figura 6.5.5, entonces, aunque se hagan más cortes o divisiones en la plantilla, los triángulos van a seguir siendo del mismo tamaño, es decir, ya no puede ser más pequeño uno que otro (el triángulo mayor no puede hacerse pequeño y viceversa), además, que la curva en el corte del tubo será más exacta (es decir será una curva continua más suave).

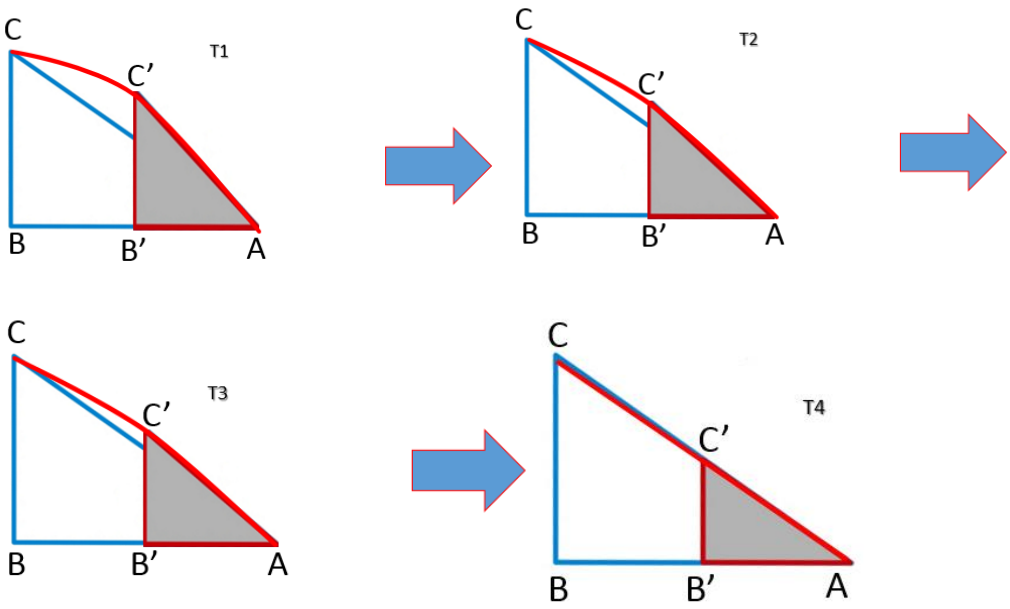


Figura 6.5.5 Triángulos formados entre las plantillas y los planos de trabajo de los cuatro tubos.

También, las alumnas aseveraron que ya no quedan espacios al embonar el tubo blanco y el tubo T4, ver la Figura 6.5.4, no se va a tener un exceso de soldadura y que habrá menos probabilidad de fractura en el tubo "T".

Con las diapositivas presentadas en la presentación en PowerPoint acerca del cambio entre los triángulos en los cuatro tubos, ver la Figura 6.5.5, las alumnas observaron como el triángulo pequeño se fue "metiendo" en el triángulo mayor hasta llegar a formar triángulos semejantes.

No se llevó a cabo la construcción del tubo T4 puesto que las alumnas ya conocían la técnica. En este tubo las alumnas visualizaron más rápido los triángulos en la plantilla y el plano de trabajo del tubo T4.

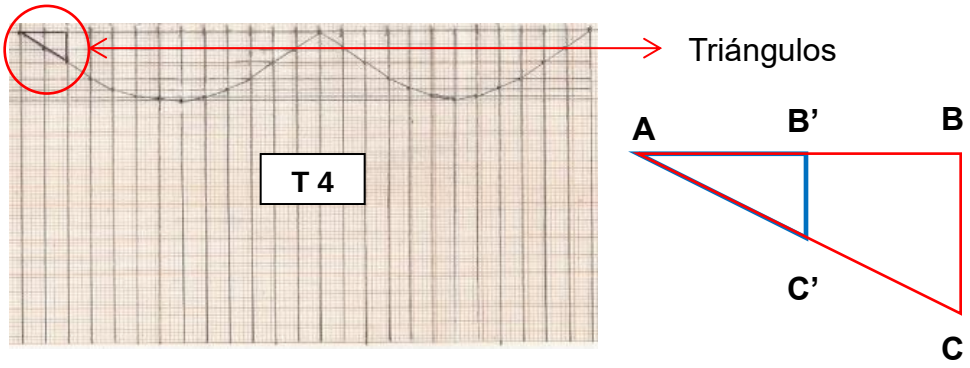
Las alumnas relacionaron la precisión con la división de cortes en la plantilla del tubo T4, ver la Figura 6.5.4.

Las estudiantes finalmente, llegaron al valor esperado de la aproximación de los cocientes señalado por el teorema de Thales y solamente dos alumnas, cada una perteneciente a distintos equipos, respondieron que 2 de esos cocientes no se aproximan a ningún valor debido a que una medida de un lado del triángulo es parte de la base de otro.

El diálogo profesor-grupo llevó a la mayoría de las alumnas a observar el teorema de Thales. Si bien fueron 2 alumnas de equipos distintos las que llegaron al resultado esperado, se observó que la mayoría de las estudiantes llegaron a estar de acuerdo con las observaciones de estas dos alumnas, inclusive llevaron a sus demás compañeras a aseverar la existencia del teorema de Thales.

La mayoría de las alumnas contestaron las preguntas correctamente, comentaron, opinaron, y llegaron a la respuesta que esperaba, esto con apoyo de las diapositivas presentadas en PowerPoint.

En esta última etapa fue posible observar indicios de la realización de las estrategias variacionales de *predicción y seriación,* puesto que las alumnas llegaron al valor que se aproxima el cociente que señala el teorema de Thales, ver la Figura 6.5.6, en este caso, a 2, cuyo valor es lo que los paileros consideran que proporciona el corte más preciso del tubo debido a que los triángulos llegan a ser proporcionales. Las estudiantes también argumentaron que, aunque se hagan más cortes, los triángulos ya no pueden ser uno más pequeño que otro, es decir, que seguirán siendo del mismo tamaño, ver la Figura 6.5.6. Otro comentario que realizaron fue que la curva del corte se haría más exacta y que por eso no se requeriría de tanta soldadura como en el tubo T1.



Cocientes del triángulo del tubo T4:

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'} = 2$$

Con valores de AB= 1, AB'= 0.5, AC=1.3, AC'=0.6, BC=0.9 y B'C'=0.5.

Figura 6.5.6 Triángulos rectángulos y cocientes formados en el tubo T4.

A continuación, se presenta la resignificación que realizaron las alumnas del teorema de Thales y para resignificarla se requiere de la realización de la unidad de análisis.

6.6 Resignificación del teorema de Thales

Los resultados de la implementación de la situación variacional en el aula, nos permite aseverar que la unidad de análisis es la coordinación de las estrategias variacionales (comparación, predicción, estimación y seriación) empleadas en la resolución del problema, la cual permite la visualización y la resignificación del teorema de Thales. La unidad de análisis tendrá que contener en sí misma, simultáneamente, información del todo, además, plantea una relación dialéctica entre los análisis de tipo local y global (Alvarado, 2018). Esta unidad de análisis es a la que también se refiere Buendía (2006) al estudiar la periodicidad de las funciones.

La unidad de análisis a la que se hace referencia es desarrollada cognitivamente por las estudiantes, ellas resignificaron el teorema de Thales al interpretarla a través de la noción de precisión que se va alcanzando cada vez que se practican más cortes en la construcción del tubo en forma "T".

Es decir, la situación variacional (el término *situación variacional* esta destacada en el marco teórico) permitió a las alumnas entender el teorema de Thales no como una fórmula o una proposición acabada que tiene que ser memorizada, sino más bien como una condición que se tiene que alcanzar a través de un proceso de cambio donde se tiene el propósito de construir un tubo con un corte más preciso con borde suave, o bien, cuando se busca construir un tubo "T" más robusto, en el sentido de que requiere menos cantidad de soldadura y tiene menor probabilidad de fractura.

En esa dirección, es posible afirmar que la situación variacional, a través de las estrategias variacionales (comparación, predicción, estimación y seriación) permitió la resignificación del teorema de Thales. Como se ha señalado anteriormente, a través de la unidad de análisis se resignificó el teorema, al interpretarla a través de la noción de precisión que se va alcanzando cada vez que se practican más cortes en la construcción del tubo T, pues en cada uno se analizaron los triángulos formados entre las plantillas y los planos de trabajo, ver la Figura 6.5.5, las alumnas observaron como el triángulo menor (rojo) se fue metiendo en el triángulo mayor (azul), esto con el aumento de los cortes en los tubos, llegando a formar triángulos semejantes. Al observar que eran semejantes, algunas concluyeron que, aunque se hicieran más cortes en el tubo T4 el triángulo mayor no podría hacerse pequeño y viceversa, ver Diálogo 7, por lo que aseveraron que con un tubo de estas características no se va a tener un exceso de soldadura y no habrá probabilidad de fractura. Además, las alumnas llegaron a la conclusión de que en los triángulos formados en el tubo T4, ver la Figura 6.5.5 en T4, se obtenía un solo valor a través de calcular los tres cocientes (fórmula del teorema de Thales) utilizados en la tabla.

Esta es una manera de tener al estudiante activo y que de manera progresiva vaya resignificando el saber matemático a diferencia de la clase tradicional donde simplemente toma el papel de una persona receptora sin involucrarse en las actividades de aprendizaje (Alvarado, 2018).

La situación variacional presentada en este trabajo se apoyó en las dimensiones Socioepistemológicas: Sociocultural, Cognitiva, Didáctica, y Epistemológica, es decir, la

manera en la que las alumnas construyeron ese conocimiento. La situación variacional cobra relevancia al momento en que las estudiantes empiezan a reflexionar cómo se realizaría el tubo en forma "T" del problema del robo de las tuberías (noticia verídica) con las características solicitadas. Esto conlleva a que las estudiantes con la necesidad de ayudar a la empresa de Pemex, tomen el rol de un pailero para llevar a cabo dicha construcción y doten de significado y utilidad esta práctica. Así mismo, les permite identificar lo que está sucediendo con los triángulos rectángulos que se forman entre el plano de trabajo y la plantilla del tubo en los diferentes cortes.

En contraste con las propuestas que emplean a la tecnología (por ejemplo, las animaciones o applets) como recurso para la enseñanza del teorema de Thales, la situación variacional que se ha presentado en este trabajo dota a dicha relación matemática de una componente sociocultural (señalada por la Socioepistemología) la cual permite a las alumnas lograr un aprendizaje contextualizado y un saber matemático funcional.

La necesidad de identificar cuál era el elemento o característica por la cual el borde se hacía menos poligonal a través de los cortes de los tubos, llevó a la identificación de los triángulos rectángulos, favoreciendo a dotar de un significado funcional al teorema de Thales, lo cual implica no aplicar la fórmula como en las clases tradicionales, sino más bien se trata del desarrollo de un pensamiento matemático que involucra dicho teorema y que permite a las personas resolver un problema o necesidad social, el de la construcción de tubos "T" con mayor precisión.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

Algunos profesores enseñan matemáticas como está en el libro de texto limitándose a reproducir el contenido en el pizarrón, lo cual conduce al rechazo casi automático de la clase de matemáticas (Cantoral, 2013). Algunas de las causas por las cuales los profesores se limitan sólo al libro de texto, según Gamboa y Ballestero (2010), ocurren cuando los docentes no desarrollan los contenidos geométricos contemplados en los programas, ya sea por desconocimiento de la importancia de la disciplina o por poco dominio de los contenidos geométricos. En aquellos casos en que sí se desarrollan, se hace enfatizando en el uso de fórmulas.

Como se observó en el capítulo 2, algunos libros de texto abordan el teorema de Thales por medio de problemas o ejercicios, de modo que los estudiantes los resuelvan a través de la aplicación de la fórmula.

En la mayoría de los casos, el proceso de enseñanza está condicionado por los libros de texto que impactan considerablemente en el qué y cómo enseñar (Abrate et al., 2006). Por esto, el teorema de Thales no es enseñado adecuadamente y para las alumnas carece de sentido el aprendizaje de dicho teorema. Además, Gamboa y Ballestero (2010) señalan que, en el sistema de educación formal en secundaria, usualmente los contenidos de geometría son presentados al estudiantado como el producto acabado de la actividad matemática.

La enseñanza tradicional de esta disciplina se ha enfatizado en la memorización de fórmulas, así como definiciones, teoremas y propiedades, apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas (Gamboa y Ballestero, 2010). Debido a que hay una tendencia a la memorización de conceptos y la resolución automática de problemas, los estudiantados no tienen un aprendizaje adecuado del teorema de Thales.

Acerca de lo antes expuesto sobre el teorema de Thales, según Gamboa y Ballestero (2010) los procesos de descripción, comprensión, análisis, construcción, exploración, visualización, argumentación, aplicación, entre otros; deben ser implementados en la enseñanza de un contenido de Geometría mediante el planteamiento de situaciones problema que impliquen para el alumnado, un nivel cognitivo no limitado al uso de una fórmula o proceso algorítmico.

El aprendizaje del teorema de Thales implica el desarrollo de habilidades visuales y de argumentación. Más aún, para lograr un aprendizaje significativo es necesario construir una interacción fuerte entre estos dos componentes, de manera que el discurso teórico quede anclado en experiencias perceptivas que ayuden a construir su sentido y, a su vez, las habilidades visuales deben ser guiadas por la teoría, para ganar en precisión y potencia (Castiblanco et al., 2004).

Es importante señalar que el estudiantado indica que la memorización de fórmulas y el factor "profesor" son componentes que influyen en la enseñanza y aprendizaje de un contenido de Geometría (Gamboa y Ballestero, 2010).

> El principal argumento que brindan estudiantados para justificar la poca importancia que se le da al estudio de la geometría, es que no le encuentran una utilidad a los contenidos que se desarrollan en secundaria y consideran que lo que aprendieron en la escuela es suficiente. Razones opuestas dan quienes consideran que aprender geometría en secundaria es importante, pues estos indican que los contenidos que se desarrollan son aplicables en la vida cotidiana. Pareciera, entonces, según las razones dadas por estudiantes, que la importancia de aprender la disciplina está asociada a la aplicabilidad de esta, es decir, sería importante aprender solamente lo que se puede utilizar en la vida (Gamboa y Ballestero, 2010, p.137).

Cabe destacar, que el docente de Matemáticas muchas veces no le da una importancia específica a algún tema de geometría. Además, se pone de manifiesto que la memorización constituye, para el estudiantado, un importante elemento en el aprendizaje de la geometría, dada la "necesidad" de saber fórmulas, definiciones y características. Así mismo, consideran que, para tener éxito en Geometría, una de las tres principales habilidades, hábitos o actitudes que se debe tener es la capacidad para memorizar definiciones, fórmulas y teoremas (Gamboa y Ballestero, 2010).

El docente debe proponer situaciones de aprendizaje innovadoras con el fin de lograr un aprendizaje significativo en las estudiantes.

Las estudiantes con las que llevé a cabo la situación variacional no tienen un adecuado aprendizaje del teorema de Thales, tal como se observó en la etapa 1, evaluación diagnóstica y presentación del problema, pues se pudo verificar que tuvieron dificultades con el teorema, puesto que al momento de resolver el examen diagnóstico intentaban resolver los ejercicios por medio del teorema de Pitágoras, lo cual revela que éste tiene más sentido para ellas, ninguna estudiante aplicó el teorema de Thales a pesar de la lectura inicial donde se enunciaba, ver Anexo A. En los ejercicios donde solamente se tenía que aplicar la fórmula ninguna estudiante contestó.

En cada sesión, las alumnas no contestaron al mismo tiempo, pues necesitaron de algunos comentarios de sus demás compañeras para motivarse a participar con las preguntas abiertas que se realizaron. Aun así, muchas de las estudiantes no respondían. Incluso hubo un equipo que no dejó evidencia de la tabla ni de la pregunta escrita que se les repartió.

Cómo se observó en el capítulo anterior las alumnas tenían diferentes observaciones respecto a las regularidades que encontraron al analizar los datos obtenidos en la tabla, por el contrario, en la pregunta escrita que se les repartió, la mayoría de las alumnas tuvieron un punto en común, y fue que entre más partes realizaran, más precisión tendrían, por ejemplo, entre más cortes tenga la plantilla del tubo del tubo T4 se hará la "curva" continua y suave, así no habrá probabilidad de fractura y se utilizará la menor cantidad posible en soldadura al construir el tubo "T".

Las estudiantes llegaron a la conclusión final de que los triángulos formados en la plantilla del tubo T4 y el plano de trabajo eran semejantes, y que de éstos se obtenía un solo valor a través de calcular los tres cocientes $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Con lo anterior las alumnas lograron visualizar el teorema de Thales y lo resignificaron, esto se llevó a cabo incorporando la experiencia del alumno y su dimensión sociocultural. Las alumnas le dieron un sentido funcional al teorema a través de la variación, es decir, al concluir las alumnas que entre más particiones hubiera en el tubo T4 el corte tendería a una curva continua, embonaría mejor el tubo blanco con el tubo T4 para formar el tubo "T", se reduciría la cantidad de soldadura y no habría posibilidad de fractura.

Finalmente se institucionalizó el teorema de Thales ("*si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes"*) lo que se traduce a su fórmula (*en forma de tres cocientes*).

Con este trabajo se logró la resignificación del teorema de Thales a través de los elementos que aborda la teoría de la Socioepistemología, las estudiantes a través de prácticas en la construcción de tubos, obtuvieron esta visualización.

A continuación, se responden las preguntas de investigación que se plantearon en el capítulo 2, página 51.

Respuestas a las preguntas de investigación

Pregunta principal: ¿Cómo se lleva a cabo la comprensión del teorema de Thales en el contexto de una situación variacional que implica el proceso de construcción de tubos T en pailería?

La comprensión del teorema de Thales se lleva a cabo a través de la situación variacional diseñada para la implementación en el aula donde se involucra el cambio y la variación, pues es lo que permitirá que las estudiantes doten de un nuevo significado al teorema abordándolo no como un concepto netamente matemático sino dándole un uso, considerando el contexto de la pailería en la construcción de tubos T adaptando los elementos de ésta, motivando la realización de las estrategias variacionales de comparación, predicción, seriación y estimación los cuales permiten que el alumno aprendan la noción matemática que está en juego, así como visualizar y resignificar dicho teorema.

Pregunta 1: ¿Cuáles son las características que debe tener una situación variacional para poder resignificar el teorema de Thales en términos del proceso de construcción de tubos?

Se debe plantear una situación que considere actividades o tareas que involucren el cambio, pues la variación es lo que permitirá que los estudiantes puedan resignificar el teorema de Thales, esta situación debe considerar, en su diseño, elementos del desarrollo histórico del objeto matemático a ser aprendido y debe ser una situación natural en el sentido de que la situación considere el contexto que rodea al estudiante, esto es con la finalidad de atender una necesidad social y que motive la realización de las estrategias variacionales. Por ejemplo, en la situación variacional que se llevó a cabo, el cambio se dio conforme se iban

incrementando las particiones de los tubos con objeto de ir obteniendo progresivamente un corte con un borde cada vez más suave, pues las estudiantes observaron cierto comportamiento variacional en éstos.

En un aspecto técnico, una de las características principales es trabajar en un espacio (aula) adecuado que cuente con proyector (para presentar las diapositivas) y sea aislado del ruido o cualquier factor que intervenga como distractor. Dependiendo la cantidad de estudiantes será la cantidad de material impreso (plantillas para ensamblar, plantilla tubo 4, tablas, pregunta escrita para repartir a cada equipo, plano de trabajo) y básico (compás, regla, tijeras, cinta adhesiva, calculadora, lápiz, colores). Se debe trabajar con estudiantes de tercer año de Secundaria, puesto que este teorema, como se mencionó anteriormente solo en este grado se aborda.

Pregunta 2: ¿Qué elementos podrían tomarse del oficio de la Pailería, relacionado con el teorema de Thales en el contexto de la construcción de tubos para adaptarlo al aula?

En la industria de la Pailería se lleva a cabo entre otras actividades la construcción de tubos, el pailero es quien realiza los cortes de los tubos, entre estos el corte "boca de pescado" que hace tubo en forma "T", él sabe cuántas particiones requiere dependiendo la precisión que necesite para construir un tubo, en el corte del tubo se encuentran implícitamente triángulos, el pailero no lo sabe, pero para adaptar la actividad en el aula se mostró la técnica de construcción del tubo "T" a las alumnas de forma explícita. El pailero maneja implícitamente el teorema de Thales, y para mostrarlo a las alumnas se realizó la situación variacional donde se realizaron cuatro tubos con distintas particiones a través de los triángulos que se formaban entre la plantilla y el corte de cada tubo y en las mediciones obtenidas de las aristas de los triángulos en cada tubo que se vaciaron en la tabla.

Las adaptaciones que se llevaron a cabo para la situación variacional fueron la construcción del tubo en forma "T" a través de un problema verídico, como lo fue la noticia del robo de combustible. El segundo fue la construcción de distintos tubos forma "T" con distintas particiones. El tercero fue la obtención de plantillas en hojas milimétricas. El cuarto fue señalar explícitamente la relación de los triángulos que se formaban al juntar la plantilla con el plano de trabajo. El quinto fue visualizar la relación de los triángulos en los cuatro tubos. El sexto y último, fue la recolección de medidas de los triángulos.

Cabe destacar, que no es necesario que el alumno construya los tubos, sino que se les puede proporcionar las plantillas para reducir el tiempo de ejecución de la situación variacional.

Pregunta 3: ¿Cuáles son y cómo se organizan los procesos cognitivos específicos a lo largo del proceso de resignificación del teorema de Thales en el contexto de la actividad de Pailería relacionada con la construcción de tubos?

Las estrategias variacionales (comparación, predicción, seriación y estimación) son los procesos cognitivos que permiten que el alumno aprenda la noción matemática que está en juego, así las alumnas visualizaron el teorema de Thales y lograron una resignificación de dicho teorema.

Las estrategias de comparación, seriación y predicción permitieron a las alumnas encontrar el teorema de Thales a través del análisis de los datos de las longitudes de las aristas de los lados de los triángulos, mientras que la estrategia de estimación, permitió atribuir un carácter funcional a la relación matemática encontrada. Las estudiantes llevaron a cabo las cuatro estrategias variacionales y esto se evidenció en los argumentos variacionales que compartían en el grupo (el término *argumento variacional* se destaca en el marco teórico).

Con respecto a las hipótesis de investigación es importante destacar que las 2 hipótesis planteadas fueron correctas y se pudieron comprobar con las preguntas de investigación.

Lo que se alcanzó con la situación variacional fue significativo para las alumnas, en contraste con lo que se aprende en una clase tradicional, añado, que su profesora me comentó que acababa de finalizar el tema del teorema de Thales.

Algunos aspectos que sugiero mejorar para que el docente lo ponga en marcha es considerar el uso de material de alta precisión como, por ejemplo, el compás debido a que algunos de estos pueden variar las medidas que se están marcando. También, para reducir el tiempo de elaboración de las plantillas se aconseja realizar paso a paso el primer y segundo tubo, esto para que las alumnas entiendan el proceso de elaboración, y las demás, proporcionarlas para recorte, puesto que cada plantilla requiere el mismo proceso. Además de proporcionarles las plantillas para embonar cada tubo.

Este trabajo me funcionó y se puede abordar para cualquier tema matemático como el que se trabajó en esta investigación.

Estudio a futuro

¿Quién pensaría que en un oficio como es la Pailería se empleen diversos conocimientos matemáticos tan ricos e interesantes, poco vistos en las escuelas, como lo es el teorema de Thales?

De mis vivencias como profesora me di cuenta que, aun utilizando TIC´s y dinámicas específicas para enseñar un tema curricular matemático, la enseñanza tradicional prevalece. Como lo he mencionado anteriormente, a los alumnos sólo les queda aprenderse las fórmulas ya que saben que para los exámenes o tareas les ayudará a resolver los distintos ejercicios de aplicación, por lo que no se logrará en ellos un aprendizaje significativo de los temas matemáticos abordados.

Con esta investigación me doy cuenta que, así como en cualquier oficio u profesión se encuentran inmersas las Matemáticas y de cualquier nivel educativo, llegue a Pailería gracias a mi maestro de la asignatura de “Taller de Integración de Conocimientos V” que tuve en la carrera, él encargó investigar diferentes áreas entre éstas la Pailería, quedé con curiosidad de saber que otras matemáticas habría ahí además de las que expusieron mis compañeros aquella ocasión, los conceptos que encontré a través de lo que platique con el pailero A., se encuentran los ejes de simetría, el plano cartesiano, coordenadas, la circunferencia, radio de

curvatura, paralelismo, perpendicularidad, teorema de Pitágoras, teorema de Thales, por mencionar algunos, estos conceptos son empleados por los paileros de manera significativa debido a la utilidad que estos tienen en la construcción de diferentes estructuras metálicas industriales.

Planeo continuar averiguando qué otros conocimientos matemáticos están ahí y que puedan permitir adaptarlas para llevarlas al aula y lograr un aprendizaje más rico y significativo para los estudiantes del nivel básico. También, averiguar qué otras prácticas hay en la Pailería que puedan servir para la cuestión de la variación.

Además, una vez establecido el teorema de Thales, mostrar la validez de ese teorema a través de actividades en el contexto de la Pailería.

BIBLIOGRAFÍA

Abrate, R.; Delgado, G. y Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. Revista Iberoamericana de Educación, 39(1), 1-9. Recuperado el 22 de octubre de 2007 en http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf

Aparicio, E. (2003). *Sobre la noción de discontinuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes de ingeniería en contexto de geometría dinámica.* Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, México, D.F.México.

Arias, J. y Maza, I. (2011). Geometría. *Matemáticas: solucionario*. (p.303). Recuperado de https://goo.gl/duchpQ

Arriaga, A. y Benítez, M. (2011). Matemáticas 3: Inducción a las competencias. 2nd ed. México: EDIMEND, S.A. de C.V., pp.213-221.

Artacho, A. (2014). La pirámide de Keops. Recuperado de: https://goo.gl/GzhBwR

Báez, O., González, A., Gudiño, G., Noguera, L. e Iglesias, M. (2015). Teorema de Tales. Una propuesta didáctica. Pp.139-150. Consultado en: https://goo.gl/L1XXbC

Barriendos, A. y Espinosa, E. (2008). Matemáticas III. Recuperado de https://goo.gl/Nx4uHF

Briseño, A. y Verdugo, J. (2007). Matemáticas 3. 1st ed. México, D.F.: César Jiménez Espinosa, pp.124-125.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Relime*, Vol. 9(2), pp.227-251.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). El desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional entre profesores de Bachillerato. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.*, 26, pp.1585-1593.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.,* 26, pp.1197-1205. Consultado en: https://goo.gl/MnK5jt

Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN. México D.F. México.

Cabrera, L. y Cantoral, R. (2010). El pensamiento y Lenguaje Variacional como eje rector para el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la RIEMS. Recuperado de: https://goo.gl/5up8uf

Canedo, S. (2009). Contribución al estudio del aprendizaje de las ciencias experimentales en la educación infantil: cambio conceptual y construcción de modelos científicos precursores. Barcelona.

Cantoral, R. (2001). Matemática Educativa. *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México, D.F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2005). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 17, pp.1-9. Consultado en: https://goo.gl/kBgh14

Cantoral, R. (2005). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada Socioepistemológica. *Acta Lationoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 17, pp.1-9.

Cantoral, R. (2011). *Fundamentos y Métodos de la Socioepistemología.* 1er. Simposio en Matemática Educativa, CICATA del IPN, Ciudad de México, D.F., México.

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. España: Gedisa, S.A.

Cantoral, R. (2016). Educación alternativa: matemáticas y práctica social. *Perfiles Educativos*, 38, pp.7-18.

Cantoral, R. (2017,07,24). Retos y desafíos del nuevo modelo educativo en el área de Matemáticas. Recuperado de https://goo.gl/8M565Z

Cantoral, R. (s.f.). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. México, D.F.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje Variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*- Edición especial, 42, 353-369.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En Cantoral et al, Trillas: ITESM, Universidad Virtual. *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (pp. 185-203). México, D.F., México: Trillas.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. Recherches en Didactique des Mathématiques, 24 (2.3), 137 – 168.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. Recuperado de https://goo.gl/QnvYiT

Cantoral, R., Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, pp.463-468.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), pp. 91-116.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2015). El programa socioepistemológico de Investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 5-17.

Caran, S. y E., Nelly, J. (2006). Ingeniería hidráulica en el México prehistórico. Consultado en: https://goo.gl/nwBpM4

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Enlace Editores Ltda.

Castro, X. (s.f.). Teorema de Tales. Consultado en: https://goo.gl/t7G47N

Covián, O. (2005). El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya. Maestra en Ciencias. *CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN*.

Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la Socioepistemología.* Instituto Politécnico Nacional, México, D.F.

Cruz, J. (2014). Comportamiento de los materiales empleados en la fabricación de tuberías. En IC Editorial, *Conformado y curvado en la fabricación de tuberías.* Recuperado de: https://goo.gl/ZD9kpZ

Cruz, M. (2015). Teorema de Tales de Mileto [Figura]. Recuperado de https://goo.gl/6cHigy

De la Peña, J. (2010). Sistemas romanos de abastecimiento de agua. Consultado en: https://goo.gl/LzCxUA

Díaz, J. (2002). Tales de Mileto. *Apuntes de historia de las matemáticas.*1(1), pp. 13-18. Consultado en: https://goo.gl/5DycuY

Domínguez, N. (2012). *El yacimiento de Tikal* [Figura]. Recuperado de https://goo.gl/sn7mSY

Domínguez, R. (2018). *Pailero de oficio* [Figura]. Recuperado de https://goo.gl/oMvxTG

Echeverry, C. (2011). *Fabricación de tubería con costura.* Universidad Eafit, Medellín. Consultado en: https://goo.gl/k4kHdp

Espada, B. (2018). *Pasos para soldar aluminio con TIG* [Figura]. Recuperado de https://goo.gl/PiBqaB

Esquivel, R. (2016). *Herramientas de herrería* [Figura]. Recuperado de https://goo.gl/CwzrBr

Falcón, Ó., Núñez, J., Falcón, R. y Tenorio, Á. (2009). Matemáticas en las aulas de Secundaria. *La Gaceta de la RSME*, 12, pp.347-367. Webquest en: https://goo.gl/ipR1Li

Fernández, J. (2015). Teorema de Tales: problemas y explicación paso a paso. Recuperado de: https://goo.gl/TEuK5p

Fernández, S. y Díaz, S. (2002). Investigación cuantitativa y cualitativa. Recuperado de https://goo.gl/XU91Hx

Filloy, E., Barquera, E. y Carrión, V. (2014). Modelo de enseñanza para el Teorema de Thales en un ambiente de Geometría Dinámica. Consultado en: https://goo.gl/55axQr

Frankland, T (1998). Trazado de plantillas para tubos. Consultado en: https://goo.gl/bN2jSa

Gamboa, R., y Ballestero, E. (junio, 2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare,* 14(2), pp. 125-142.

Gargantilla, P. (2018). Tales de Mileto, primero científico de la historia y un crack en los negocios. Recuperado de: https://goo.gl/uGBdtD

Garrido, J.M. (s.f.). Diseño de investigación cualitativa en educación. Consultado en: https://goo.gl/S5s2pc

Godoy, A. et al. (2017). *Programa de estudios del componente básico del Marco Curricular común de la Educación Media Superior*. Campo disciplinar de Matemáticas. Bachillerato Tecnológico. Geometría y Trigonometría. Consultado en: http://bit.ly/2FnrUCY

Graves, W. (1997). Manual de plomería. Recuperado de https://goo.gl/AXmtJT

Guerrero, D. (2015). Segmentos proporcionales. Consultado en: https://goo.gl/gq8PW1

Gutiérrez, Á., Guillén, G. y Jaime, A. (2012). Un ejemplo de coordinación entre las asignaturas de matemáticas en el máster de profesorado de educación secundaria. Consultado en: https://goo.gl/ANfgR6

Hernán, R. (1974). El libro de arquitectura de Hernán Ruiz, El joven. Pedro Navascues Palacio, pp. 14-18. Consultado en: https://goo.gl/bKBCXm

Hernández, A. (2016). *Diseño, implementación y análisis de una secuencia didáctica para estudiar el Teorema de Thales y sus aplicaciones en la Escuela Secundaria.* Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología, Buenos Aires.

Ibáñez, J. (2007). Paisajes agrarios artificiales del México Preazteca: riego, terrazas, suelos artificiales en los Valle de Oaxaca y Tahuacán. Consultado en: https://goo.gl/eRsfyH

Lavola (2014). El agua en la antigua Mesopotamia. Canaleduca. Consultado en: https://goo.gl/F1Zy8k

Leite, R. y Pastre de Oliveira, G. (2016). Formacâo de professores e geogebra: uma proposta para compreender e ensinar o teorema de Tales. *Encontro Nacional de Educacaco Matemática*, pp.1-12.

López, S. (2017). *La técnica más común del robo de combustible* [Figura]. Recuperado de https://goo.gl/gXaHfk

Marin, A. (2016). Soldadura y Estructuras. Consultado en: https://goo.gl/PXBcet

Massuquetto, A. y Zanlorenzi, M. (2014). Aprendendo em sala de aula o teorema de Tales, através da história da matemática. Cuadernos PDE, 1, pp.1-21.

Matemáticas II: Cuadernos de actividades de aprendizaje. (2014). México. Consultado en: https://goo.gl/hczbTG

Matemáticas III: Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. (2011). México. Consultado en: http://bit.ly/2I00cL3

Mobley, G. (2011). *Basin of Maya Mysteries* [Figura]. Recuperado de https://goo.gl/iGPXiv

Mora et al. (2014). Propuesta didáctica para la enseñanza del teorema de Thales. En Mario Villalobos, Reiman Acuña y Marco Gutiérrez (Eds.), *II Encuentro Centroamericano de Matemática Educativa.* (pp. 132-142).

Moral, C. (2006). Criterios de validez de la investigación cualitativa actual. *Revista de Investigación Educativa*. Vol. 24(1), pp. 147-164.

Moran, F. (1978). Trazado de plantillas para trabajos en lámina. México.

N/a (2011). *Ruinas del acueducto de Chapultepec* [Figura]. Recuperado de https://goo.gl/6eTLGB

N/a (2013). *Corte del dique del Purrón* [Figura]. Recuperado de https://goo.gl/m8V6xW

N/a (2015). *Los Tecoatles* [Figura]. Recuperado de https://goo.gl/Cdi1BH

N/a (2016). Tales de Mileto y la gran pirámide: teorema de Tales. Consultado en: https://goo.gl/oQ3Q8p

N/a (2017). Agua potable: su historia. Recuperado de: https://goo.gl/hrqVR8

N/a (2018). *Oleohidráulica. Mar de Plata.* [Figura]. Recuperado de https://goo.gl/8PaVjG

N/a (2018). Tales de Mileto. Consultado en: https://goo.gl/M53sLt

N/a (s.f.). Estructuras metálicas. Consultado en: https://goo.gl/u3SmLe

N/a (s.f.). Estructuras tubulares. Consultado en: https://goo.gl/yoJiq2

N/a (s.f.). Teorema de Thales. Recuperado de https://goo.gl/YxNste

Niebles et al. (enero-junio, 2006). Metodología para la elaboración y calificación de procedimientos de Soldadura Bajo Código ASME. *Prospectiva*, 4(1), pp. 31-39.

N/a (19 enero). Historia sobre el tratamiento del agua potable. Recuperado de: https://goo.gl/m4R2Nd

Olaechea, M. (2006). *Acueducto* [Figura]. Recuperado de https://goo.gl/1uWGn6

Olivas, J. (2012). Ciudades de Agua. Tenochtitlán. Consultado en: https://goo.gl/E6yebe

Pastre de Oliveira, G. y Perleto dos Santos, R. (2011). Professores de matemática e o software geogebra: uma experiência envolvendo o teorema de Tales. pp.1-12.

Porteles, M. y Graterol, E. (2014). Necesidad de una propuesta de unidad didáctica para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Geometría usando Geogebra. Gestión y Gerencia, 8(2), pp.98-116.

Quecedo, R. y Castaño, C. (2002). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. *Revista de Psicodidáctica,* núm. 14, pp. 5-39, Recuperado de https://goo.gl/eyRDzt

Quiros, P. (2013). Tales de Mileto, el primer filósofo de la historia. Recuperado de: https://goo.gl/heQGys

Reyes, R.A.V., Rondero, G.C., Acosta, H.J.A, Campos, N.M., y Torres, R.A.A. (2017). Reduccionismo Didáctico y Creencias de Profesores acerca del Teorema de Pitágoras. *Boletim de Educação Matemática,* 31(59), 968-983.

Ruiz, A. (2003). Historia y Filosofía de las Matemáticas. Recuperado de https://goo.gl/dxcETA

Ruiz, A. (s.f.). El mundo griego presocrático. *Historia y filosofía de las Matemáticas.* (p. 30). Recuperado de: https://goo.gl/LGnAmm

Sánchez de León, J. (2013). Formulación matemática de ecuaciones de dimensionamiento de costura de tubería helicoidal. Consultado en: https://goo.gl/dFyEQY

Sánchez, F. (2001). Matemáticas 3: A partir de la solución de problemas. 1st ed. México: Fernández Editores, S.A. de C.V., pp.154-157.

Sánchez, V. (2003). Representaciones y comprensión en el profesor de matemáticas. Climent, Nuria de los Angeles; Contreras, Luis Carlos; Carrillo, José (Eds.), Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 51-64). Huelva: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Consultado en: https://goo.gl/ZVZDV8

Sautu, R. et al. (2005). Construcción del marco teórico, formulación de los objetivos y elección de la metodología. *CLACSO*, Colección Campus Virtual, Buenos Aires, Argentina. P.192. Consultado en: https://goo.gl/z17EUF

Secretaría de Educación Pública. (2017). Programa de estudios del componente básico del marco curricular común de la Educación Media Superior. Consultado en: https://goo.gl/PNEeR3

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2001). En *Precálculo: matemáticas para el cálculo.* México: International Thomson Editores.

Suárez, A., Mardones, E. y Madueño, L. (2001). Software Educativo Interactivo "Geomesu" con contenidos de Geometría Métrica. *Encuentro Educacional,* (1), pp.58-81. Consultado en: https://goo.gl/wdcCvP

Teorema de Thales [Figura]. Recuperado de https://goo.gl/94HB3Y

Universidad Autónoma de San Luis Potosí. (2013). *Mapa curricular 2013. Licenciatura en Arquitectura*. Facultad del Hábitat. Consultado en: http://bit.ly/2FgYdUY

Universidad Autónoma de San Luis Potosí. (2014). *Plan de estudios Ingeniería civil*. Facultad de Ingeniería. Consultado en la página oficial: http://bit.ly/2tgaGCD y http://bit.ly/2Ffxwj6

Valdez, B. y Schorr, M. (Eds). Corrosión y preservación de la infraestructura industrial. Barcelona, España: OmniaScience; 2013. Pp. 87-102.

Valera, D. (2013). El dominio maya del agua. Consultado en: https://goo.gl/mwrTjo

Varela, M. (2013). Matemáticas II: Para el desarrollo de competencias. México: Derechos reservados, pp.53-60.

ANEXOS

Anexo A: Examen diagnóstico

Examen diagnóstico

El teorema de Tales recibe su nombre en honor a Tales de Mileto, filósofo griego de la Antigüedad que vivió en el siglo VI a .n. e. Tales enunció el teorema al analizar las propiedades de las rectas paralelas y su relación con los triángulos semejantes. Observó que al trazar una recta paralela a uno de los lados de un triángulo se obtiene un nuevo triángulo semejante al primero y, por tanto, sus lados son proporcionales al original.

Si dos rectas cualesquiera son cortadas por rectas paralelas, los segmentos que determina en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra.

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

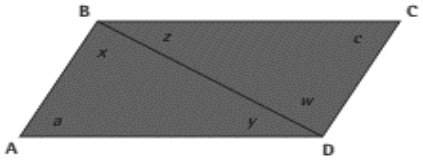
Propósito de la pregunta. Se desea indagar si los alumnos saben cuándo dos triángulos son congruentes.

Propósito de la actividad. Los alumnos deben justificar que los triángulos son congruentes utilizando un criterio de congruencia.

I. Contesta la siguiente pregunta: ¿Son congruentes Δ ABD y Δ CDB?_____

Completar-Resuelvan las siguientes actividades para justificar que los triángulos ABD y CDB son congruentes.

Recuerden que: Los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales.



a) De los ángulos marcados en la figura, ¿cuáles son alternos internos? (Por lo tanto iguales).

_____=_____y_____=_____

b) De los siguientes criterios de congruencia, ¿cuál usarían para justificar que los triángulos ABD y CDB son congruentes? Explica por qué los otros dos criterios no funcionan.

i) LLL (lado, lado, lado) ii) LAL (lado, ángulo, lado) iii) ALA (ángulo, lado, ángulo)

c) Algunas de las siguientes afirmaciones son consecuencia de que los triángulos ABD y CDB son congruentes, ¿cuáles son? _____

i) Los tres lados del Δ ABD son iguales y respectivamente del Δ CBD.

ii) Los lados del Δ ABD son iguales a los correspondientes del Δ CDB.

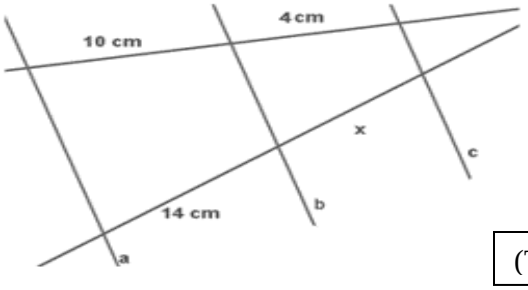
iii) $\overline{BD}$ es igual al lado $\overline{CB}$.

iv) $\overline{AD}$ es igual al lado $\overline{BC}$.

v) $\overline{AB}$ es igual al lado $\overline{CB}$.

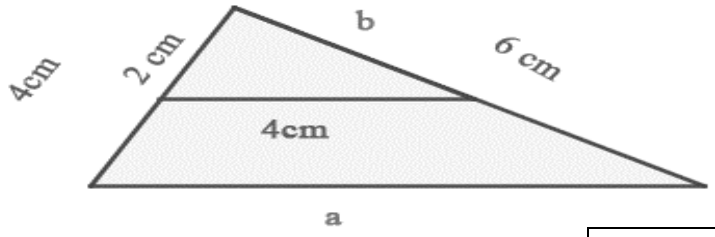
(Barriendos, A. y Espinosa, E., 2008, p.68-69)

II. Las rectas a, b y c son paralelas. Halla la longitud de x.



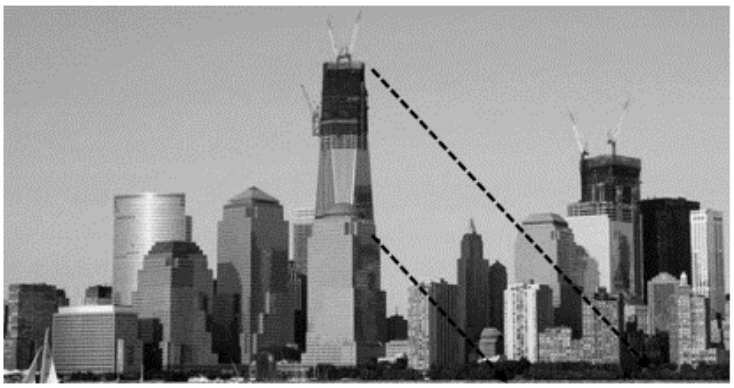
(Teorema de Thales, s.f)

III. Hallar las medidas de los segmentos a y b.



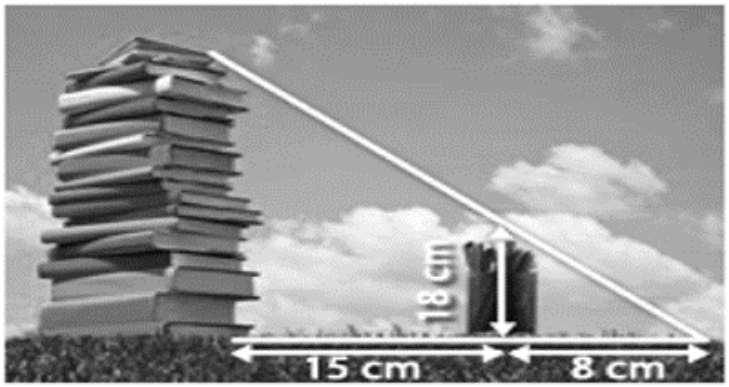
(Teorema de Thales, s.f)

IV. Tras el derribo de las torres gemelas en la Gran Manzana de los Estados Unidos, se proyectó la construcción de un nuevo edificio que se convertirá en uno de los rascacielos más altos del país, y también en uno de los más sostenibles, el World Trade Center (Nueva York) proyecta una sombra de 25m. El mismo día, a la misma hora y en el mismo lugar, un palo vertical de 2m proyecta una sombra de 2,5m. Calcula la altura de este edificio. Justifica tu respuesta.



(Arias, J. y Maza, I., 2011, p.303)

V. Responde la siguiente pregunta: ¿Cuál es la altura del montón de libros situado sobre el césped?



(Cruz, M., 2015)

Anexo B: Diapositivas

El Sol de San Luis

ENERGIA

La técnica más común del robo de combustible

Quienes se dedican a este ilícito literalmente 'juegan con fuego'.

Mas de mil millones de dólares, la pérdida por robo de combustible en México

Nación Huachicol: la cultura en torno al robo de combustible en Puebla

#Huachicultura

Twittear · Me gusta · Compartir

Por: Ender Marcano

CIUDAD DE MÉXICO — Los ladrones de combustible llamados 'huachicoleros'son el vivo ejemplo de lo que significa la expresión popular 'jugar con fuego'.

El campo de actuación de estos infractores se ubica en algún punto de la red de ductos de Petróleos Mexicanos (Pemex) que se extiende en el país a lo largo de más de 14,000 kilómetros. En cada toma ilegal, la combinación de una chispa de las soldaduras con los residuos de gasolina o diésel puede ser letal.

Salazar -cuya empresa ofrece servicios de asesoría en materia de políticas públicas- comenta que tiende a ser común la utilización de técnicas más rudimentarias al momento de querer "ordeñar" los ductos de Pemex.

Rubén Salazar explica en entrevista cómo se hace típicamente el proceso. En primer lugar se debe contar con información interna de Pemex para conocer la ubicación geográfica de los ductos y saber cuándo esta infraestructura no transportará combustible, porque de esa forma es más seguro habilitar la toma clandestina.

Cuartoscuro / Saúl López.

Noticia

Descripción Pailería y actividades de un pailero

PROBLEMA

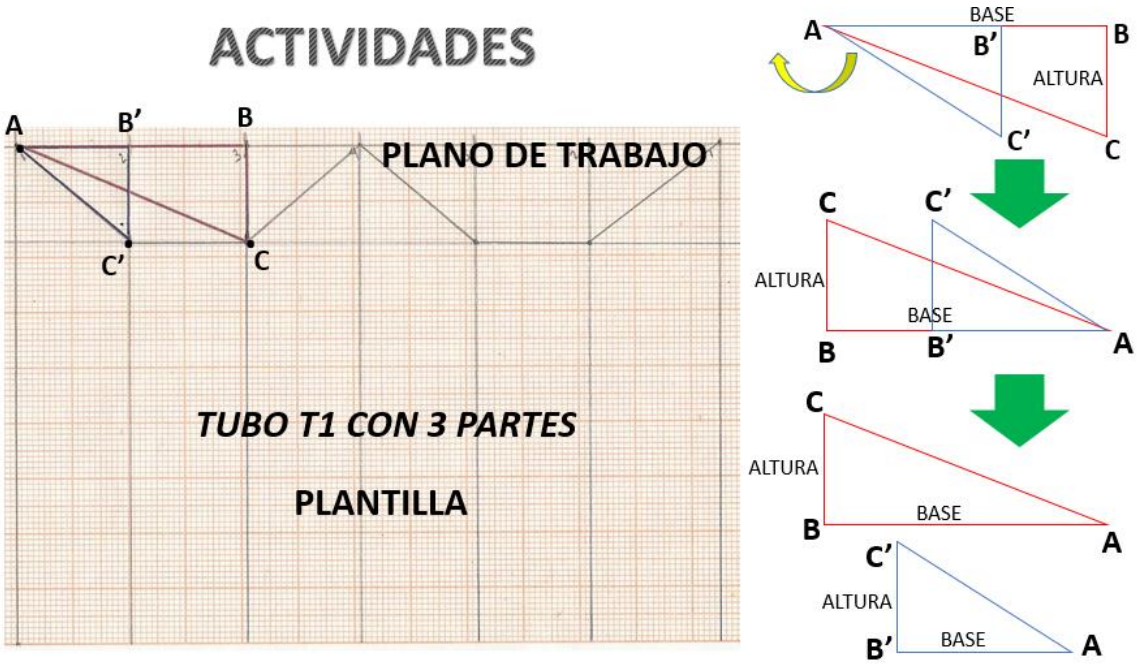
Un grupo de huachicoleros sabía la ubicación de los ductos, perforaron uno en la sección que estaba inoperativa para robar el combustible y además para robarse la tubería. En la empresa pailera se expandió la noticia.
Imagina que eres un pailero y tu jefe te pide que construyas una tubería en forma de "T" al ensamblar dos tubos de forma perpendicular, para la conducción de combustible. Tu jefe sabe que se perdieron más de mil millones de dólares por esta gran rapiña, él te desea buena suerte y te dice que con este proyecto apoyará la empresa de Pemex.

Nota: *El ensamble de los tubos debe emplear la mínima cantidad de soldadura con el fin de reducir la probabilidad de fractura en el tubo*

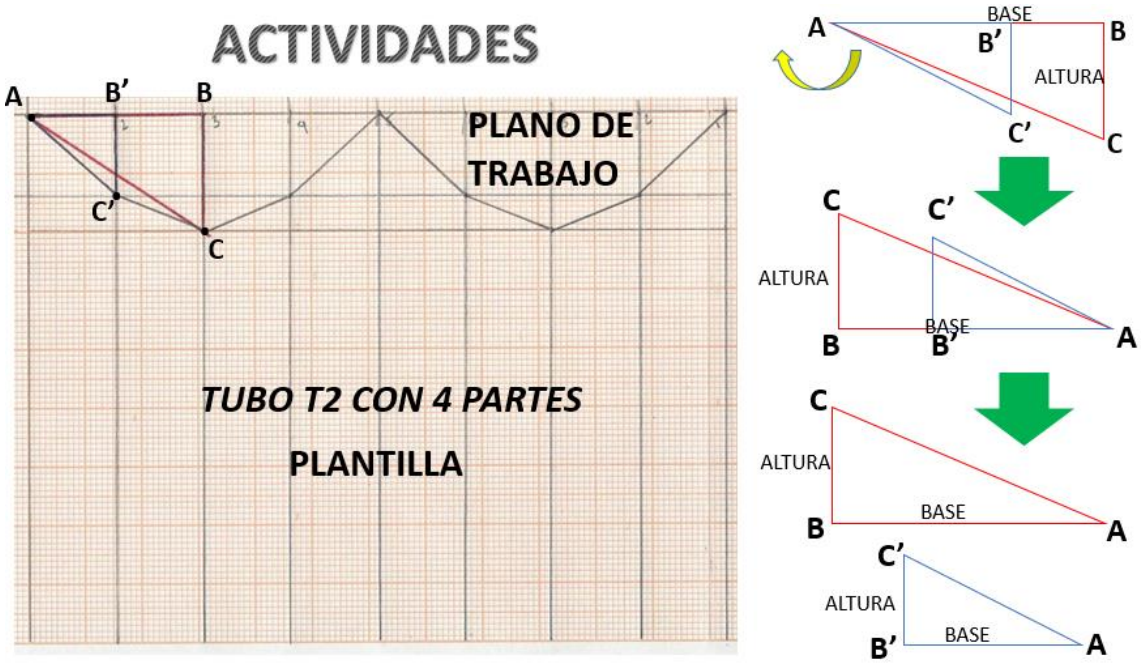
Problema a abordar

Algunos ejemplos de estructuras

Anexo C: Diapositivas

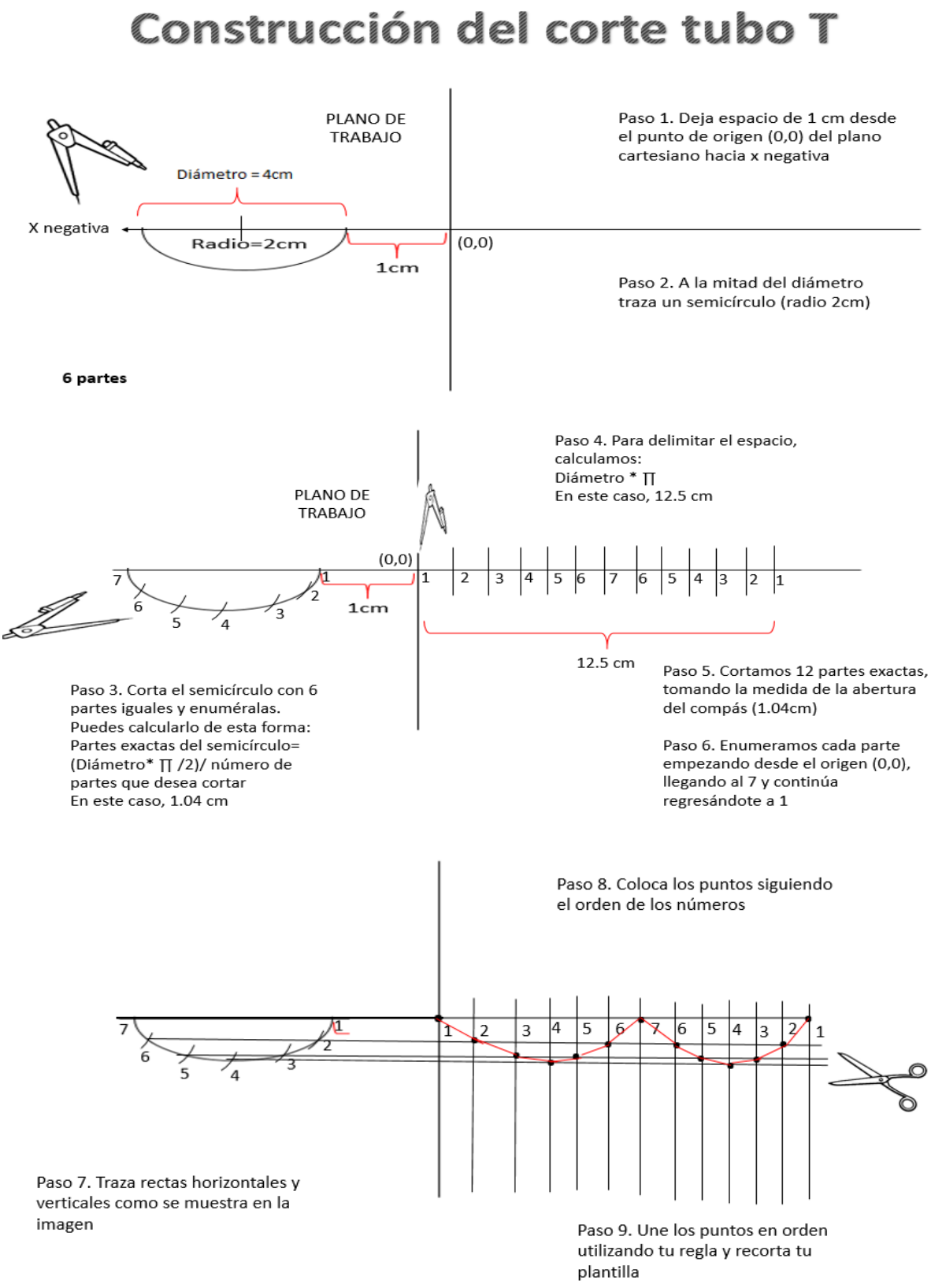


Obtención de los datos de los triángulos del tubo T1

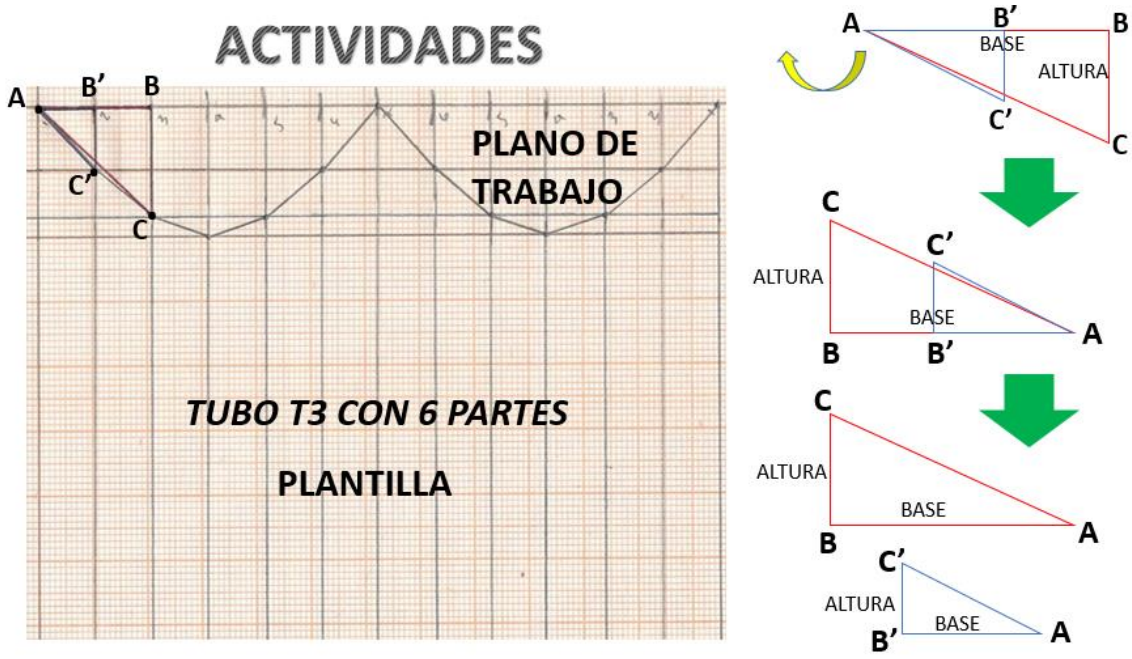


Obtención de los datos de los triángulos del tubo T2

Anexo D: Diapositivas construcción del tubo T3

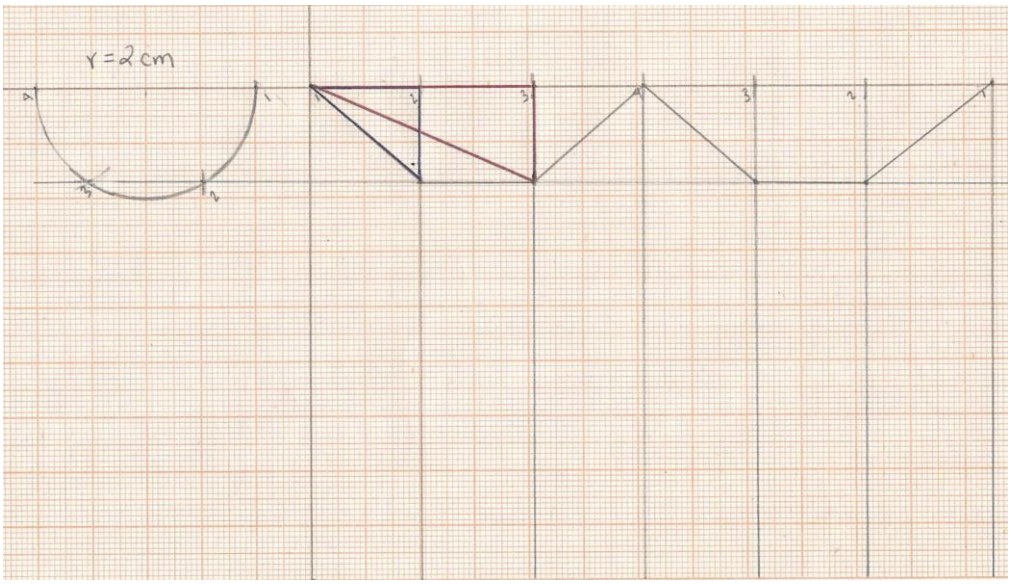


Anexo E: Diapositivas

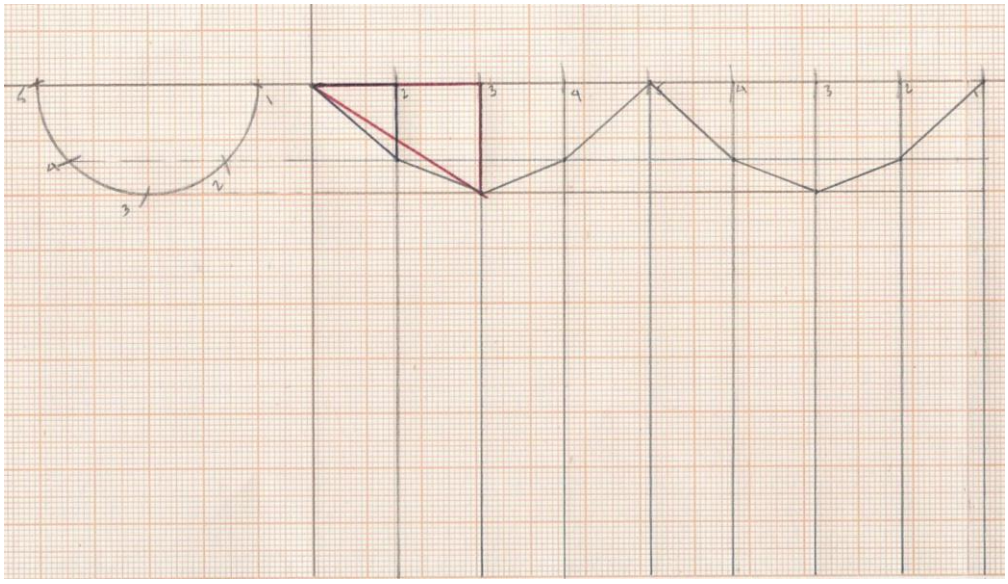


Obtención de los datos de los triángulos del tubo T3

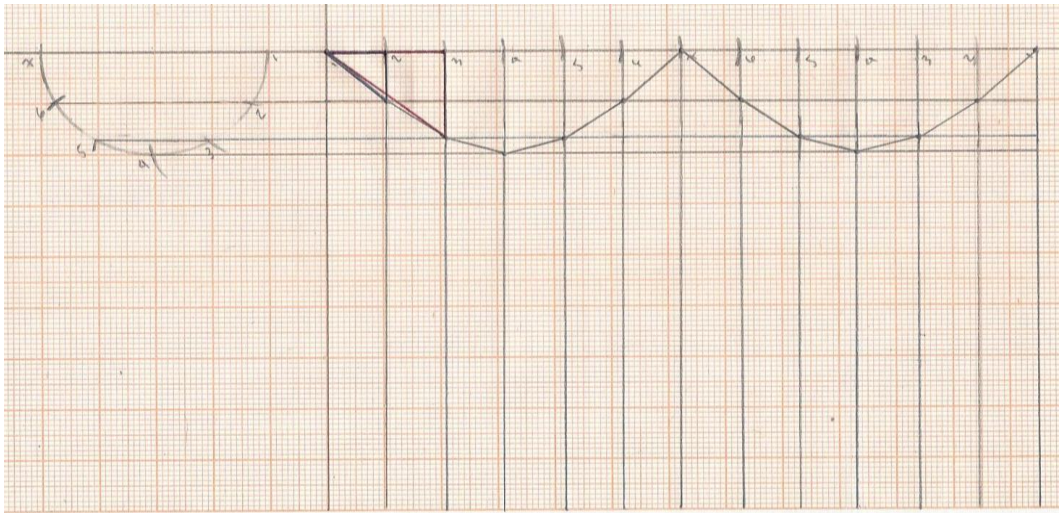
Anexo F: Plantillas de los cuatro tubos



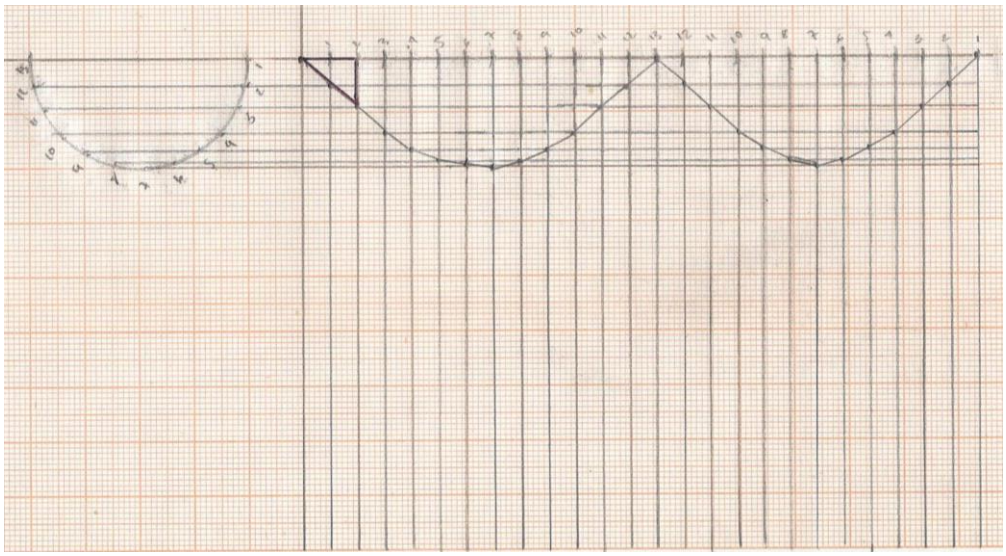
Plantilla del tubo T1



Plantilla del tubo T2



Plantilla del tubo T3



Plantilla del tubo T4