Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Facultad de Ciencias

Licenciatura en Matemática Educativa

EMPLEO DE SOFTWARE LIBRE DE GRAFICACIÓN PARA EL TEMA DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN: PROPUESTA PARA CURSO DE CÁLCULO EN BACHILLERATO

Tesis para obtener el grado de Licenciado en Matemática Educativa

Presenta:
Genaro Ángel Martínez Venegas

Director de tesis:
Dr. Javier Flavio Vigueras Gómez

San Luis Potosí, S.L.P., Enero de 2018

DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS

Agradezco y dedico esta tesis a mi familia, mis padres, María del Carmen Venegas Hernández y José Guadalupe Candelas Peña y a mi hermano Víctor Osvaldo por el amor que me demuestran día con día y por el apoyo económico y moral que me brindaron durante mi formación educativa, además de brindarme su plena confianza, ya que sin ustedes, no hubiera llegado a este logro.

A mis abuelos Rosy y Víctor Hugo, que me apoyaron en algunas dudas que tuve.

Doy gracias a Dios, por haberme permitido llegar al final de una mis metas académicas y continuar con la promesa de seguir superándome día a día.

A mi papá que trabajo día y parte de la noche, para que nada nos faltara y sobre todo, gracias por darme la mejor de las herencias que un padre puede dar a un hijo, que es el estudio, tengo mucho que agradecerte, y hoy te puedo decir, soy lo que ahora soy, gracias a ustedes, mis padres. Gracias por darme los valores y las ganas de salir adelante, no se me olvida que, durante mi formación educativa, siempre me decían, ¡sí se puede!, ¡ya falta poco!

A mi mamá, que soportó mi bipolaridad por el estrés, siempre recordándome que no tenía que ser un mediocre más y ser alguien en la vida, además, de que tenía que demostrarme a mí mismo, que ¡si se podía! Y más, cuando algo se me dificultaba, siempre me decías, “un problema no te va a ganar, ponte ese problema como reto, tu puedes, demuéstrame de lo que estas hecho”

A Vanessa, por el amor, el apoyo, la motivación que brindabas día a día para salir adelante y ser alguien en la vida y sobre todo comprensión.

A mi asesor Javier Flavio Vigueras Gómez, primeramente, por brindarme parte de su tiempo, a pesar de sus ocupaciones, por aceptar el gran reto de este trabajo de investigación y por orientarme en el mismo, cuando más lo necesitaba.

A la maestra Rosario Sandoval Cedillo, por orientarme en dudas que tenía con algunos ejercicios matemáticos al inicio de la carrera.

A la maestra Ma. Clementina Pérez Duarte Noroña, por orientarme en aspectos teóricos de este trabajo de investigación.

A mis profesores la licenciatura: Dr. José Elías Pérez López, Profr. Juan Manuel García López, Dr. Juan Martin Montejano Carrizalez, Dr. Emiliano Salvador Sánchez Rodríguez, Dr. Antonio Morante Lezama, Dra. Martha Compeán Jasso, Lic. Mat. María del Rosario Sandoval Cedillo, Profr. Jaime Velázquez Pantoja, Dr.

Rigoberto Chavira, Dr. Pedro Gilberto Alvarado Leyva, Dr. Miguel Ángel Bello Jiménez, M.C. Alejandro Corpus Cordero, Dr. Edgardo Ugalde Saldaña, Fis. Jorge Alejandro Ochoa Cardiel, M.C. Sergio Dávila Espinosa, M.C. Soraida Zúñiga, M.C. Ricardo Barrios Campos, Dr. Mario Cetina, M. en E. Ma. Clementina Pérez Duarte Noroña, Dr. Javier Flavio Vigueras Gómez, Dra. Lilia María del Riego Senior, Dr. Noé Sánchez Martínez, M.C. Rosaura Kenya Crisóstomo Cruz, Dra. Rita Guadalupe Angulo Villanueva, Dr. Gelasio Salazar Anaya, por brindarme su conocimiento en sus respectivas materias de matemáticas, educación y matemática educativa, además, de ser parte fundamental en mi formación académica.

Al Ing. Fernando Correa Lopez, por permitirme trabajar para esta investigación, con dos de sus grupos a cargo en la materia de Cálculo Integral, a la Ing. María Guadalupe Castillo Hernández, por apoyarme en todo lo que estaba a su alcance, durante la realización de este trabajo de investigación en el CBTIS No. 131, y a los alumnos, de la especialidad de alimentos y de servicio social, por brindar una gran colaboración en el proceso de investigación de este trabajo.

ÍNDICE

ÍNDICE DE CUADROS

ÍNDICE DE IMÁGENES

RESUMEN

En este trabajo se aborda la enseñanza del tema de sólidos de revolución desde dos perspectivas diferentes: la primera basada en una metodología tradicional y la segunda a manera de una propuesta metodológica usando el apoyo gráfico del software matemático Geogebra, en sus formas bidimensional y tridimensional. En la investigación se detectó que al tener como apoyo recursos tecnológicos en este caso, los de graficación, ayuda a que los alumnos mejoren su cognición visual (asociada a habilidades visuales, pero también de representación, etc.), misma que desarrolla la habilidad de reconocer objetos y sus respectivas transformaciones, en este caso, del espacio bidimensional al tridimensional, en la respectiva interpretación de áreas y volúmenes.

Abstract

This work deals with teaching the subject of solids of revolution from two different perspectives: the first one based on traditional teaching methodologies, and the second one using the graphing support the mathematical software Geogebra, in its two-dimensional and three-dimensional tools. In the investigation, it was detected that having the support of technological resources, like graphing in this case, it helps the students to improve their visual cognition (associated to visual abilities, but also to representations, etc.), developing the ability to recognize objects and their transformations, in this case, relating two-dimensional and three-dimensional objects, like areas and volumes, respectively.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las matemáticas a los estudiantes de la institución Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No. 131 (CBTIS No. 131) ubicado en el estado de San Luis Potosí, presenta diversos problemas específicamente con la enseñanza del Cálculo Integral para alumnos de quinto semestre en el nivel bachillerato.

En primer término encontramos una metodología tradicional en la enseñanza del Cálculo Integral, específicamente en el tema de aplicaciones de la integral, el cual está constituido por el estudio del área de superficies entre curvas y sólidos de revolución, entre otras; dicha metodología está siempre compuesta por la secuencia: definición, ejemplos y ejercicios, además, ésta es presentada por la gran mayoría de profesores que imparten la materia de cálculo integral, los cuales tienen en general una formación básica como ingenieros que, privilegian la cuestión práctica y tecnológica al dar clase pero sin un orden de contenidos específico, como por ejemplo y respecto a la temática de la materia: integral indefinida, integrales trigonométricas, cambio de variable.

También hay algunos profesores que han sido formados en licenciaturas donde se cursan algunos tópicos de matemáticas (ingenierías, arquitectura, contaduría, físicos, químicos) y, en su mayoría, presentan el tema y enseguida plantean ejercicios sin considerar ejemplos previos o contextualizados, con el fin de que el alumno aborde correctamente la solución de una integral y específicamente en el tema de sólidos de revolución, se generan limitaciones en el alumno en la comprensión del tema, por ejemplo, que no pueda visualizar correctamente el sólido de revolución generado por una función algebraica al girar respecto a un eje, el cual es el caso concreto de nuestro tema de estudio.

A pesar que el tema de sólidos de revolución, es de suma importancia dentro del Cálculo Integral, Andrade y Montesino (2009) sostienen que gran parte de las dificultades que presentan los alumnos en el tema de sólidos de revolución, es porque no pueden visualizar correctamente el cambio de un registro algebraico a uno gráfico, que es lo que llama Duval (2011), transformación de conversión. La complejidad relacionada con este cambio de registro, implica que en semestres anteriores el alumno no aprendió a graficar correctamente (Mofolo, Engelbrecht, & Harding, 2013) y por consecuencia, al momento de cambiar una función algebraica en dos dimensiones a una en tres dimensiones, el alumno no considera los cambios que ocurren al aplicar dicha transformación (Andrade & Montesino, 2009).

Siguiendo esta línea de investigación, acerca de la enseñanza tradicional del tema de sólidos de revolución, nos preguntamos: ¿Será la forma de enseñar tradicionalmente este tema, el principal obstáculo para la comprensión del alumno? Teniendo en cuenta los aspectos anteriores, se llega a la hipótesis de que existiendo diversos métodos (como representaciones gráficas y visuales) asociados al cambio de una función algebraica en dos dimensiones a una función algebraica en tres dimensiones, los profesores no hacen uso de ellos, o en su defecto, en la enseñanza tradicional del tema no se explica correctamente lo que es la rotación de una función algebraica respecto a un eje, o por qué el área acotada por la gráfica de la función al encontrarse en rotación, forma un cuerpo sólido al que se le puede atribuir un volumen.

Para tratar de dar solución a esta problemática, se plantea como objetivo general de investigación, desarrollar una propuesta metodológica que se apoya en el uso de Geogebra centrada en el tema de estudio, enfocándose para gráficas en dos y tres dimensiones, y así mismo, pueda ser utilizada por los distintos profesores que imparten la materia. En la mencionada propuesta, se derivan como objetivos específicos, mejorar la cognición visual del alumno asociada a la habilidad para reconocer objetos por medio del recurso graficador Geogebra, además, de identificar, analizar y describir, las principales dificultades a las que se enfrenta el alumno al trabajar con el tema de sólidos de revolución, así como, las diversas metodologías empleadas por el docente en la enseñanza del tema de estudio dentro del aula de clases.

La importancia de esta investigación radica en que se ha observado en el CBTIS No. 131 que existe un alto índice de reprobación en exámenes cuyo contenido está relacionado con el tema sólidos de revolución y otros temas asociados, ya que los alumnos presentan dificultades para obtener un sólido, en otras palabras, para visualizar espacialmente una función algebraica en tres dimensiones. Desde otro punto de vista, no se ha considerado la enseñanza de este tema con nuevas herramientas tales como, recursos gráficadores, interacción con objetos tridimensionales, recursos visuales de elaboración de un sólido de revolución, entre otros, que pueden favorecer el índice de aprovechamiento en los alumnos de bachillerato y/o tener una buena base del tema al momento de ingresar a la universidad a carreras afines con alguna ingeniería, lo cual no sucede debido a que la gran mayoría de los profesores de bachillerato permanecen con una metodología tradicional o simplemente prefieren no impartir el tópico para que no existan complicaciones durante la enseñanza del tema de sólidos de revolución.

Con el fin de dar fundamento teórico a la propuesta metodológica, la investigación se apoyó en dos teorías de matemática educativa: La teoría de las Representaciones Semióticas (Duval, 1999), en particular las transformaciones que están involucradas dentro de una representación semiótica, las cuales son tratamiento y conversión. La segunda teoría es La Transposición Didáctica (Chevallard, 1985), específicamente en el desarrollo de los tres saberes (saber sabio, saber académico o profesor, y saber enseñado) dentro del triángulo didáctico, para posteriormente dar paso a la vigilancia epistemológica y describir las trasformaciones de los saberes dentro de un grupo de aprendizaje. Y por último, una metodología especifica de la matemática educativa, ingeniería didáctica de Artigue (1985) particularmente, en lo que se refiere a la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza, poniendo en juego las cuatro fases de la ingeniería didáctica dentro de un proceso experimental. Particularmente emplearemos trabajos de Artigue y Moreno (1995) y Campos (2006).

Por otro lado, se llevó a cabo la enseñanza del tema de Sólidos de Revolución con uso de la metodología experimental, que consiste en la aplicación de un método de enseñanza a dos grupos, el grupo de control y el grupo experimental. Primeramente en el grupo de control, se aplicó la enseñanza del tópico de estudio de forma tradicional, con un grupo aproximado de treinta y ocho alumnos.

Posteriormente, con el segundo grupo, de aproximadamente cuarenta alumnos, se aplicó la misma enseñanza del tema de sólidos de revolución, pero con ayuda de un software graficador educativo, en este caso Geogebra en dos dimensiones para la representación de una función algebraica sin rotación, y posteriormente, se utilizó el software graficador en tres dimensiones para la representación de la función algebraica con rotación respecto a un eje determinado; se observaron ambas clases cuidando que se desarrollase el tema completo, se utilizó una lista de cotejo para las observaciones, además, se aplicó una pequeña prueba en ambas clases al comenzar el tema de estudio y al finalizar se volvió a aplicar la prueba para corroborar los resultados de las observaciones.

La finalidad de este trabajo, es desarrollar una metodología apoyada en el uso del software graficador Geogebra como recurso metodológico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la clase de Cálculo Integral, con el fin de que el alumno interactúe con el software y no se deje la visualización de un sólido de revolución, en la simple imaginación e interpretación del estudiante (representación gráfica), que incluso dificulta su visualización espacial tridimensional, sino al contrario, que pueda observar cómo es que una función que se encontraba en el plano bidimensional en un principio, generaba un área acotada bajo una curva, y al encontrarse en rotación respecto a un eje determinado, dicha función se interpreta como un volumen por la rotación de la misma, volviendo más sencilla la tarea de visualizar sólidos en el plano tridimensional.

El contenido de este trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el primer capítulo se plantea el problema, tomando en cuenta las diferentes metodologías utilizadas por los profesores que imparten la materia de Cálculo Integral en el Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No. 131.

En el segundo capítulo se abordan los fundamentos teóricos, comenzando por una revisión de los documentos escritos sobre la metodología de la visualización espacial de los sólidos de revolución. Para posteriormente abordar en el tercer capítulo, los planteamientos teóricos desde el punto de vista de diversos autores.

El cuarto capítulo presenta el diseño de la investigación y la estrategia metodológica para ser aplicada en esta tesis poniendo en juego las cuatro fases de la ingeniería didáctica para un proceso experimental.

En el quinto capítulo se presentan los resultados obtenidos durante la investigación, en la prueba pre-test y post-test, el análisis de las observaciones durante el proceso experimental y tradicional del tema de estudio y el análisis de la observación metodológica del profesor titular de la materia de Cálculo integral. Para exponer en el último lugar las conclusiones, así como las discusiones de la investigación y las posibles líneas de investigación derivadas de la investigación

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este apartado se describen las metodologías utilizadas por los profesores del Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No. 131, para la impartición de la materia Cálculo Integral.

En primera instancia, se observa que en su gran mayoría los profesores a cargo de impartir las materias de matemáticas, son ingenieros que haciendo alusión a lo mencionado anteriormente, privilegian la cuestión práctica y tecnológica al dar la clase pero sin un orden de contenidos específico, hay algunos casos en los que los profesores al momento de impartir esta materia, consideran los temas tal y como se presentan en el libro de texto, sin considerar que para algunos de los temas, se necesita reforzar las bases temáticas elementales que brindan sustento a diversos temas, como es, el tema de cambio de variable o en otros casos, se dejan de lado varios temas, que en su mayoría, involucran cierta complejidad o son la base temática para otros como, por ejemplo: a) Aplicaciones de la integral, específicamente en el tema de sólidos de revolución, b) Técnicas de integración, concretamente en las integrales por sustitución trigonométricas o integrales por fracciones parciales.

Para hacer evidente la problemática antes mencionada, se tuvo un pequeño diálogo y de manera separada, con dos profesores a cargo de impartir la materia de Cálculo Integral en el turno matutino. Primeramente, con una profesora que tiene dieciocho años de experiencia docente, además de tener una formación académica como Ingeniero Industrial, con dos maestrías, una en Campo de Desarrollo Docente y la otra en Educación Basada en Competencias. Y con un profesor que cuenta con una experiencia docente de treinta y tres años, además de tener como formación académica Ingeniero Agrónomo Zootecnista. En el mencionado diálogo, se abordaron cuestionamientos como:

- ¿En qué parcial de evaluación se presenta un mayor índice de reprobación?
- ¿Qué temas están involucrados?
- ¿Imparte el tema de sólidos de revolución? ¿Por qué?
- ¿Cómo es su metodología en el tema de sólidos de revolución?
- ¿Cómo es el desempeño de los alumnos en el tema?

A continuación, se describen los resultados obtenidos de los profesores, en el diálogo antes mencionado:

1. ¿En qué parcial de evaluación se presenta un mayor índice de reprobación?
    - Ambos profesores comentaron, que en cada evaluación hay reprobados, pero normalmente se presenta un alto índice, en temas relacionados con aplicación de la integral, lo cual corresponde a la segunda evaluación, y en algunos otros casos en técnicas de integración.

2. ¿Qué temas están involucrados?
    - La profesora mencionó que, los temas correspondientes a la segunda evaluación son, aplicaciones de las integrales en la vida diaria, integral definida y cálculo de áreas y volúmenes.
    - El profesor mencionó que los temas involucrados son, área entre curvas, integrales definidas, aplicaciones de la integral, integrales trigonométricas y cálculo de áreas y volúmenes, pero resaltó que en algunas ocasiones, no se alcanzan a ver todos los temas, por falta de tiempo.

3. ¿Imparte el tema de sólidos de revolución? ¿Por qué?
    - Ambos profesores coincidieron que no imparten el tema, y sus principales argumentos son: *"por falta de tiempo", "van a batallar con estos temas", "si no entienden lo fácil, menos esto", "mejor que trabajen en otra cosa", "en la universidad las verán mejor".*

4. ¿Cómo es su metodología en el tema de sólidos de revolución?
    - Los dos profesores mencionaron, que cuando hay tiempo, la explicación de tema se hace de manera clásica en el pizarrón.

5. ¿Cómo es el desempeño de los alumnos en el tema?
    - Ambos profesores comentaron que, el desempeño de los alumnos en la materia en general es regular, ya que se debe a dificultades que presentan con el álgebra, con la realización de gráficas, así como en derivadas y la misma integración. Además, mencionaron que hay falta de interés por parte de los alumnos, respecto a la materia.

A manera de conclusión, los comentarios de los profesores muestran que hay un gran índice de reprobación en la evaluación del contenido de sólidos, entre otros temas. Los profesores señalan que esto se debe a que los alumnos presentan dificultades para representar una función de manera gráfica, y por consecuencia, no logran visualizar la rotación de una función algebraica respecto a un eje. Además, mencionaron que algunas de las dificultades que se presentaban en su materia se debía a que los alumnos no le dan el suficiente interés a sus materias previas de matemáticas, y por consecuencia, al llegar a la materia de matemáticas V esa falta de interés se veía reflejada en su desarrollo durante la misma. Por otro lado, se analiza que no se tiene una buena explicación por parte del docente, ya que se contempla la enseñanza del tema de forma tradicional, sin contemplar recursos que puedan fortalecer en el alumno su cognición visual, que es definida como la capacidad visual que incluye la habilidad para reconocer objetos y sus diferentes transformaciones (Cavanagh, 2011).

Por otro lado, con el fin de observar el desarrollo metodológico de los profesores, se asistió a determinadas clases, dónde se puede observar que algunos profesores al momento de impartir los temas de la materia, siguen el orden de lectura del libro por parte de los alumnos, realización por parte del docente de los ejemplos marcados en el mismo, que en algunos casos, sólo es uno o dos ejercicios resueltos y por último, los ejercicios propuestos en el libro, que tienen que resolver los alumnos para verificar si están correctos o no, ya que el docente, solo pone los resultados en el pizarrón y en caso de existir alguna duda se atiende sólo de manera individual y no grupal.

Además, se puede observar que hay algunos otros profesores que siguen el mismo orden antes mencionado, pero sólo explican un único ejemplo para todas las integrales correspondientes; en este mismo caso, y a partir de las observaciones en clases, se puede analizar que los alumnos tienen un conocimiento limitado correspondiente a la materia y al momento del examen, el docente les exige a los alumnos que tengan el nivel de conocimiento suficiente que no adquirieron durante el parcial. Además, algunos profesores consideran que, con la gran diversidad de recursos tecnológicos actuales para aprender los temas de estudio en clase, el estudiante puede de forma autodidacta adquirir los conocimientos correspondientes indicando que "*ya no hay excusas para reprobar*".

CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA

A continuación expongo los diversos planteamientos de autores como Andrade y Montecino (2013), Mofolo, Engelbrecht y Harding (2013), Soto y Alanís (2014), Andrade y Montecino (2011), Lee y Han (2005) y por último, Noriega, Treviño y Coronado (2015) acerca de las dificultades presentadas al estar trabajando en el aula de clases, con el tema de cálculo integral, "sólidos de revolución" y los diversos conflictos presentados en el aula, al realizar actividades involucradas con funciones en el plano de dos dimensiones y de tres dimensiones.

Andrade y Montecino (2013) sostienen que los estudiantes presentan limitaciones al establecer los diferentes significados que toma $f(x)$ en el Cálculo Integral, restringiendo de tal manera, el traspaso del registro algebraico a uno gráfico. En dicho traspaso, los estudiantes presentan dificultad al momento de tener que generar mentalmente un sólido de revolución, el cual en este caso es en el espacio tridimensional. Andrade y Montecino (2009) sostienen que una de las causas se debe a la ausencia de un eje ***z*** "perceptible" en el plano cartesiano impreso (en libros escolares, libros de texto así como en ciertos softwares matemáticos) al hacer rotar una función respecto a un eje. Por lo tanto, al tener la ausencia del eje antes mencionado, no se consideran los cambios que suceden al aplicar el traspaso de una gráfica en dos dimensiones a una gráfica en tres dimensiones al momento de la transformación de forma escrita como de forma mental.

En cambio Mofolo, Engelbrecht y Harding (2013) afirman que gran parte de los estudiantes no son competentes en la elaboración de gráficas y en su respectiva interpretación de la región limitada por las gráficas dadas, además, sostienen que los alumnos al trabajar con problemas de aplicación de la integral definida, deben demostrar como se muestra en el cuadro 1, las siguientes capacidades: a) habilidades gráficas y la traslación entre los gráficos visuales y ecuaciones algebraicas; b) traslación entre representaciones continuas y discretas; c) traslación entre diagramas de dos dimensiones y tres dimensiones: d) habilidades de manipulación algebraica y gráfica; e) habilidades cognitivas generales. Estas capacidades están implícitas en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas, concretamente, sobre la aplicación de los sólidos de revolución.

Cuadro 1. Problemas al trabajar con la integral definida (Mofolo &. Engelbrecht & Harding, 2013) Elaboración propia.

Por su parte, Soto y Alanís (2014) sostienen que al momento de pedir a los estudiantes que calculen el área superficial de un sólido de revolución, la mayoría de las veces calculan algún otra magnitud por ejemplo, el área bajo la curva o el volumen de dicho sólido de revolución, además, mencionan que cuando los estudiantes están trabajando con el cálculo de áreas, se ponen de manifiesto dos casos: por un lado no se logra establecer la relación con la integral definida, debido a errores algebraicos que comete el estudiante ya que generalmente, el profesor da por hecho que el estudiante tiene los conocimientos suficientes y habilidades algebraicas requeridas, para cursar la materia de Cálculo II. Por otro lado, los estudiantes establecen la relación con la integral definida a partir de un acercamiento mediante la representación física en 3D del sólido de revolución del que se pide calcular su área abordando éste exitosamente y llegando a la respuesta correcta.

Se puede observar que los autores antes citados, coinciden en que los estudiantes manifiestan complicaciones al trabajar en clase con el tema de sólidos de revolución, dichas complicaciones están relacionadas con hacer el cambio de transformación de una función en dos dimensiones a una función que se encuentra en rotación respecto a un eje, formando el eje tridimensional, a lo que los autores llaman cambio de registro algebraico a uno gráfico, esto es debido a que no se ha logrado, la madurez suficiente para la aprehensión de los cambios planteados en los sólidos de revolución, lo cual corresponde a la cognición visual del alumno, definida como la capacidad visual, que incluye la habilidad de reconocer objetos y sus distintas transformaciones (Cavanagh, 2011).

Por su parte, Soto y Alanís (2014) conciben que los estudiantes tienen errores algebraicos al momento de realizar la gráfica de una función y a su vez encontrar la relación con la integral definida, ya que los profesores dan por hecho que ya tienen los conocimientos requeridos para poder cursar la materia de cálculo ll y como consecuencia los alumnos no pueden encontrar la relación existente con la integral definida y, por lo tanto, no consideran correctamente tampoco desde el punto de vista algebraico lo que representa el sólido de revolución.

Por otro lado, Andrade y Montecino (2011) afirman que los estudiantes tienen grandes dificultades en actividades que involucran lo tridimensional debido a que no se formaliza esta herramienta durante la enseñanza escolar, obstaculizando la comprensión de ésta, especialmente, en situaciones de problemas en los que tienen que recurrir a la visualización espacial para dar solución a un problema, por ejemplo, el cálculo de áreas y volúmenes a partir de sus representaciones en el plano, ya que, normalmente se presentan en el plano tridimensional. Además, mencionan que se debe a que no se profundiza en las representaciones bidimensionales de cuerpos tridimensionales, (cambio de una función en 2D a una función en 3D) motivo por el cual, cuando los estudiantes están trabajando con este tipo de actividades, la herramienta tridimensional surge después de agotar todas las posibles soluciones en el plano uni y bidimensional.

En cambio, Lee y Han (2005) mencionan que al estar trabajando con el tema de sólidos de revolución, es necesario considerar la vida cotidiana, convertir los dibujos de funciones algebraicas en 2 dimensiones a modelos sólidos en 3 dimensiones, ya que pueden superar las limitaciones de los dibujos en dos dimensiones y, por lo tanto, ser más observable cada una de las características de un sólido de revolución y así evitar conflictos con el cálculo de volúmenes o de áreas en esta dimensión; Además, mencionan que haciendo el cambio de dimensión, se puede interactuar con el mismo sólido y así encontrar un método adecuado para poder encontrar su volumen.

Por su parte Noriega, Treviño y Coronado (2015) sostienen que las diversas dificultades que presentan en los estudiantes al realizar actividades que involucren un cambio de registro entre los distintos tipos de representaciones semióticas, pueden provocar en el alumno obstáculos epistemológicos, al cambiar de dimensiones del plano bidimensional al plano tridimensional, lo que se relaciona directamente con el cálculo del volumen de un sólido de revolución. Además, mencionan que como seres humanos, los estudiantes que presentan esta obstaculización en el desarrollo del cálculo de volúmenes y áreas, están limitados a visualizar la abstracción de la matemática en dos dimensiones, lo cual es muy diferente a la realidad, ya que en la vida cotidiana la gran mayoría de los objetos son tridimensionales. Por otra parte, mencionan –apoyándose en Van Hiele (2013, tomado de Fouz, 2005) – que los estudiantes pasan por la existencia de cinco niveles de pensamiento que están netamente vinculados con el desarrollo de conocimientos geométricos, 1) nivel de reconocimiento o visualización; 2) nivel de análisis; 3) nivel de orden o deducción informal; 4) nivel de deducción formal y 5) nivel de rigor, considerando que en cada uno de los niveles antes mencionados se presenta la dificultad de los estudiantes al abordar el tema de sólidos de revolución.

Los autores antes mencionados coinciden en que al trabajar en el tema de sólidos de revolución, los alumnos tienen dificultades ya sea por la escasez de visualización espacial o por la obstaculización del desarrollo del cálculo de volúmenes y áreas. Sin embargo, cabe mencionar que Andrade y Montecino (2011) afirman que los estudiantes tienen grandes dificultades en actividades que involucren lo tridimensional debido a que no se da una formalización adecuada durante la enseñanza escolar, lo cual trae como consecuencia, la obstaculización de trabajar con funciones en un espacio tridimensional, y con un tercer eje de referencia. En cambio, Lee y Han (2005) sostienen, que debe tenerse un dominio del eje tridimensional, ya que, en la cotidianidad la gran mayoría de los objetos son representados de forma tridimensional, y que al tener un mayor dominio de esto, al trabajar con los sólidos de revolución, se podrán encontrar las principales características que lo definen. Noriega, Treviño y Coronado (2015) afirman, que los estudiantes presentan dificultades al realizar actividades que involucren un cambio de registro entre los distintos tipos de representaciones semióticas, ya que esto, traerá como consecuencia, que los estudiantes presenten obstáculos epistemológicos para hacer el cambio del plano de dos dimensiones al espacio tridimensional.

Hasta este momento se han citado a los autores que afirman que los estudiantes tienen conflictos que les dificulta el cálculo de áreas y volúmenes dentro de los sólidos de revolución. Podemos ver que cada uno desde sus respectivos trabajos, observan que los estudiantes al enfrentarse a situaciones que involucren el usar como herramienta el eje ***Z***, que es el eje tridimensional, tienen diversos conflictos, ya que durante la enseñanza de las matemáticas en cursos anteriores, posiblemente no se enseñó a representar gráficamente mediante alguna metodología específica y por consecuencia, los profesores daban por hecho que los alumnos ya conocían este aspecto, motivo por el cual, los autores coinciden que al no tener conocimientos previos o la suficiente habilidad de cómo transformar una función en el plano 2D, se presentan dificultades al trabajar con el cálculo de áreas o volúmenes en el eje tridimensional.

De acuerdo a los aspectos anteriores y las perspectivas de cada uno de los autores, Mofolo, Engelbrecht y Harding (2013) concuerdan que los alumnos, presentan conflictos al resolver problemas en el cual pongan en juego la visualización espacial, ya que puede que el estudiante no sepa cómo representarlos gráficamente, debido a una enseñanza limitada en cursos previos a cálculo II, a errores algebraicos o, algo muy común, la falta de explicación por parte de los docentes en hacer una comparación entre las metodologías de representación de funciones en dos dimensiones y su significado correspondiente en tres dimensiones, como lo es el caso de los sólidos de revolución. Resulta además de suma importancia, que al trabajar, con estos cuerpos matemáticos se tenga que exponer la relación de éstos, con elementos de la vida cotidiana ya que gran parte de los objetos con los que interactuamos diariamente, están en el plano tridimensional. Visto de otra manera, todo tiene volumen y quizás, al hacer presente dicha relación en la explicación del tema, los alumnos pueden tener una mejor perspectiva del mismo.

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

En este capítulo, se presenta en un primer momento la manera en que se aborda el tema de sólidos de revolución en los libros de texto que se emplean en el nivel medio superior, se toma como ejemplo el tratamiento que realiza de dicho tema el libro de Swokowski (1989). Enseguida, se describe la perspectiva de teorías desarrolladas en la matemática educativa, comenzando con la ingeniería didáctica (Artigue, 1989) haciendo énfasis en las cuatro fases que la conforman durante una experimentación. Posteriormente se reseña la Teoría de las Representaciones Semióticas (Duval ,1989) describiendo los distintos tipos de registro; y por último se describe la Teoría de la Transposición Didáctica de Chevallard (1998), desarrollando los tres tipos de saberes.

3.1 Sólidos de revolución

En este apartado se presenta desde el punto de la matemática escolar qué son los sólidos de revolución, así como, cada uno de los elementos requeridos y los procesos involucrados dentro del mismo, como se muestra en el cuadro 2. Para poder formar un sólido de revolución, se definen los conceptos de: a) función, b) plano cartesiano, c) cuerpo geométrico, d) superficie de revolución, e) volumen, f) integral definida, e) intervalo, f) área y volumen, para un sólido de revolución.

Cuadro 2. Elementos y procesos involucrados para formar un sólido de revolución. Elaboración propia.

Swokowski (1989) define un sólido de revolución, como el cuerpo geométrico sólido que se genera al girar una región R de un plano alrededor de una recta l donde esta recta l, es el eje respectivo sobre el que gira dicha región; por superficie de revolución, se denomina a la superficie que se genera cuando se hace girar la curva que representa la gráfica de la función respecto a un eje del plano cartesiano. Dentro de los conceptos que se relacionan con el sólido de revolución, se encuentra el concepto de función, que se define por f de un conjunto D (dominio) a un conjunto E (contradominio), como una correspondencia que asigna a cada elemento x del dominio un elemento único y del contradominio. También se encuentra el concepto de plano cartesiano, al que se conoce, como dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal, conocida como el eje de las X o el eje de las abscisas y por una recta vertical, conocida como el eje de las Y o el eje de las ordenadas. Usando estos ejes, se puede describir cualquier punto en el plano bidimensional usando una pareja ordenada de números (x, y) y cubriendo por completo el espacio $\mathbb{R}^2$.

Enseguida está el área, nombre por el cual se le conoce a la cantidad de superficie de una figura plana. Por otro lado, se denomina cuerpo geométrico, a una figura tridimensional que posee de un ancho, largo y una altura, la cual ocupa cierto lugar en el espacio y por consecuencia, genera un volumen y éste se define como una región del espacio euclídeo, que es la cantidad de espacio tridimensional ocupada por un cuerpo geométrico. Todos y cada uno de los conceptos mencionados previamente son necesarios para poder comprender cómo se genera un sólido de revolución.

Ahora bien, los conceptos matemáticos involucrados en el proceso para calcular el volumen de un sólido de revolución, comienzan con el concepto de intervalo, el cual, desde el punto de vista de la matemática escolar, se define como el conjunto de números reales comprendidos entre otros dos números "a" y "b" que se llaman extremos del intervalo.

Ya dentro del ámbito del cálculo, se encuentra el concepto de integral definida, donde según Stewart (2008) la define como la construcción a partir de una función f continua definida para $a \leq x \leq b$ dividida en el intervalo [a, b] en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b-a)/n$. Haciendo que $x_0(=a), x_1, x_2, ..., x_n(=b)$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y eligiendo $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ como los puntos muestras de estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el *i-ésimo* subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la integral definida de f, desde a hasta b es:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_1^*)\Delta x$$

Que en otras palabras y tomando como referencia, el teorema fundamental del Cálculo, la definición anterior la describe como:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Considerando en esta expresión F es una antiderivada de f, es decir, una función tal que $F' = f$. Al trabajar con una integral definida se obtiene un área bajo una curva de f que es generada en el plano bidimensional, pero si esta función está en rotación respecto a un eje, esta área deja de estar en el plano y se interpreta como un volumen generado en el espacio tridimensional.

Para generar el volumen de un sólido de revolución se considera una función $f(x)$ continua en $[a,b]$ y R la región acotada por la gráfica de $f(x)$, entonces el volumen V del sólido de revolución generado al girar R alrededor del eje X es:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\left[f(x)\right]^2 \Delta x = \int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$$

Mejor conocido por el "método de discos" ya que al hacer cortes verticales en el sólido generado, se obtienen rebanadas que forman cilindros circulares o discos como se observa en la siguiente imagen:

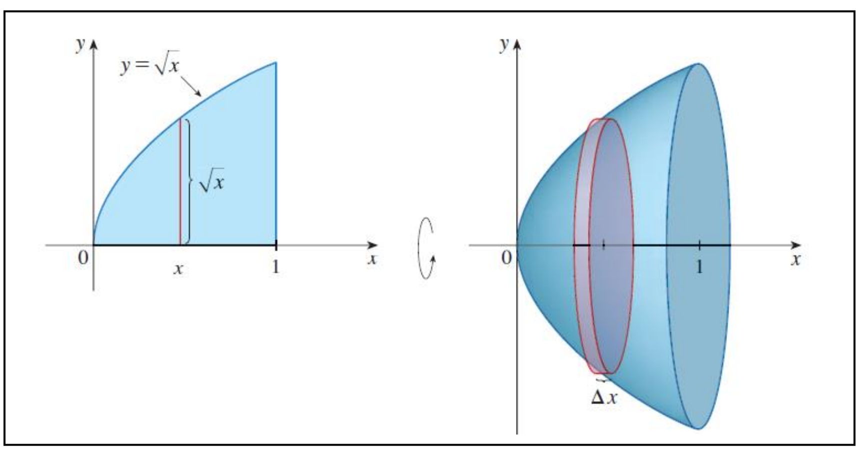


Imagen 1. Rotación de la función $f(x) = \sqrt{x}$ respecto al eje de las abscisas, generando un disco. Tomado de (Stewart, 2011, pág. 425)

En el caso de considerar dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continúas en $[a,b]$ y R la región acotada entre ambas funciones, entonces el volumen V del sólido de revolución generado al girar R alrededor del eje X es:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx - \int_a^b \pi [g(x)]^2 \, dx$$

Lo cual, en otras palabras significa determinar el volumen de un sólido de revolución a partir de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, que son interpretadas como el radio (externo e interno) de la rondana o arandela obtenida a partir de la rotación como se muestra a continuación:

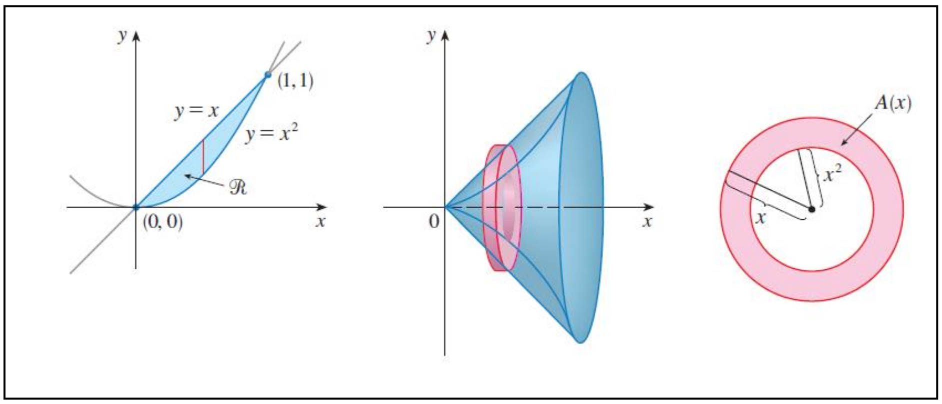


Imagen 2. Rotación de la función $f(x) = x$ y la función $g(x) = x^2$ respecto al eje de las abscisas, generando una arandela. Tomado de (Stewart, 2011, pág. 426)

Por tanto, para determinar el volumen de un sólido de revolución por el método de arandelas es:

$$V = \pi \int_a^b \left[(\text{radio exterior})^2 - (\text{radio interior})^2 \right] \text{dx}$$

3.2 Análisis de teorías desarrolladas en la matemática educativa

En este segundo apartado, se aborda la perspectiva de teorías desarrolladas en el campo de la matemática educativa, iniciando con la Ingeniería didáctica de Artigue (1989), describiendo las fases de ésta durante una experimentación; posteriormente, se describe la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval (1999), donde se presentan los distintos tipos de registros de una representación semiótica; y por último, se aborda la Teoría de la Transposición Didáctica de Chevallard (1998) describiendo los tres saberes involucrados dentro del triángulo pedagógico.

3.2.1 Ingeniería Didáctica

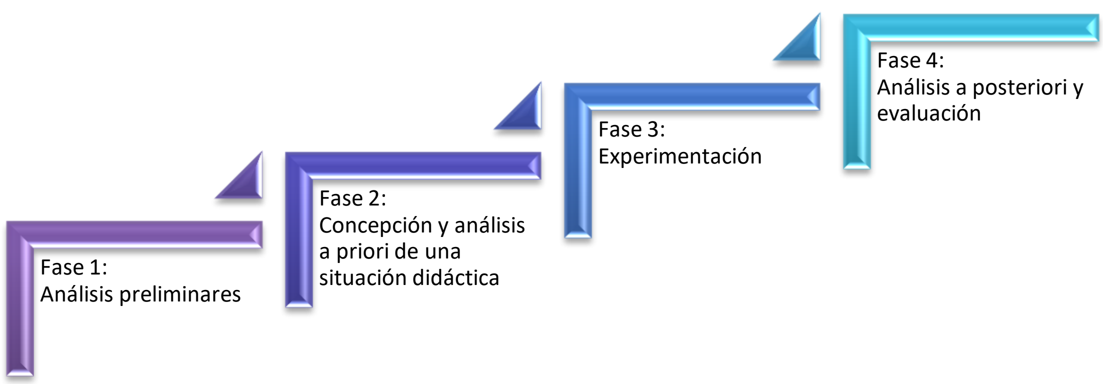
El sustento teórico del término *ingeniería didáctica* proviene de dos teorías de gran importancia, la primera es la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1997) y la segunda es la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), dado que ambas tienen una visión sistémica al considerar a la didáctica de las matemáticas, como el estudio de las interacciones entre tres elementos que son, el saber, el sistema educativo y los alumnos. Por tal motivo, la ingeniería didáctica surge en la didáctica de la matemática. El término en cuestión, estableció una relación entre una forma característica de trabajo didáctico y el trabajo de un ingeniero, el cual, se basa en los conocimientos científicos de su dominio para realizar un trabajo determinado y acepta someterse a un control de tipo específico. La ingeniería didáctica, se utiliza en la matemática educativa con una doble función: I) como metodología de investigación y II) como productora de situaciones de enseñanza y aprendizaje.

La ingeniería didáctica como metodología de investigación, se basa en un esquema de procesos experimentales sobre la concepción, observación, realización y análisis de las secuencias de enseñanza, donde se distinguen dos niveles i) micro-ingeniería y ii) macro-ingeniería; por otro lado, la primera se caracteriza por ser un tipo de investigación que tiene como objeto el estudio de un tema en específico, además es un tipo de investigación local y se toman en cuenta principalmente la complejidad de los fenómenos en el aula durante la enseñanza y el aprendizaje.

La macro-ingeniería, permite componer la complejidad de las investigaciones de micro-ingeniería con las de los fenómenos asociados a la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. Este tipo de metodología de investigación permite hacer comparaciones entre dos grupos (grupo experimental y grupo de control) basados en la experimentación en clase, donde después de obtener resultados se hacen confrontaciones entre los análisis a priori y a posteriori.

La metodología de la ingeniería didáctica se lleva a cabo en un proceso de cuatro fases como se muestra en el cuadro 3, las antes mencionadas están conformadas por: I) el análisis preliminar, II) la concepción y el análisis a priori de una situación didáctica, III) la experimentación, y IV) el análisis a posteriori y la evaluación.

La primera fase es considerada por el análisis epistemológico del tema de estudio, así como el análisis metodológico que es presentado durante la enseñanza del cálculo integral. Además, se analizan las pre-concepciones de los estudiantes, las dificultades y obstáculos que determinen su desarrollo en un determinado tema (conocimientos previos) por medio de un pre-test. la segunda fase, es donde el investigador verifica el tipo de variables que van a ser pertinentes con la relación del problema que se quiere estudiar; en la tercera fase, el investigador pone a prueba la situación didáctica que estudia con el grupo experimental, mientras que con el grupo piloto se aplica "lo tradicional", ya que el fin de esta fase es, hacer una prueba experimental y de ahí obtener conclusiones; la cuarta y última fase, es la recolección de los datos que se obtuvieron durante la experimentación para posteriormente hacer un análisis de estos datos y una comparación entre ambos grupos.



Cuadro 3. Fases de la ingeniería didáctica. Elaboración propia.

3.2.3 Teoría de las Representaciones Semióticas

Las actividades relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas involucran diversos aspectos cognitivos al momento de resolver un problema determinado, como la conceptualización, el razonamiento y la comprensión. Para poder expresar algún resultado distinto al lenguaje natural, resulta necesaria la utilización de algún tipo de representación como: dar una definición, efectuar cálculos algebraicos, o registros no discursivos por medio de sistemas de referencia (e.g., coordenadas), etcétera. Según Duval (2006, tomado de Ramírez, 2016) la representación, es parte de las funciones cognitivas del ser humano y, en el caso de las representaciones que activan los procesos matemáticos, las denomina como representaciones semióticas, es decir, ideas o imágenes construidas mentalmente a partir de algún lenguaje. Por otra parte las representaciones semióticas no deben confundirse con las representaciones mentales es decir con el conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener acerca de un objeto, una situación o lo asociado al mismo, así mismo las representaciones semióticas son importantes para los fines de comunicación, así como para un mejor desarrollo de la actividad matemática (Duval 2004, tomado de Oviedo, 2012).

Duval (2006, tomado de Ramírez, 2016) menciona que los registros utilizados en la actividad matemática son: a) el lenguaje natural o discursivo (oral o escrito), b) el simbólico (numérico y algebraico), c) el visual (gráfico e icónico) y d) transicional.

El primer registro se relaciona con todo lo que esta propuesto como teoría de las matemáticas, incluyendo las definiciones formales de la misma, así como los problemas que se pueden interpretar mediante oraciones o expresiones para plantear diversos problemas.

El segundo registro es utilizado cuando el objeto matemático se puede representar en una matemática abstracta, cuando se operan y representan en cantidades numéricas o algébricas.

Dentro del registro icónico entran las imágenes que se pueden obtener del objeto matemático, o con las que se puede comprender el mismo objeto. Y así mismo, el registro gráfico, tiene que ver con las formas de presentar el objeto matemático mediante gráficas, plano cartesiano o mapas.

Tomando en cuenta lo anterior, entran en juego las representaciones semióticas no sólo con el fin de comunicación, sino también para desarrollar actividades en matemáticas que permitan modificar el funcionamiento cognitivo que se requiere para comprender algún concepto, este proceso requiere de una representación diferente a la del lenguaje natural, ya sea algebraico, geométrico, gráfico, simbólico, tabular, esquemático, que toman el estatus de lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar las relaciones y las operaciones (Duval, 1999, tomado de Ospina, 2012); por lo cual, Duval (2011) plantea la existencia de tres elementos a los que llama polos, que las representaciones deben integrar para construir la relación cognitiva de acceso a los objetos estudiados: i) el objeto representado, ii) la representación particular que presenta el objeto y iii) la forma de la representación (sea su modalidad o su registro).

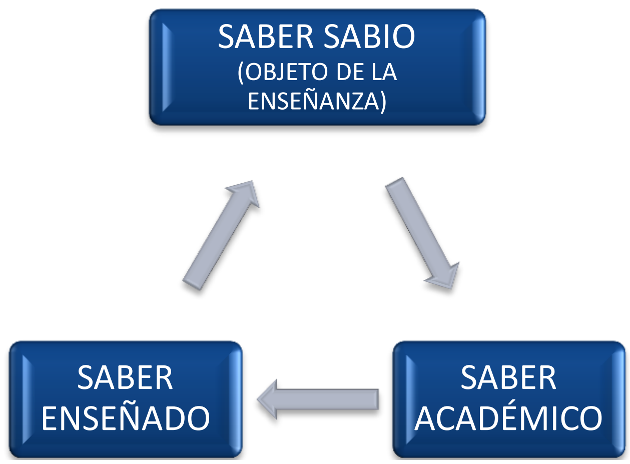
De acuerdo a la teoría de las representaciones semióticas un alumno puede realizar distintas transformaciones para poder generar la construcción del conocimiento matemático, las cuales pueden ser de dos tipos: I) tratamiento y II) conversión. El primer tipo se caracteriza por hacer la transformación dentro del mismo registro semiótico y la segunda se caracteriza por hacer una transformación entre dos registros totalmente diferentes. Para esta tesis se emplearon ambas transformaciones (tratamiento y conversión) de esta teoría de las representaciones semióticas. Primero, interpretando un problema que requiriese la integral definida, para poder calcular el volumen generado por la gráfica de una función que rota respecto a un eje determinado, donde se considera el proceso cognitivo de los alumnos para representar la gráfica de una función algebraica, haciendo el cambio de lenguaje algebraico a una representación gráfica, y posteriormente, realizando el cambio de registro de la función algebraica que se encuentra en dos dimensiones a un registro gráfico en tres dimensiones como se muestra en el siguiente cuadro:

Cuadro 4. Proceso involucrado en la determinación de un sólido de revolución. Elaboración propia.

3.2.4 Transposición Didáctica

En los años ochenta, junto con el surgimiento de la ingeniería didáctica, se empezó a trabajar con la relación didáctica docente-alumno y enseñante-enseñado para poder dar paso a la entrada de un tercer elemento que es el saber, lo cual constituye el sistema didáctico docente-alumno-saber cuyo objetivo inicial es clarificar y explicar los múltiples problemas que se presentan en la enseñanza de las matemáticas. Autores como Chevallard (1985) y Brousseau (1999) trabajaron con la transposición didáctica del objeto matemático que constituye el núcleo de los diversos problemas presentados en la enseñanza de la misma.

El sistema didáctico antes mencionado es presentado normalmente en el proceso educativo donde se pueden diferenciar tres saberes; el primer saber, es el saber sabio; el segundo es el saber del académico o profesor y, por último, está el saber a ser enseñado, los cuales son presentados en el siguiente esquema:



Cuadro 5. Triángulo Didáctico. Elaboración propia

El triángulo mostrado previamente, es con el que Chevallard (1997) ayuda a visualizar la problemática en la que se entrecruzan cuestiones de diverso orden en un proceso que se retroalimenta a un contexto institucional y social. El primer saber (sabio), dentro del ámbito matemático, se refiere al que desarrollan los matemáticos, en otras palabras los que hacen matemática, el cual se divulga a través de libros especializados, artículos de revistas especializadas, entre otros. El segundo saber (académico), se refiere a la interpretación del profesor acerca del saber sabio y cómo poder enseñarlo para posteriormente aplicarlo en el aula. Por último, el tercer saber (enseñado) se refiere, a la representación que el alumno hace del objeto matemático o en otras palabras como menciona Chevallard (1997) "es el saber tal y como es enseñado".

Por otro lado, Chevallard (1991) retoma la noción de vigilancia epistemológica (propuesta por Bourdieu, 1975) como el control de la distancia entre el objeto de conocimiento y el objeto de enseñanza; esta distancia está determinada por las transformaciones que el saber sabio sufre a los efectos de ser comprendido por un sujeto o un determinado grupo de aprendizaje como ocurre en el aula de clases.

Para esta tesis, se tomó el triángulo didáctico trabajando específicamente los tres saberes presentados (a excepción de la transformación del saber enseñado al saber sabio, debido que esta investigación se enfoca al nivel medio superior, en el que no es posible dicha transformación, dado que este proceso está inmerso en el ámbito de la propia investigación matemática) con el fin de observar cómo entran en juego al momento de la enseñanza del tema de sólidos de revolución y examinar las características que se encuentran inmersas dentro del proceso de enseñanza, como por ejemplo, la transformación del saber sabio al saber académico, en la interpretación que tiene el profesor acerca del tópico de estudio y por otro lado, la transformación del saber académico al saber enseñado, específicamente en la interpretación y desarrollo del tema de estudio por parte de los alumnos.

Por otro lado, el término de vigilancia epistemológica, que permite la creación del saber académico, lo cual, se refiere a la práctica regular que se produce dentro de un proceso de investigación con el fin de vencer los obstáculos epistemológicos en pos lograr rupturas que persigan la construcción, conquista y comprobación del hecho científico u objeto (Doulián, 2010).

Con todo lo anterior, queda establecida la relación de los elementos requeridos y los procesos involucrados en el tema de sólidos de revolución, tales como llegar a la construcción de un sólido de revolución y posteriormente, cómo es que los conceptos de superficie de revolución, función, plano cartesiano, cuerpo geométrico, volumen, integral definida, intervalo y área, son necesarios para poder desarrollar matemáticamente, los procedimientos requeridos para resolver el problema de estudio.

Así mismo quedan descritas las tres teorías a aplicar, la ingeniería didáctica de Artigue (1995), la teoría de las representaciones semióticas (Duval, 1999) y, por último, poner en juego la transposición didáctica, específicamente el triángulo didáctico (Chevallard, 1998).

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA

En este capítulo, se describe la metodología a emplear y posteriormente, en el segundo apartado se desarrolla detalladamente el diseño de investigación para este trabajo.

4.1 Tipo de Investigación

El tipo de metodología que caracteriza este trabajo de tesis es de tipo mixto, ya que se contempla la investigación cualitativa, la cual, según Denzin y Lincoln (2000) es caracterizada por ser una actividad que sitúa al observador en el mundo y consiste en una serie de prácticas interpretativas que hacen el mundo visible. Dichas prácticas, son plasmadas en una serie de representaciones textuales que son interpretados y representados por el investigador, a partir de los datos recolectados en el campo, mediante observaciones, entrevistas, conversaciones, fotografías, análisis de documentos, entre otros.

Y la investigación cuantitativa, que según Briones (1996) la define, como una actividad que utiliza información cuantificable para describir o tratar de explicar los fenómenos que son estudiados. Una de las principales clasificaciones de este tipo de investigación es brindarle la posibilidad al investigador para controlar la variable independiente y otras situaciones del estudio como conformar de manera independiente el grupo o los grupos que serán objetos de su estudio. Considerando lo antes mencionado, se derivan los siguientes tipos de investigaciones: a) experimentales, b) cuasiexperimentales y c) no experimentales, como se muestra en el siguiente cuadro:

Cuadro 6. Tipos de Investigaciones cuantitativas para controlar una variable independiente. Briones (1996). Elaboración propia.

En el primer tipo de investigación, el investigador tiene el control de la variable independiente, la cual puede variar en la forma que sea más apropiada a los objetivos del investigador. Las principales características de este tipo de investigación es que ésta debe realizarse en la misma escuela o ambiente, con sujetos de estudios que son asignados aleatoriamente. Se pretende generalizar los resultados de una muestra de alumnos, profesores, entre otros; utilizarse diversos contextos educacionales; considerar las conductas, opiniones y comentarios de las personas sometidas al estudio. Este tipo de investigación tiene como primordial enfoque, diseñar un grupo experimental, un grupo control y mediciones "antes y después" en ambos grupos de estudio que son aplicados de la siguiente forma:

1. En ambos grupos se aplica la medición "antes" (pre-test) que se enfoca en la variable dependiente del cual se desea determinar el efecto de la variable independiente.
2. Se aplica la variable o variables independientes sólo en el grupo experimental.
3. Se hacen las mediciones "después" (post-test) en ambos grupos.
4. Y por último, se hacen las comparaciones en ambos grupos respecto a las mediciones pre-test y post-test.

Las investigaciones cuasiexperimentales, son aquellas en las cuales no se ha podido utilizar la aleatoriedad para la selección de los grupos. En este tipo de investigación se trabaja, con dos principales diseños: a) diseño con un grupo de control no equivalente y b) diseño de series cronológicas.

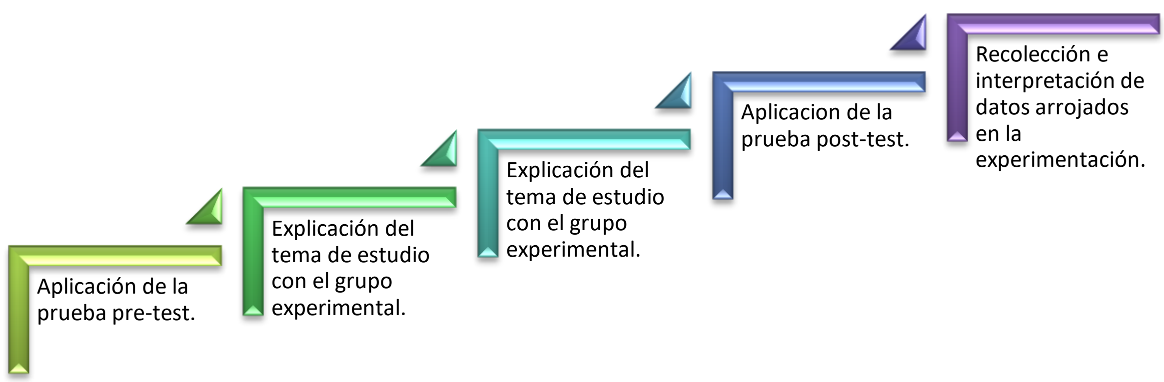
En el primer tipo de diseño, se trabaja con un grupo experimental que es conformado por sujetos que han sido sometidos a una intervención social y con un grupo de control no equivalente, el cual es conformado por sujetos que tengan características muy semejantes a los sujetos del grupo experimental.

El segundo diseño consiste en una serie de mediciones periódicas que se hacen en las personas de estudio, antes y después que se ha introducido la variable experimental. La principal característica de este diseño es que no se requiere de un grupo de control.

Las investigaciones no experimentales, según Briones (1996) son aquellas en las cuales el investigador no tiene control sobre la variable independiente y tampoco conforma a los grupos de estudio. Además, en este tipo de investigaciones, la variable independiente ya ha ocurrido cuando el investigador realiza el estudio, en otras palabras, ha ocurrido un cierto fenómeno que es tomado como variable independiente para un estudio en el cual el investigador desea describir dicha variable, así como, los efectos que provoca sobre otro fenómeno, que es la variable dependiente.

Tomando en cuenta lo antes mencionado, para este trabajo de investigación se utiliza la investigación mixta, la cual Johnson y Onwuegbuzie (2004, tomado de Pereira, 2011) la definen, como el tipo de estudio donde el investigador mezcla o combina técnicas de investigación, métodos, enfoques, conceptos, lenguaje cuantitativo o cualitativo en un solo estudio.

El tipo de metodología que caracteriza este trabajo de tesis, es de tipo mixto, ya que se trabaja con un método experimental, el cual, como se muestra en el cuadro 7, consiste en las siguientes etapas: a) aplicación de la prueba pre-test para ambos grupos, b) explicación del tema de sólidos de revolución con el grupo experimental, el cual se caracteriza por tener una explicación del tema de sólidos de revolución con el empleo de un recurso graficador, c) explicación del tópico de estudio con el grupo tradicional, donde se carece del recurso graficador, y por último, d) la aplicación de la prueba post-test en ambos grupos, para proceder a la recolección de datos y realizar el análisis e interpretación de los mismos.



Cuadro 7. Etapas del proceso experimental en esta investigación. Elaboración propia.

4.2 Diseño de investigación

La parte metodológica del proyecto de investigación, se llevó a cabo en la institución Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No. 131, ubicado en San Luis Potosí, S.L.P. donde se ofrecen, en los turnos matutino y vespertino, las especialidades de: a) Contabilidad, b) Programación, c) Trabajo social, d) Mantenimiento automotriz, e) Construcción, f) Producción industrial de alimentos y g) Administración de recursos humanos, siendo en su gran mayoría de alta demanda estudiantil.

En la institución se cuenta en promedio con una población estudiantil de 40 alumnos por grupo. En cada aula de clases se cuenta con: a) proyector o cañón y b) pantalla de proyección, por otro lado, la institución cuenta con un aula exclusiva para matemáticas, la cual cuenta con a) 15 computadoras en promedio, que cuentan con: acceso a internet que les permite ingresar a la plataforma Khan Academy (ejercicios en línea) y al software Geogebra entre otros; b) materiales interactivos y relacionados con el área matemática, tales como, rompecabezas matemáticos, juegos de mesa, tangram, figuras de Origami, maquetas de secciones cónicas a partir de los cortes generados en un cono, entre otros; y c) un pizarrón con sus respectivos marcadores, además la institución cuenta con: a) 5 aulas de computación, b) una biblioteca, c) un auditorio, y d) un taller exclusivamente para cada especialidad que ofrece la institución. En la mencionada institución, se realizó un diálogo como se muestra en el capítulo 1, con dos de los profesores encargados de impartir la materia de Cálculo Integral, dicho diálogo trató acerca de los contenidos temáticos, metodologías de enseñanza, desarrollo académico de los alumnos, entre otros, con el fin de dar inicio a la problemática relacionada con la enseñanza de los sólidos de revolución.

Para afrontar la problemática mencionada, se diseñó un proceso experimental, el cual consistió en utilizar una metodología específica de la matemática educativa: la ingeniería didáctica (Artigue, 1985) para la enseñanza del tema de sólidos de revolución, en dos grupos de alumnos del CBTIS No. 131 que cursan la materia de matemáticas V, equivalente a cálculo integral, donde debe abordarse el tema de interés. El primer grupo fue conformado por 37 alumnos pertenecientes a la especialidad de Servicio Social, el cual fue etiquetado como grupo tradicional, al tener la impartición del tópico de estudio, basándose en la enseñanza de forma tradicional. El segundo grupo estuvo conformado por 40 alumnos pertenecientes de la especialidad de Producción Industrial de Alimentos, el cual conformó el grupo experimental. Cabe mencionar que la implementación metodológica de los profesores respecto a la enseñanza temática de las matemáticas, es la misma para todas las especialidades ofrecidas en la institución desde primer hasta sexto semestre. En este caso, los grupos experimental y tradicional tienen el mismo profesor en la materia de Cálculo integral. Por otro lado, y respecto a la conformación de los alumnos para cada especialidad, cabe resaltar que los alumnos en un principio, tienen la posibilidad de escoger la especialidad de su preferencia y en caso de no ser seleccionados en la especialidad de su elección, la institución les da la posibilidad de elegir otras dos opciones, dentro del cual se deja a criterio de cupo por cada especialidad, así que la única diferencia existente entre las diferentes especialidades, son las materias correspondientes a cada una de las especialidades ofrecidas por la institución. Además, cabe destacar que en las distintas especialidades, hay alumnos que fueron seleccionados en alguna de las opciones que consideraron más no en la de su preferencia.

En la mencionada metodología se abordaron cuatro principales fases o etapas: a) Análisis preliminar, b) Concepción y análisis a priori de una situación didáctica, c) Experimentación y d) Análisis a posteriori y la evaluación, tal como se muestra en el siguiente cuadro:

Análisis preliminares	Concepción y análisis a priori	Experimentación	Análisis a posteriori y evaluación
•Análisis de las concepciones de los alumnos en el tema de sólidos de revolución y sus habilidades en ejercicios tridimensionales. •Análisis metodológico en la enseñanza de cálculo integral.	•Diseño de la secuencia didáctica para la enseñanza del tema sólidos de revolución, considerando la enseñanza tradicional vs. la enseñanza experimental.	•Interacción del alumno con el recurso graficador Geogebra (grupo experimental) •Interacción con objetos tridimensionales (grupo experimental) •Construcción de la fórmula de sólidos de revolución	•Recolección de datos. •Confrontación de análisis apriori y a posteriori.

Cuadro 8. Adaptación de las fases de la ingeniería didáctica con énfasis al trabajo realizado en esta tesis. Tomado de (Martínez, 2016, pág. 24)

4.2.1 Análisis preliminar

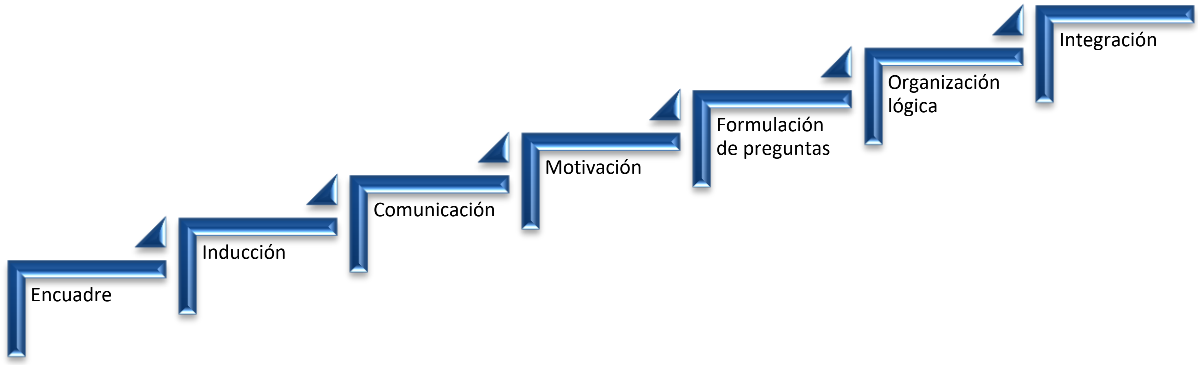
En la primera fase *análisis preliminar,* fue necesario realizar un diagnóstico relacionado con el tema de estudio a manera de pre-test (Artigue, 1995). Estos análisis pueden verse principalmente en:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización de la ingeniería didáctica.

En el mencionado pre-test, se realizó un análisis (en págs. 49 - 55) acerca de las concepciones que tienen los estudiantes en el tema de sólidos de revolución, así como, las habilidades que posee el alumno en ejercicios relacionados con el espacio tridimensional. Para abordar este eje, se recurrió al Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA, 2016) que respecto a la evaluación del área de matemáticas, explora el dominio de un determinado número de aprendizajes clave que dan cuenta de la capacidad de los alumnos para emplear y transformar los aprendizajes matemáticos como herramientas que les permitan interpretar, comprender, analizar, evaluar y dar solución a diferentes problemas. PLANEA (2016) midió como se muestra en el cuadro 9, ejes temáticos como: a) Cantidad, b) Espacio y forma y c) Cambios y relaciones; dentro de los cuales se analizó y se procuró poner ejercicios relacionados con ciertos conocimientos previos al tema de estudio, tales temas fueron: a) sumas, b) visualización de figuras, c) simetría, d) espacio tridimensional, e) rotación, f) volumen, g) expresiones algebraicas, h) sucesiones, i) cortes en una figura y j) geometría.

Cuadro 9. Ejes temáticos de PLANEA (2016). Elaboración propia.

En cuanto al análisis de la enseñanza, se observaron las clases del profesor titular que imparte la materia en los grupos seleccionados, con el objetivo de identificar cuál es la metodología utilizada al momento de la explicación del tema, en dichas observaciones, se hizo uso de una lista de observación, la cual está enfocada a las habilidades primordiales de un profesor durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, tal como se muestra en el cuadro 10. Dichas habilidades, están conformadas por: a) Encuadre, b) Inducción, c) Comunicación, d) Motivación, e) Formulación de preguntas, f) Organización lógica y g) Integración.



Cuadro 10. Habilidades Docentes (Campos ,2005). Elaboración Propia.

Para identificar y analizar la metodología utilizada por el profesor en clase, se utilizó el siguiente formato:

Lista de observación metodológica					
Características para evaluación					
Nombre del profesor:					
Niveles para Evaluación					
4. Excelente	3. Bien	2. Regular	1. Deficiente		
HABILIDAD		4	3	2	1
ENCUADRE	Realiza un encuadre completo y comprensible.				
INDUCCIÓN	La inducción es motivante.				
	La inducción se relaciona con el tema.				
COMUNICACIÓN	Utiliza lenguaje comprensible hacia al alumno.				
	Se expresa con claridad en clase.				
	Usa muletillas al exponer el tema.				
	Habla con fluidez al exponer el tema.				
	Utiliza diversos tonos de voz.				
	Hace pausas convenientes durante la clase.				
	Hace contacto visual con los alumnos.				
	Utiliza lenguaje corporal.				
	Se relaciona equitativamente con los alumnos.				
MOTIVACIÓN	Utiliza diversos materiales para mantener atención grupal.				
	Utiliza reforzadores verbales.				
	Promueve la participación individual y/o grupal.				
ORGANIZACIÓN LÓGICA	Presenta el material en forma clara y ordenada.				
	Presenta el tema completo.				
INTEGRACIÓN	Realiza una actividad para una integración del tema.				
	Hace un cierre con claridad del tema.				

Cuadro 11. Formato de habilidades docentes con base en Campos (2005). Elaboración Propia.

La primera habilidad hace alusión a una serie de actividades que se realizan con el grupo, antes de que se inicie formalmente el curso en cuestión.

La segunda habilidad describe la manera en la que el profesor inicia un tema y cómo genera la construcción del conocimiento, así también cómo logra que los alumnos se identifiquen con el tema de estudio.

La habilidad de comunicación describe, la importancia de que un profesor pueda ser entendido por los alumnos midiendo aspectos como, velocidad al hablar, vocabulario, claridad de pronunciación y modulación del tono.

La habilidad de motivación describe, cómo el profesor busca las herramientas necesarias para que los alumnos se encuentren inmersos en la clase y con la necesidad de seguir aprendiendo.

La habilidad de formulación de preguntas permite determinar, si el profesor utiliza sus clases para la simple transmisión de información, sin permitir a los alumnos participar activamente en las clases o los hace formar parte de ella participando con preguntas adecuadas al tema de estudio.

La habilidad de organización lógica permite identificar, la manera en la que el profesor distribuye su material preparado para un determinado tema, de tal manera que sea de fácil entendimiento para los alumnos y además permite identificar los objetivos específicos y generales de la clase o actividad escolar.

La habilidad de integración describe, la manera en la que el profesor ayuda a los estudiantes a percibir una visión de conjunto del nuevo material impartido, en otros términos, la forma en la que ayuda a los alumnos a encadenar los conocimientos vistos en clase con los conocimientos anteriores y con esto hacer sentir al estudiante que completó una parte sustancial del tema.

Con la información recabada a partir de la lista de observación metodológica se identificó, analizó y describió la metodología empleada por el docente. Posteriormente, se hizo uso del segundo instrumento, un pre-test, realizado a los alumnos que cursan la materia de matemáticas V, con el fin de obtener información sobre las nociones y dificultades que se presentan en el tema de sólidos de revolución, así como, las habilidades que posee el alumno en ejercicios relacionados con el espacio tridimensional; en la mencionada prueba, como se muestra en el Anexo 2, se aplicaron reactivos como:

1. ¿Qué entiende por sólido de revolución?

2. ¿Cuántos métodos de solución conoce para poder estimar el volumen de un sólido de revolución?

3. ¿Qué significa realizar la rotación de un área o de un sólido respecto a un eje?

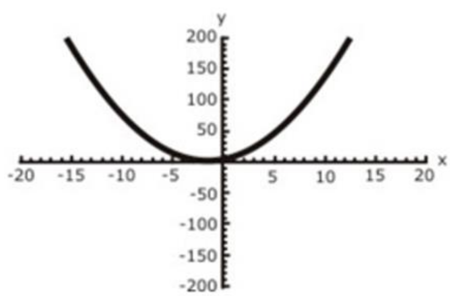
4. Determine el volumen que se obtiene al rotar alrededor del eje x, la función $f(x)=\sqrt{x^3}$ en el intervalo [1,4].

5. Enrique está revisando cuánto dinero necesita para la fiesta que empieza a organizar. Él supone que asistirán unos 30 invitados, por los cuales piensa gastar entre \$100 y \$200 en comida y de \$300 a \$400 en bebida por cada uno. ¿Aproximadamente cuánto dinero va a gastar Enrique?

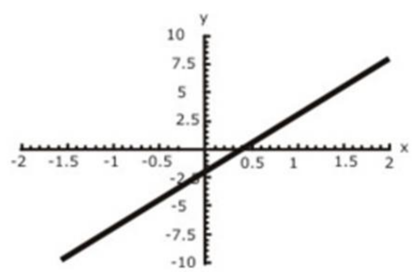
   a) \$3,000 a \$5,900 b) \$6,000 a \$8,900 c) \$9,000 a \$11,900 d) 12,000 a 18,000

6. Identifique la gráfica que represente la siguiente expresión algebraica $y = x^3 + 3x^2 + 5$

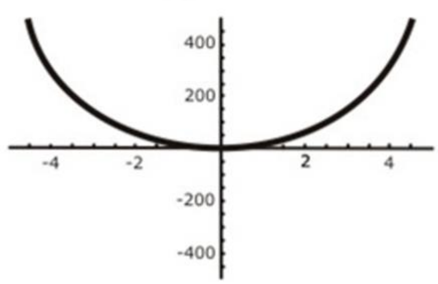
a)



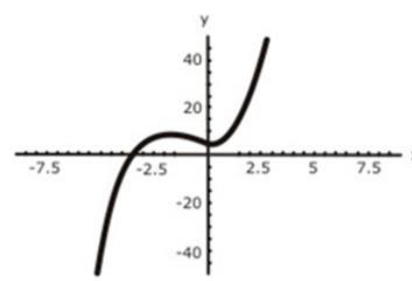
b)



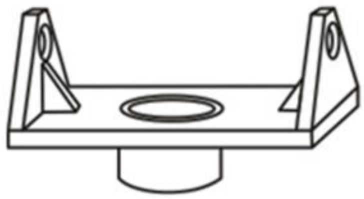
c)

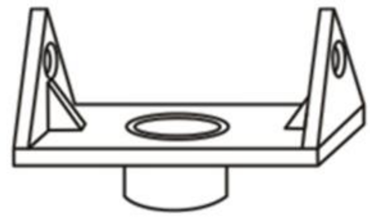


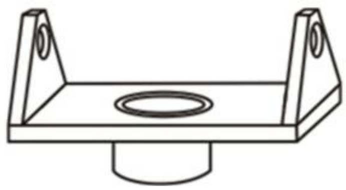
d)

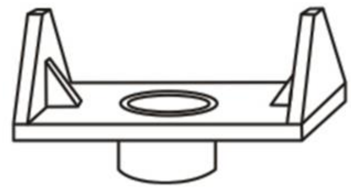


7. Una pieza para torno está formada por una base en forma de paralelepípedo sostenido por la parte de abajo por un cilindro hueco que penetra en esta base. En cada uno de los extremos más cortos del paralelepípedo tiene un prisma trapezoidal, que en su parte superior tiene un orificio en forma de cilindro. Estos prismas están sostenidos en su unión con la base de la pieza, por prismas triangulares colocados sobre una de sus caras laterales.

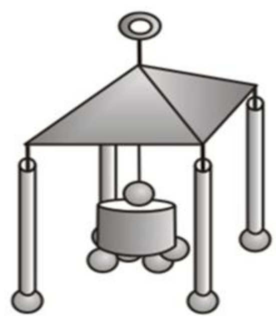
a) 

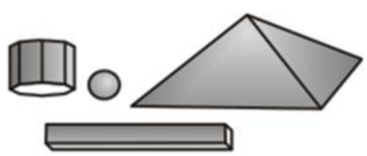
b) 

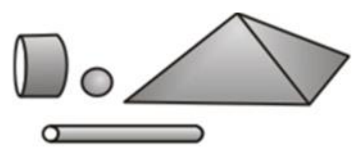
c) 

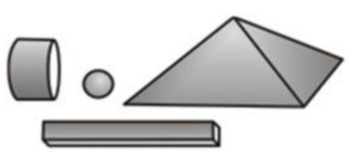
d) 

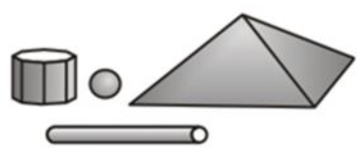
8. El juguete de una cuna de un bebé tiene la forma que siguiente. ¿Cuáles son las figuras que lo componen?



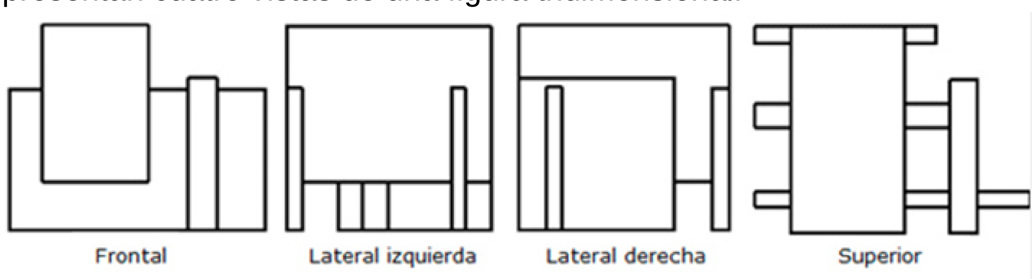
a) 

b) 

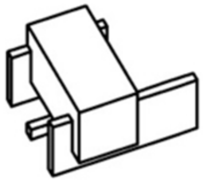
c) 

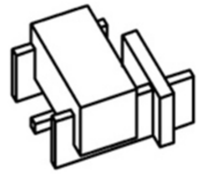
d) 

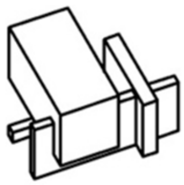
9. se presentan cuatro vistas de una figura tridimensional:

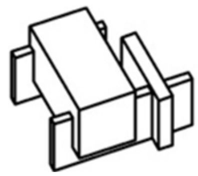


Identifique a cuál de las siguientes figuras pertenecen las vistas anteriores.

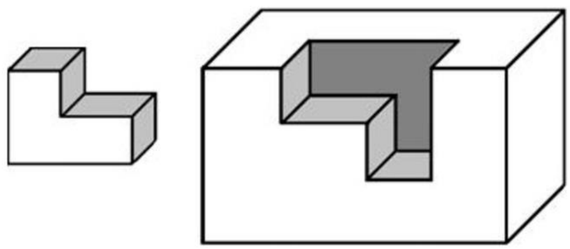
a) 

b) 

c) 

d) 

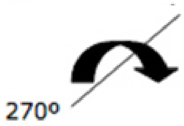
10. En la siguiente imagen se muestra una pieza pequeña que contempla a una más grande.



¿Qué movimiento se debe realizar para ensamblar y completar la pieza mayor?

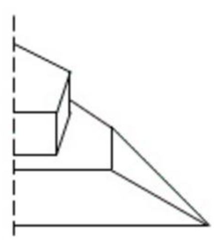
a) 

b) 

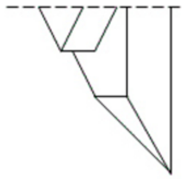
c) 

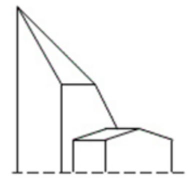
d) 

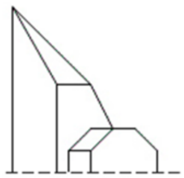
11. Para poner a prueba a un aspirante a escultor, se le pide que complete la siguiente pieza.

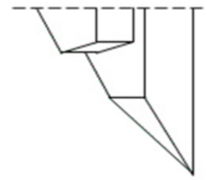


Si la parte que falta debe de ser simétrica, ¿Cuál de las siguientes figuras tiene que elaborar?

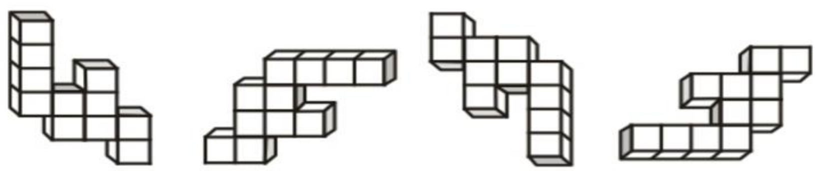
a) 

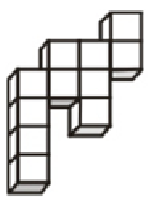
b) 

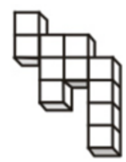
c) 

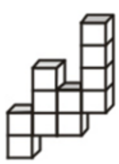
d) 

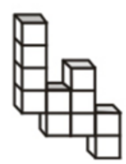
12. ¿Cuál es la figura que continua en la siguiente sucesión?



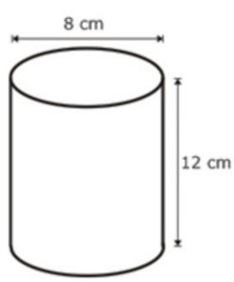
a) 

b) 

c) 

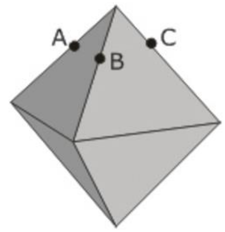
d) 

13. ¿Cuál es el volumen en centímetros del cilindro que se muestra en la figura?



a) 96.00
b) 150.72
c) 301.44
d) 602.88

14. El siguiente octaedro sólido es seleccionado por un plano que pasa por los puntos A, B y C.



Una vez realizado el corte, ¿Cuál es el número de caras del poliedro que resulta con el mayor número de vértices?

a) 5
b) 7
c) 9
d) 10

4.2.2 Concepción y análisis a priori de una situación didáctica.

En la segunda fase *concepción y análisis a priori de una situación didáctica,* se comprende una parte descriptiva y una predictiva, que se centra principalmente en las características de una situación a-didáctica que es diseñada con el fin de favorecer la misma. En esta fase, se diseñó la enseñanza del tema de interés de dos formas totalmente distintas, primeramente de manera constructivista para el grupo experimental y para el grupo tradicional de manera clásica, a excepción en determinados momentos de la clase, que se trabaja con enseñanza constructivista, además de que se buscó analizar, el desarrollo académico de los estudiantes, por tanto, se tomó como referencia el siguiente formato de plan diario de clases de Pimienta (2007):

<table>
<tr><td colspan="6">PLAN DIARIO DE CLASES</td></tr>
<tr><td>Asignatura:
Materia que se está planeando</td><td colspan="2">Nivel:
Grado educativo</td><td>Grado:
Derivado del nivel</td><td>Grupo:
Especificación del o de los grupos con los que se trabaja.</td><td>Fecha:
Se escribe el día en que se trabajará la clase planeada.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Clase Número:
Se refiere a la secuencia de las sesiones, comenzando por la número 1.</td><td colspan="2">Tema:
Seleccionado directamente del programa de la materia.</td><td colspan="2">Nivel de asimilación:
El cual puede ser:

1. Nivel de comprensión-conocimiento,</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>2. Nivel de saber o reproducción,
3. Nivel de hacer o de aplicación
4. Nivel de creación.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Objetivo del aprendizaje: Se refiere a las competencias intelectuales para la construcción del conocimiento.

Objetivo actitudinal: Se deriva del objetivo del aprendizaje.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Título de la clase: Es un enunciado que se redacta para cada sesión y está basado en el tema seleccionado del programa de la asignatura.</td></tr>
<tr><td>Método de enseñanza:

Este puede ser:
1. Explicativo-ilustrativo
2. Reproductivo
3. Exposición problemática
4. Búsqueda parcial o heurística
5. Investigativo</td><td>Estrategias de enseñanza – aprendizaje:

Es la operación particular, práctica o intelectual de la actividad del profesor o de los estudiantes, que complementa la forma de asimilación de los conocimientos que presupone determinado método.</td><td>Recursos:

Son los medios de enseñanza que constituyen distintas imágenes y representaciones que se confeccionan especialmente para la docencia, por ejemplo:

• Objetos naturales
• Objetos impresos
• Medios de proyección
• Medios informáticos.</td></tr>
<tr><td>Reactivación de los conocimientos previos:

Consiste en determinar los conocimientos previos que se encuentran en relación con los contenidos a tratar y que servirán para fortalecer la nueva información.</td><td>Situación problemática:

Es una categoría fundamental de la enseñanza problemática, que refleja la asimilación de la contradicción por parte del estudiante. El problema es para que el estudiante asuma la necesidad de solucionarlo con la mediación del profesor.

El problema debe de ser cuidadosamente seleccionado para que cumpla los objetivos marcados por el profesor y no tiene que ser complicado para el estudiante, ya que tiene que lograr que el alumno haga uso de sus conocimientos para darle solución.</td><td>Aplicación de los conocimientos:

Tiene que ver con la práctica del conocimiento, ya que para ir más allá de la comprensión del tema se requiere práctica en situaciones semejantes y diferentes, para poder poner en juego las habilidades adquiridas por los alumnos.</td></tr>
<tr><td>Construcción de significados:

Es el proceso mediante el cual se establecen las relaciones que permiten la creación de los puentes cognitivos (con los organizadores previos) para la comprensión del contenido por parte del alumno.
Es decir que lo ha</td><td>Organización del conocimiento:

Es la forma en la cual se presenta la información sin perder la secuenciación de los elementos primordiales en un tema, que pueda provocar en el alumno alguna dificultad.</td><td>Evaluación del proceso:

Esta categoría permite al estudiante darse cuenta de sus deficiencias y habilidades, en tanto que al profesor le permite realimentarse y así efectuar las correcciones necesarias para futuras clases, esto constituye la autoevaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje.</td></tr>
</table>

comprendido.		

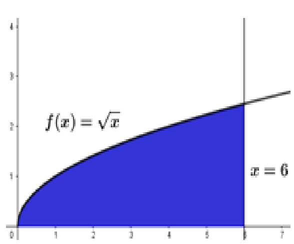
Tareas *Constituyen actividades que se dejan para resolver de manera individual, las cuales están relacionadas con el tema de estudio de la clase.*

Cuadro 12. Formato plan diario de clases tomado de (Pimienta, 2007, pág. 22)

Para el grupo “experimental” y considerando el formato de Pimienta (2007), se diseñó:

<table>
<tr><td colspan="6">PLAN DIARIO DE CLASES</td></tr>
<tr><td>Asignatura:
Cálculo Integral</td><td>Nivel:
Preparatoria</td><td>Grado:
5°</td><td colspan="2">Grupo:
Experimental</td><td>Fecha:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Clase Número:
1 - 6</td><td colspan="2">Tema:
Sólidos de Revolución</td><td colspan="2">Nivel de asimilación:
Saber hacer</td></tr>
<tr><td colspan="6">a) Objetivo del aprendizaje: Identificar la relación existente entre el cambio de un área al cálculo de un volumen generado por la rotación de curvas en el plano tridimensional.

b) Objetivo actitudinal: Inducir al alumno al análisis y reflexión de problemas tridimensionales.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Título de la clase: Cálculo de áreas y volúmenes “Sólidos de Revolución”</td></tr>
<tr><td colspan="2">Método:
Explicativo – ilustrativo.</td><td colspan="2">Estrategias de enseñanza –aprendizaje:
Preguntas exploratorias.</td><td colspan="2">Recursos:
Libro de texto, pizarrón y marcadores, graficador Geogebra, figuras sólidas y videos de elaboración de una figura.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reactivación de los conocimientos previos:

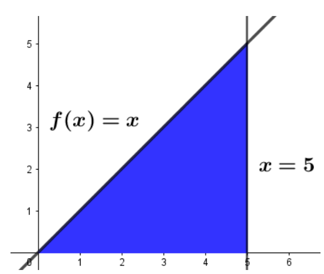


Preguntas exploratorias

1. ¿Qué es un sólido de revolución?

2. ¿Qué se puede hacer para estimar el área acotada bajo una curva?</td><td colspan="2">Situación problemática:

Relación área bajo la curva vs. Sólidos de revolución en su cambio de traslación de área a volumen.



<u>Interacción con Geogebra.</u>

1. Al hacer girar la función $f(x) = x$ respecto a un eje ¿Qué sucedería?</td><td colspan="2">Aplicación de los conocimientos:

a) Determine el volumen que se genera al girar en el eje x la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ en el intervalo $[0,3]$.

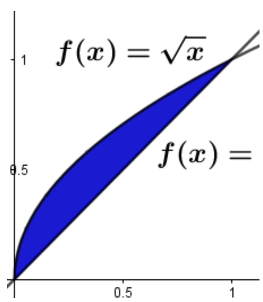
b) Determine el volumen que se genera al girar en el eje x la función $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0,2]$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
3. ¿Cómo se construye la integral para calcular el área acotada?

4. ¿Es un área aproximada o exacta?

5. ¿Se considera el mismo resultado, usando sumas de Riemann?

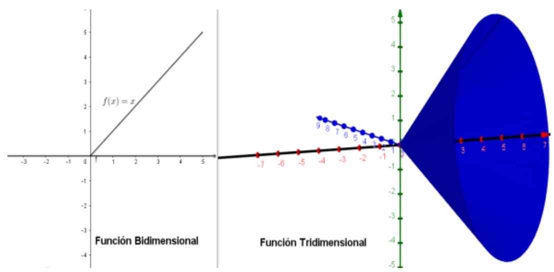
6. ¿Cuál es el área total?



1. ¿Cuál es la diferencia con el método anterior?

2. ¿Qué se puede hacer para estimar el área acotada entre esas curvas?
</td>
<td>
2. ¿Cómo podríamos calcular el área/ volumen? (lluvia de ideas)

3. Si en el tema de área bajo la curva se realizaba la suma de rectángulos, en la figura obtenida ¿Cómo podríamos hacer para calcular el volumen?



a) ¿Cuánto vale el radio?

<u>Interacción Alumno-Docente para construcción de fórmula</u>

<u>Videos de formación de figuras tridimensionales</u>

<u>Interacción con objetos tridimensionales.</u>


1. Determinar si los objetos mostrados son un sólido de revolución.

2. Explicación del porqué es o no un sólido de revolución.

3. ¿Asemejan una curva o una recta?
</td>
<td>
c) Determine el volumen que se genera al girar en el eje y la función $f(x) = x^3$ y la recta $y = 8$.

d) Determine el volumen que se obtiene al girar en el eje y las funciones $f(x) = 2x$ y $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$.

1. En cada uno de los ejercicios mencionados previamente, realiza un bosquejo del sólido formado y menciona él porque de la utilización del método de solución.
</td>
</tr>
</table>

Ejemplos con interacción del software Geogebra. (*Anexos 3, 4, 5, 6, 7 y 8*)

a) Determine el volumen que se genera al girar en el eje x la función $f(x)=x^2$ *en el intervalo* $[0,3]$.

b) Determine el volumen que se genera al girar en el eje y la función $f(x)=x^2$ *y la recta* $y=5$.

1. ¿Cuál es la gráfica de x^2 *?*

2. ¿Qué método se puede realizar para para obtener la gráfica?

3. ¿Qué figura es obtenida al realizar la rotación respecto al eje x?

4. ¿Qué figura es obtenida al realizar la rotación respecto al eje y?

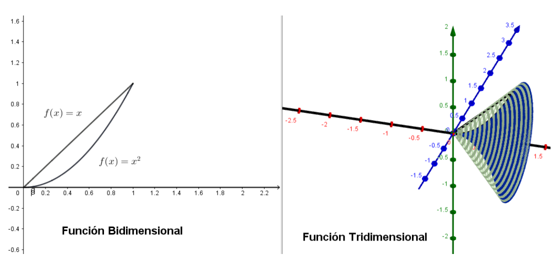
5. Realice un bosquejo de la figura obtenida.

6. ¿Se obtiene el mismo resultado en ambos problemas?

7. ¿En qué se diferencia?

Método de arandelas

Interacción con Geogebra.



c) Determine el volumen formado al hacer girar respecto al eje x, las funciones $f(x)=x$ *y* $f(x)=x^2$ *en el intervalo [0,1].*

	d) Determine el volumen formado al hacer girar respecto al eje y, las funciones $f(x)=x$ y $f(x)=x^2$ en el intervalo [0,1]. *1. ¿Cuáles son las gráficas de las funciones?* *2. ¿De qué otro método puede realizarla?* *3. ¿Qué figura es obtenida al realizar la rotación respecto al eje?* *4. Realice un bosquejo de la figura obtenida.* *5. ¿Se obtiene el mismo resultado en ambos problemas?* *6. ¿En qué se diferencia con el método anterior?*	
Construcción de significados: *1.¿Existen sólidos de revolución en este preciso momento entre sus pertenencias o el aula? Mencione tres.*	*Organización del conocimiento:* *1. Describe los pasos para calcular el volumen de un sólido de revolución.* ***<u>Respuesta</u>*** *1. Graficar la función.* *2. Hacer el reflejo de la gráfica de la función respecto al eje de rotación indicado.* *3. Bosquejar el sólido obtenido* *4. Determinar el método indicado para la resolución del ejercicio.* *5. Hacer la sustitución indicada y posteriormente realizar la integración para obtener el volumen esperado.*	*Evaluación del proceso:* *Con base en cada uno de los aspectos mostrados en clase y durante realización de ejercicios, reflexionen sobre:* *1. ¿Qué hice bien?* *2. ¿Qué hice mal?* *3. ¿Cómo lo puedo mejorar?* *4. Menciona lo positivo y negativo durante la realización del tema "Sólidos de Revolución".*
Tareas: *1. Determine el volumen que se genera al girar en el eje x la función $f(x)=x^2+1$ en el intervalo [-1,1].* *2. Determine el volumen que se genera al girar en el eje x la función $f(x)=\frac{1}{x}$ en el intervalo [1,3].* *3. Determine el volumen que se genera al girar en el eje y la función $f(x)=x$ en el intervalo [0,5].*		

4. Determine el volumen que se genera al girar en el eje x la función $f(x)=x$ y $f(x)=x^3$ en el intervalo [0,1]. *En cada uno de los ejercicios antes mencionados bosqueje el sólido obtenido por medio de la interacción con el graficador Geogebra en 3D.*

Cuadro 13. Adaptación del formato de plan diario de clases para el grupo experimental tomado de (Pimienta, 2007, pág. 22)

Y para el grupo “tradicional” tomando en cuenta el formato de Pimienta (2007) se diseñó:

<table>
<tr><td colspan="6">PLAN DIARIO DE CLASES</td></tr>
<tr><td>Asignatura:
Cálculo Integral</td><td>Nivel:
Preparatoria</td><td colspan="2">Grado:
5°</td><td>Grupo:
Tradicional</td><td>Fecha:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Clase Número:
1 - 4</td><td colspan="2">Tema:
Sólidos de Revolución</td><td colspan="2">Nivel de asimilación:
Comprensión</td></tr>
<tr><td colspan="6">a) Objetivo del aprendizaje: Identificar la relación existente entre el cambio de un área al cálculo de un volumen generado por la rotación de curvas en el plano tridimensional.

b) Objetivo actitudinal: Inducir al alumno al análisis y reflexión de problemas tridimensionales.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Título de la clase: Cálculo de áreas y volúmenes “Sólidos de Revolución”</td></tr>
<tr><td colspan="2">Método:
Exposición problemática</td><td colspan="2">Estrategias de enseñanza –aprendizaje:
Preguntas exploratorias</td><td colspan="2">Recursos:
Libro de texto, pizarrón y marcadores</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reactivación de los conocimientos previos:

Preguntas exploratorias
1. ¿Qué es un sólido de revolución?

2. ¿Qué se puede hacer para estimar el área acotada bajo una curva?

3. ¿Se considera el mismo resultado, usando sumas de Riemann?

4. ¿Cuál es el área total?</td><td colspan="2">Situación problemática:

Relación área bajo la curva vs sólidos de revolución.

1. Al hacer girar la función $f(x)=x$ respecto a un eje ¿Qué sucedería?

2. ¿Cuál es la gráfica de x ?

3. ¿Qué se puede hacer para obtenerla?

4. ¿Qué figura es obtenida al realizar la rotación respecto al eje?

3. ¿Cómo podríamos calcular el área/ volumen? (lluvia de ideas)</td><td colspan="2">Aplicación de los conocimientos:

a) Determine el volumen que se genera al girar en el eje x la función $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ en el intervalo $[0,3]$.

b) Determine el volumen que se genera al girar en el eje x la función $f(x)=x^3$ en el intervalo $[0,2]$.</td></tr>
</table>

Método de arandelas *1. ¿Cuál es la diferencia con el método anterior?* *2. ¿Qué se puede hacer para estimar el área acotada entre esas curvas?*	*4. Si en el tema de área bajo la curva se realizaba la suma de rectángulos, en la figura obtenida ¿Cómo podríamos hacer para calcular el volumen?* *a) Determine el volumen que se genera al girar en el eje x la función* $f(x)=x^2$ *en el intervalo* $[0,3]$. *b) Determine el volumen que se genera al girar en el eje y la función* $f(x)=x^2$ *y la recta* $y=5$. *1. ¿Cuál es la gráfica de* x^2 *?* *2. ¿Qué método se puede realizar para para obtener la gráfica?* *3. ¿Qué figura es obtenida al realizar la rotación respecto al eje x?* *4. Realice un bosquejo de la figura obtenida.* *5. ¿Se obtiene el mismo resultado en ambos problemas?* *6. ¿En qué se diferencia?* *c) Determine el volumen formado al hacer girar respecto al eje x, las funciones* $f(x)=x$ *y* $f(x)=x^2$ *en el intervalo [0,1].* *d) Determine el volumen formado al hacer girar respecto al eje y, las funciones* $f(x)=x$ *y* $f(x)=x^2$ *en el intervalo [0,1].* *1. ¿Cuáles son las gráficas de las funciones?* *2. ¿De qué otro método puede realizarla?*	*c) Determine el volumen que se genera al girar en el eje y la función* $f(x)=x^3$ *y la recta* $y=8$. *d) Determine el volumen que se obtiene al girar en el eje y las funciones* $f(x)=2x$ *y* $f(x)=x^2$ *en el intervalo* $[0,2]$.

	3. ¿Qué figura es obtenida al realizar la rotación respecto al eje? *4. Realice un bosquejo de la figura obtenida.* *5. ¿Se obtiene el mismo resultado en ambos problemas?* *6. ¿En qué se diferencia con el método anterior?*	
Construcción de significados: *1. ¿Qué diferencia o relación existe entre la función $f(x)=x^3$ al hacerla rotar en el eje x y el eje y.* *2. ¿Se obtiene el mismo resultado?* *3. En el método de arandelas ¿Qué sucedería de tomar los radios de manera inversa?*	*Organización del conocimiento:* *Determina los pasos para calcular el volumen de un sólido de revolución.* *<u>Respuesta:</u>* *1. Graficar la función.* *2. Hacer el reflejo de la gráfica de la función respecto al eje de rotación indicado.* *3. Bosquejar el sólido obtenido* *4. Determinar el método indicado para la resolución del ejercicio.* *5. Hacer la sustitución indicada y posteriormente realizar la integración para obtener el volumen esperado.*	*Evaluación del proceso:* *Explica a uno de tus compañeros como resolviste los ejercicios y las estrategias que utilizaste para llegar a la respuesta correcta.* *Con base en la explicación entre compañeros, reflexionen sobre:* *1. ¿Qué hice bien?* *2. ¿Qué hice mal?* *3. ¿Cómo lo puedo mejorar?*

Tareas

1. Determine el volumen que se genera al girar en el eje x la función $f(x)=x^2+1$ *en el intervalo [-1,1].*

2. Determine el volumen que se genera al girar en el eje x la función $f(x)=\frac{1}{x}$ *en el intervalo [1,3].*

3. Determine el volumen que se genera al girar en el eje y la función $f(x)=x$ *en el intervalo [0,5].*

4. Determine el volumen que se genera al girar en el eje x la función $f(x)=x$ *y* $f(x)=x^3$ *en el intervalo [0,1].*

En cada uno de los ejercicios antes mencionados bosqueje el sólido obtenido.

Cuadro 14. Adaptación del formato de plan diario de clases para el grupo tradicional tomado de (Pimienta, 2007, pág. 22)

Primeramente, se abordó la enseñanza del tema de interés pero de manera tradicional y por otra parte, se afrontó el tema de manera clásica, pero con el apoyo del recurso graficador Geogebra para poder ejemplificar el cambio de un área acotada en el plano bidimensional a la interpretación de un volumen en el plano tridimensional, el uso de estas dos formas de metodología, tiene la finalidad de probar su efectividad en clase al momento de ser impartido éste, y a su vez, poder determinar si la falta de visualización espacial se debe a la carencia de recursos gráficadores o no.

4.2.3 Experimentación.

En la tercera fase *experimentación,* se pone en juego la situación planteada en la segunda fase. En esta fase se trabajó con dos grupos, el experimental y el de control o tradicional, en el primero se abordó el tema de interés con apoyo de recursos, se empezó con el tema de manera clásica, posteriormente se empezó a trabajar con la concepción del área acotada bajo una curva y su relación con el plano bidimensional, posteriormente se tuvo interacción con los alumnos de este grupo para promover la construcción del conocimiento y poder llegar a la construcción de la fórmula para el cálculo del volumen de un sólido de revolución, realizando preguntas como:

- ¿El área mencionada puede tener un volumen? ¿Por qué?
- ¿Qué sucedería si esa curva/ área se encontrara girando?
- ¿El área seguiría en el plano bidimensional?
- Si sabemos calcular el área bajo una curva, ¿Cómo podríamos calcular el volumen?
- ¿Qué elementos debemos tomar en cuenta para su cálculo?
- En el sólido generado, ¿cuánto vale el radio?

Posteriormente, se empezó a trabajar con la noción de área en rotación respecto a un eje y su relación con el plano tridimensional con el recurso graficador en tres dimensiones, así como en el pizarrón para poder construir la fórmula para el cálculo del volumen de un sólido de revolución y lograrán ver el porqué del método de discos para los primeros ejemplos mostrados. Después se procedió a que los alumnos vieran un video conformado por la elaboración de figuras tridimensionales que inicialmente se encuentran en estado estático y para poder generarlas tridimensionalmente, se recurre a la rotación de las figuras y con esto, poder dar una representación visual al alumno de lo que es un sólido en rotación o en su defecto el cambio de planos del bidimensional al tridimensional. Además, el video tenía el objetivo para que los alumnos pudieran observar cómo se relaciona la rotación de figuras con la fórmula del método de discos, para calcular el volumen.

Una vez concluida la reproducción del video, se procedió a la interacción del alumno con objetos tridimensionales, para que el alumno determinara y considerando lo aprendido hasta el momento, sí las figuras presentadas eran un sólido de revolución o no. Con esto se buscaba que el alumno pudiera explicar el porqué de su respuesta y por último, el alumno trabajó con una serie de ejercicios propuestos.

Posteriormente, se empezó a trabajar con los alumnos en el segundo método, el cuál era el de arandelas, en dónde se repitió el mismo proceso que en el de discos, pero aquí el alumno identificó por sí mismo que ya no se tenía una función sino dos funciones, y al trabajar con el recurso Geogebra, se mostró el sólido obtenido al alumno. Una vez expuesto el sólido se realizó un pequeño cuestionamiento, en el sólido generado ¿Qué función es la que determina el radio del sólido? Para que con esto se tuviera una pequeña discusión, y pudiéramos llegar a la construcción de la fórmula, como ocurrió con el primer método y por último el alumno trabajó con una serie de ejercicios propuestos.

Al concluir el proceso experimental y con el fin de motivar la reflexión de la actividad, se procedió a realizar las siguientes preguntas a los alumnos de manera general:

- *¿Existen sólidos de revolución en este preciso momento entre sus pertenencias o el aula?*
- *¿Qué hice bien?*
- *¿Qué hice mal?*
- *¿Cómo lo puedo mejorar?*
- *Menciona lo positivo y negativo durante la realización del tema "Sólidos de Revolución".*

Con el segundo grupo se trabajó de la misma manera, sólo que este careció de los recursos tecnológicos utilizados para el grupo experimental y las representaciones gráficas fueron realizadas de manera clásica, en el pizarrón. Discerniendo la precisión de las gráficas hechas a pulso vs. la computadora, la posibilidad de interacción (e.g. Geogebra puede rotar o ampliar la gráfica vs. No poder hacerlo en el pizarrón (cognición visual, Cavanagh, 2011). Se analizaron los sólidos obtenidos al hacer el reflejo o simetría de la función algebraica respecto a un eje, para poder determinar, una forma de calcular el volumen, llegando a la definición de sólido de revolución y una vez expuesta la fórmula para calcular el volumen de un sólido, el alumno trabajó con la misma serie de ejercicios que fueron aplicados en el grupo experimental. Y al terminar la actividad se procedieron a realizar las mismas preguntas que en el grupo experimental con el fin de motivar la reflexión de la actividad y evaluar su desempeño académico en la materia de Cálculo integral.

4.2.4 Análisis a posteriori y evaluación.

En la cuarta fase, *análisis a posteriori y la evaluación,* se hace uso del conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, así como de las observaciones y las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Se trabaja además con la validación de las hipótesis formuladas en la investigación, las cuales se fundamentan en la confrontación de los análisis a priori y a posteriori. En esta fase se trabajó con la aplicación de un post-test (Anexo 19) con relación al pre-test (Anexo 2), donde se midieron las habilidades que adquirió el alumno durante el tema de interés, dicha prueba está conformada por los mismos reactivos del pre-test, con la diferencia de las siguientes consignas añadidas:

- ¿Cómo se relaciona el área de una superficie con el volumen de un sólido de revolución?
- ¿Qué sucede si generamos cortes verticales u horizontales en un sólido de revolución?
- Determine el volumen que se obtiene al rotar alrededor del eje y la función $f(x) = x+1$ en el intervalo [0,2].
- Determine el volumen del sólido generado al rotar la función $f(x) = x$ y $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo [0,1] alrededor del eje x.
- Mencione tres ejemplos de la vida cotidiana donde se utilice el concepto de sólido de revolución.

Por último y una vez terminadas cada una de las etapas se hizo el análisis de las evaluaciones en ambos grupos, así como el análisis de la metodología del profesor y se obtuvieron conclusiones acerca de la metodología empleada para la explicación del tema sólidos de revolución para dar validez de las hipótesis formuladas en la investigación.

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

5.1 *Análisis de la observación metodológica*

Comenzaremos analizando la primera fase de la ingeniería didáctica de Artigue (1995), “análisis preliminares” la cual se refiere a *“… un análisis metodológico de la enseñanza tradicional y sus efectos…”* para esto, se observó la clase del profesor titular del grupo por toda una semana, se puede determinar que: el profesor al llegar al salón de clase, normalmente realiza actividades cotidianas como el pase de lista, a la cual le dedica aproximadamente veinte minutos (incluyendo bromas y conversación con los alumnos). Posteriormente al momento de iniciar con la enseñanza de un nuevo tema y siguiendo los aspectos primordiales de la observación metodológica, se puede observar que el docente a cargo del grupo de cálculo integral, pone a los alumnos a resolver la actividad diagnóstica marcada en el libro, la cual pueden resolver de manera individual o colectivamente (a veces por la duración total de la clase, considerando que hay dos días a la semana que son de dos horas) para que así, surjan las dudas existentes y puedan aclararse de manera grupal.

Una vez concluida la actividad diagnóstica se procede a la lectura grupal del tema de estudio marcado en el libro de texto, etapa donde el profesor, proporciona una explicación breve más no detallada de la parte teórica. Por otro lado, la explicación de los ejemplos en el libro, lo deja a criterio de los alumnos para que sirva de guía durante la realización individual de los ejercicios propuestos en el libro, dentro de los cuales si existiera alguna duda en un determinado ejercicio, promueve una pequeña discusión entre compañeros para poder dar solución al ejercicio que, considerando los aspectos marcados en la lista de observación metodológica, se pone en juego el aprendizaje basado en problemas, y a su vez, sino tuviera algún efecto dicho debate, el profesor les brinda la oportunidad de poder preguntarle y darles la orientación adecuada para poder resolver el ejercicio de la manera correcta.

Al concluir la realización de ejercicios, el profesor promueve la participación individual de los alumnos para resolver los ejercicios en el pizarrón y a su vez, la participación grupal para discutir si en efecto los ejercicios están resueltos de manera correcta.

Algo que fue muy notorio en el desarrollo metodológico del tema durante la clase del profesor, es que no proporciona actividades integradoras, donde los alumnos puedan aplicar los conocimientos adquiridos en el tema de estudio. Por otro lado, en el mismo orden metodológico se presentan los diversos temas a estudiar.

Según Chevallard (1991) la vigilancia epistemológica es la distancia existente entre el objeto de conocimiento y el objeto de enseñanza, la cual está determinada por las transformaciones que el saber sabio sufre a los efectos de ser comprendido por un sujeto o un determinado grupo de aprendizaje como ocurre en el aula de clases. Por tanto, el análisis metodológico evidencia que el profesor tiene el conocimiento acerca del tópico de estudio, pero en su defecto no se le brinda el suficiente tiempo a la enseñanza del tema, específicamente en los ejercicios marcados en el libro de texto, y por consecuencia, los alumnos tienen obstáculos epistemológicos, al querer hacer ejercicios relacionados con el tema de estudio.

Por otra parte, Chevallard (1997) menciona que el saber académico se refiere a la interpretación que tiene del saber sabio y como poder enseñarlo para ser aplicado en el aula. Por tanto, este análisis permite evidenciar que el profesor carece de una manera específica, para impartir algunos de los temas correspondientes a Cálculo Integral, ya que deja el aprendizaje de los tópicos directamente a los alumnos, tomando como base el libro de texto de su materia.

5.2 *Análisis de la prueba pre-test*

Continuando con los análisis correspondientes a la primera fase de la ingeniería didáctica de Artigue (1995) se realizó un diagnóstico el cual se refiere a un *"... análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza",* para el cual, se tomaron los datos estadísticos generados en el pre-test por el grupo experimental y el grupo tradicional, se tomó como base, la prueba de hipótesis para t-test por medio de intervalos de confianza para la diferencia de medias. En dicha prueba se consideran elementos primordiales que ayudan a fortalecer la comprobación de una hipótesis, tales como: a) media de la muestra; b) distribución del error estándar; c) desviación estándar de la muestra; d) margen de error; e) intervalos de confianza; f) valores *t* críticos para un alfa dado (distribución *t* de student); g) tamaño de la muestra; h) grados de libertad e i) hipótesis alternativa y nula.

En el instrumento utilizado para el pre-test se realizó la prueba de hipótesis para t-test, ya que se trabajó con dos muestras de variables independientes, el grupo tradicional y el grupo experimental. Para proceder con la comprobación de la hipótesis alternativa, se tuvo que realizar primeramente el cálculo de algunas de las medidas de tendencia central y de dispersión como:

- La media aritmética del grupo tradicional.
- La media aritmética del grupo experimental.
- La media general de ambos grupos.
- La desviación estándar del grupo tradicional.
- La desviación estándar del grupo experimental
- La desviación estándar estimada de ambos grupos aleatorios.
- Diferencia de medias aritméticas.

Posteriormente para dar paso a la comprobación de hipótesis necesitamos:

- Tamaño de las muestras, las cuales son 38 para el tradicional y 40 para el experimental.
- El tipo de distribución t de student que usaremos, son dos colas para el pre-test (por la hipótesis nula de igualdad) y una cola para el post-test (por la hipótesis alterna de superioridad).
- Determinar los grados de libertad, sustituyendo los valores de nuestras variables, en la fórmula mostrada en el cuadro 15.
- Valor de α para el tipo de distribución seleccionada, $\alpha = 2.024$ que corresponde al 95% de significancia, para una distribución de dos colas, 0.025 en cada cola, en el caso de la prueba pre-test.
- Determinar el margen de error o error estándar a partir de la fórmula mostrada en el cuadro 15.
- Determinar el intervalo para la comprobación de hipótesis.

Para el cálculo de los elementos anteriores se ocuparon las fórmulas mostradas en el siguiente cuadro:

Media aritmética	Desviación estándar
$\overline{X} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$	$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_1 - \overline{X}\right)^2}{n-1}}$
Grados de libertad para dos muestras aleatorias	**Margen de error o error estándar**
$df = \dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)}{\dfrac{1}{n_1 - 1}\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}\right) + \dfrac{1}{n_2 - 1}\left(\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)}$	$s_d = \sqrt{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)}$

Diferencia de medias aritméticas	Intervalo de la hipótesis
$\bar{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$\bar{d} \pm t_{\alpha/2}\left(\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)}\right)$

Cuadro 15. Fórmulas elementales para comprobación de hipótesis por diferencia de medias. Elaboración propia.

Para comprobar la hipótesis alternativa se seleccionó una distribución de dos colas. Para el pre-test se realizaron los cálculos mostrados en la siguiente tabla, tomando como base de datos, las calificaciones obtenidas de los alumnos en la prueba pre-test.

GRUPO EXPERIMENTAL		*GRUPO TRADICIONAL*	
CALIFICACIONES		*CALIFICACIONES*	
PRE-TEST	*POST-TEST*	*PRE-TEST*	*POST-TEST*
4.3	*7.4*	*4.3*	*1.6*
6.4	*7.4*	*2.9*	*4.7*
4.3	*10.0*	*3.6*	*5.8*
5.7	*4.7*	*5.7*	*6.3*
6.4	*8.4*	*7.1*	*6.8*
7.9	*8.9*	*4.3*	*2.6*
6.4	*7.4*	*6.4*	*2.6*
4.3	*8.9*	*3.6*	*6.8*
6.4	*6.8*	*5.7*	*4.2*
8.6	*7.9*	*5.0*	*5.8*
7.1	*10.0*	*1.4*	*5.3*
6.4	*10.0*	*5.0*	*4.2*
4.3	*9.5*	*7.9*	*8.4*
7.9	*8.4*	*2.9*	*4.7*
4.3	*7.4*	*7.9*	*8.9*
2.9	*9.5*	*7.1*	*5.8*
8.6	*6.3*	*5.7*	*5.8*
5.0	*8.9*	*7.1*	*7.4*
5.7	*8.4*	*5.0*	*6.8*
7.1	*8.9*	*7.1*	*6.3*
4.3	*7.9*	*5.0*	*6.8*
5.7	*9.5*	*4.3*	*4.2*
5.7	*8.9*	*6.4*	*8.9*
4.3	*7.4*	*6.4*	*5.8*
4.3	*8.4*	*4.3*	*5.8*
7.1	*7.4*	*5.7*	*4.7*
7.1	*5.8*	*5.7*	*4.2*

6.4	*6.3*	*5.7*	*4.2*
4.3	*9.5*	*5.0*	*4.2*
7.1	*8.9*	*6.4*	*5.8*
7.9	*5.3*	*5.0*	*6.8*
5.0	*10.0*	*5.0*	*5.3*
5.0	*6.3*	*3.6*	*3.2*
6.4	*7.9*	*5.0*	*3.7*
5.7	*7.4*	*5.0*	*6.3*
7.1	*8.4*	*5.0*	*5.8*
5.7	*8.9*	*8.6*	*7.4*
5.0	*5.8*	*3.6*	*2.1*
5.0	*8.4*		
2.9	*7.9*		
TOTAL DE ALUMNOS			
40	*40*	*38*	*38*

Cuadro 16. Calificaciones obtenidas en las pruebas pre-test y post-test. Elaboración propia.

Considerando los datos del cuadro anterior, se procedió a realizar una prueba de hipótesis para poder ver las posibles relaciones entre ambos grupos (tradicional y experimental). Para la prueba pre-test se consideraron las siguientes hipótesis, como hipótesis nula se estableció, H0: distribución del grupo experimental = distribución del grupo tradicional y como hipótesis alterna se estableció, H1: distribución del grupo experimental ≠ distribución del grupo tradicional. Posteriormente, se estableció el grado de significación del 95%, correspondiente a un $\alpha = 2.024$ y por último se calcularon los grados de libertad para una muestra de dos variables independientes, tomando como referencia la fórmula mostrada en el cuadro 15.

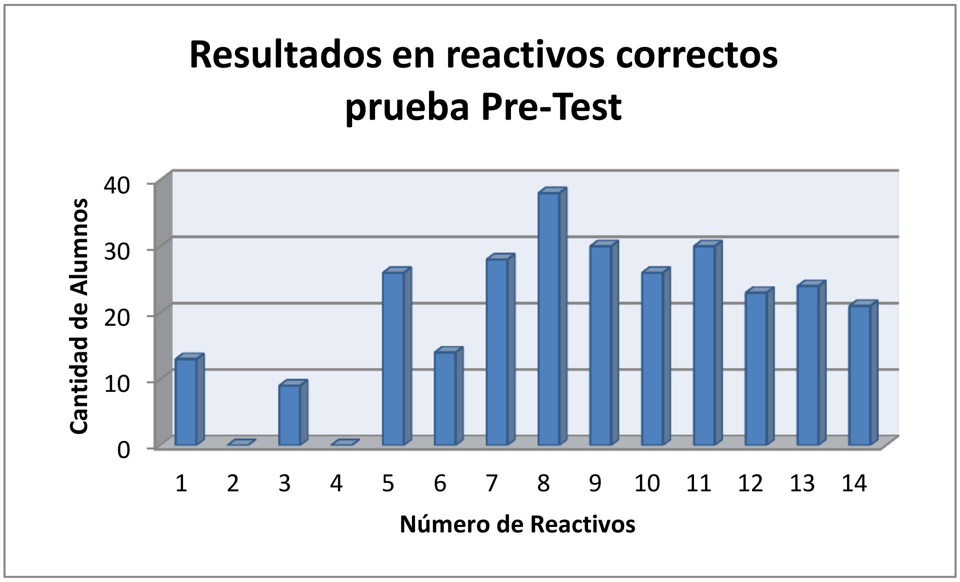
ANÁLISIS DE DISTRIBUCIÓN EN PRUEBA PRE-TEST POR MEDIO DE LA DISTRIBUCIÓN T DE STUDENT					
Prueba de Hipótesis para T- test					
SIGNIFICANCIA 95% α=0.05 GRADOS DE LIBERTAD= 38 ESTUDIANTES					
H0; EXPERIMENTAL = TRADICIONAL					
H1; EXPERIMENTAL ≠ TRADICIONAL					
Media	*valor*	*Desviación Estándar*	*Valor*	*Elementos de verificación*	*Valor*
Tradicional	*5.3*	*Tradicional*	*1.54*	*Desviación promedio*	*0.3395*
Experimental	*5.8*	*Experimental*	*1.46*	*Intervalo de confianza*	*0.6871*
General	*5.6*	*General*	*1.51*	*Diferencia de medias*	*0.5*

Cuadro 17. Resultados arrojados para la comprobación de hipótesis por diferencias de medias en prueba pre-test. Elaboración propia.

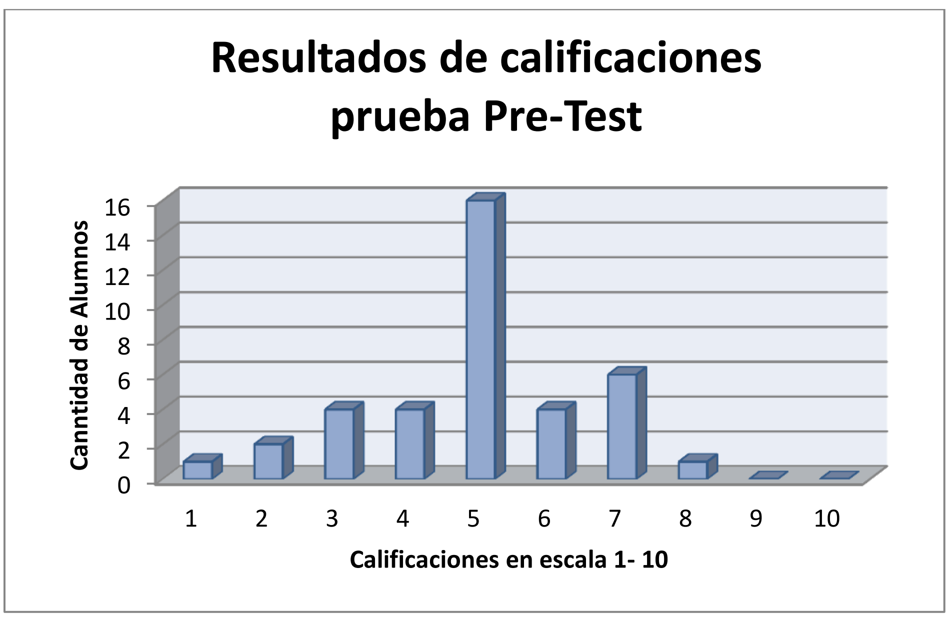
Una vez calculados los elementos necesarios para poder encontrar el intervalo de confianza y poder demostrar la hipótesis, se puede ver en el cuadro 17 en la columna de elementos de verificación, que la desviación promedio de la distribución diferencia es igual a 0.3395 (i.e., qué tan diferentes son las calificaciones entre elementos de ambas poblaciones).

El intervalo de confianza es el t-valor multiplicado ($\alpha = 2.024$ ya que en este caso son de treinta y ocho grados de libertad al sustituir nuestros valores en la fórmula mostrada en el cuadro 15) por la distribución estándar de la diferencia (primer valor), los cuales nos ayudan a poder encontrar la estimación del intervalo de diferencia. En el caso del pre-test, la hipótesis alterna establecida es que las poblaciones son diferentes (i.e., distribución con dos colas 0.025 + 0.025 con una significancia de 0.05).

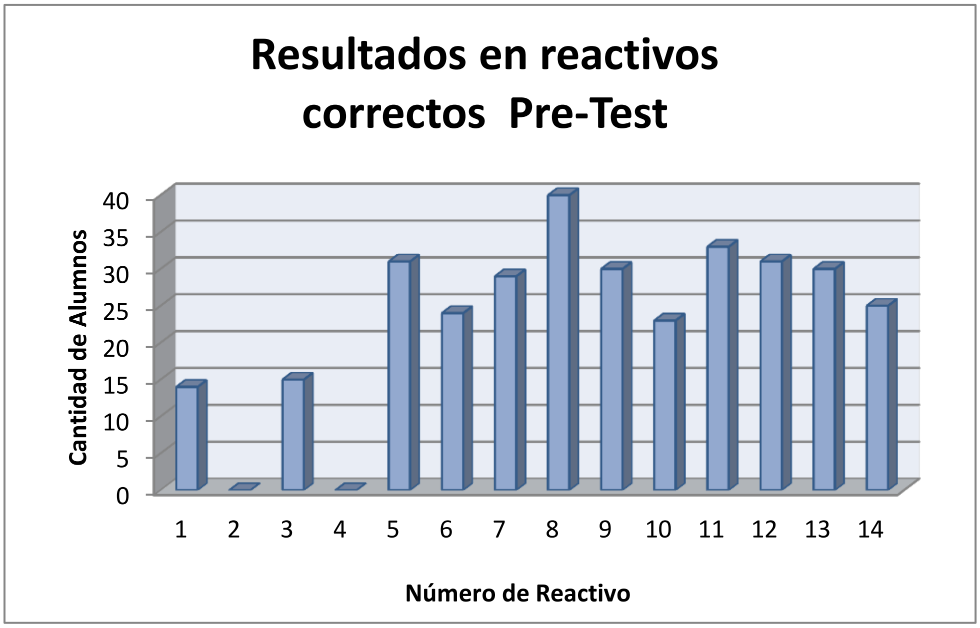
Duval (1991) menciona que para expresar un resultado que sea distinto al lenguaje natural, es necesaria la utilización de algún tipo de representación semiótica, ya que son importantes para los fines de comunicación, así como para un mejor desarrollo de la actividad matemática. Por tanto como se muestra en el cuadro 17, en la columna de elementos de verificación, la diferencia entre las medias es equivalente a 0.5, por lo tanto en el pre-test, la diferencia de medias está en el intervalo 0.5 ± 0.6871 (segundo valor) y con un 95% de confianza, podemos concluir que no se encontró evidencia estadística de que las poblaciones sean distintas en cuanto a conocimientos académicos. De la misma manera se muestran los histogramas de reactivos y de las calificaciones (así como, las diferencias de reactivos correctos e incorrectos en Anexos 20 y 21) para el pre-test de los grupos tradicional y experimental en los cuadros 18 a 21, para fines de comunicación y un mejor entendimiento de la actividad matemática, tal como lo sostiene el autor.



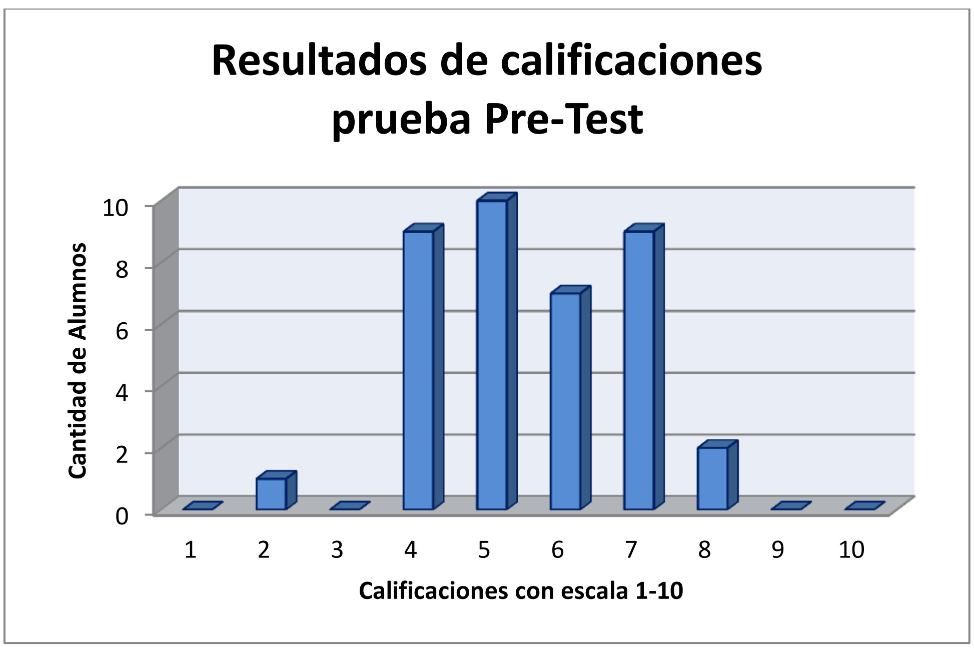
Cuadro 18. Histograma de reactivos correctos en la prueba pre-test. Grupo tradicional. Elaboración propia.



Cuadro 19. Histograma de calificaciones en la prueba pre-test. Grupo tradicional. Elaboración propia.



Cuadro 20. Histograma de reactivos correctos en la prueba pre-test. Grupo experimental. Elaboración propia.



Cuadro 21. Histograma de calificaciones en la prueba pre-test. Grupo experimental. Elaboración propia.

5.3 Análisis de clase del grupo tradicional

Para dar inicio a los análisis correspondientes a la fase “experimentación” de la ingeniería didáctica de Artigue (1995) que consiste en *“…poner en práctica la situación didáctica diseñada en la segunda fase…”,* para esta fase se trabajó con una metodología constructivista y al empezar con la reactivación de los conocimientos previos para el tema de estudio y mediante interacción docente-alumno, se observó que los alumnos presentan complicaciones para construir una integral definida a partir de la gráfica de una función algebraica y una recta establecida, que en otras palabras es determinar el área acotada bajo una curva, en esta parte del plan de clase, algunos alumnos mencionaron que la construcción de la integral definida, normalmente siempre la brinda el profesor, sin dar una explicación detallada de cómo llegar a la misma.

Por otro lado, al hacer la relación de área aproximada (sumas de Riemann) con área exacta (integral definida), se pudo observar que los alumnos, saben que la primera mencionada es únicamente para aproximarse a un valor, que en este caso es el valor de un área, pero en algunos casos, no se identifica de dónde es que proviene la estimación por medio de sumatorias de Riemann ya que avalan que solo siguen los ejemplos establecidos en su libro de texto o libreta de trabajo. En el caso del área exacta, la gran mayoría del grupo establece que son fáciles de calcular, ya que siguen las fórmulas propuestas en su formulario para la materia.

Posteriormente al momento de trabajar con la situación problemática del tema de estudio, haciendo la relación de área bajo la curva vs. sólidos de revolución en su cambio de interpretación de área a volumen, se propuso la función $f(x)=x$, posteriormente se preguntó “¿Cuál es la gráfica de función?”, donde se pudo observar en primera instancia que los alumnos presentaban algunas dificultades para graficar, a pesar de que, ya habían acreditado matemáticas IV y es una materia, que en su gran mayoría la temática requiere hacer gráficas de funciones algebraicas.

Para poder construir la función se les tuvo que recordar el método usual para graficar, la tabulación. Una vez generada la gráfica, como se muestra a continuación:

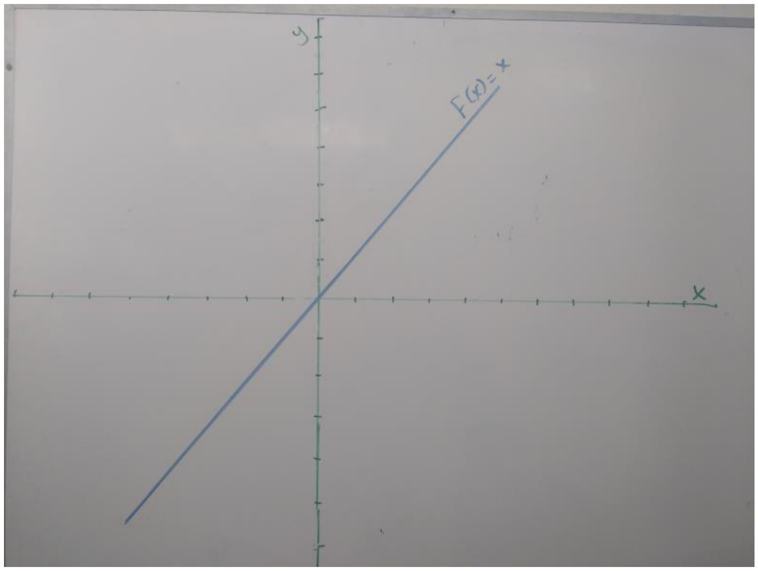


Imagen 3. Representación gráfica de la función $f(x)=x$*. Fotografía propia.*

Se preguntó, ¿Qué sucedería al hacer girar la función en el eje x? En dicho cuestionamiento se obtuvieron respuestas de todo tipo, enfocándose principalmente a la construcción de un sólido de revolución, después se les mencionó a los alumnos ¿Cómo podríamos calcular el área o volumen? Se pudo observar que los alumnos, identificaron que ya no se trataba de un área sino de un volumen, ya que se trabajaba con algo que tenía, altura, longitud y profundidad.

Posteriormente, se condujo tomando en cuenta las ideas propuestas por los alumnos para poder llegar a la construcción de la fórmula de un sólido de revolución, donde algunos de los alumnos, pudieron identificar una relación con los cortes circulares de un sólido de revolución con la suma de rectángulos en el área bajo la curva (sumas de Riemann), tomando esta referencia de los alumnos, se relacionó con la integral. Posteriormente, se les cuestionó que al hacer cortes verticales que era lo que se obtenía, a lo que algunos de los alumnos mencionaron, que se trataba de círculos, tomando esta idea, se condujo a la mención de que eran pequeños círculos con un pequeño grosor, los cuales eran pequeños cilindros, con esto, se logró llegar a la construcción de la fórmula como se muestra a continuación:

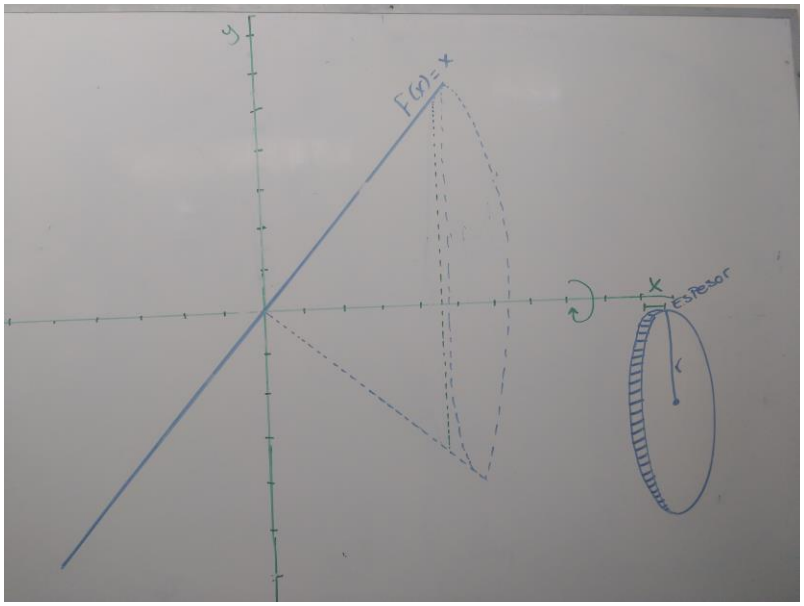


Imagen 4. Representación gráfica de la función $f(x)=x$, *girando respecto al eje de las abscisas. Fotografía propia.*

Al momento de trabajar con los ejercicios propuestos, se pudo identificar que los alumnos, prefieren evadir el bosquejo del sólido generado, ya que se les dificulta imaginar cómo es la figura que se forma, o en algunos otros casos, mencionaban que siempre se formaba la misma figura para todas las funciones algebraicas.

Otra de las problemáticas que se pudo observar, es que los alumnos tienen dificultades para despejar una función algebraica, al momento de tener que calcular el volumen de un sólido que se encuentra girando respecto al eje de las ordenadas, o en su defecto, lo resuelven como si fuese la rotación en el eje de las abscisas, y en la integral sólo le cambian a dy como se muestra en la siguiente imagen:

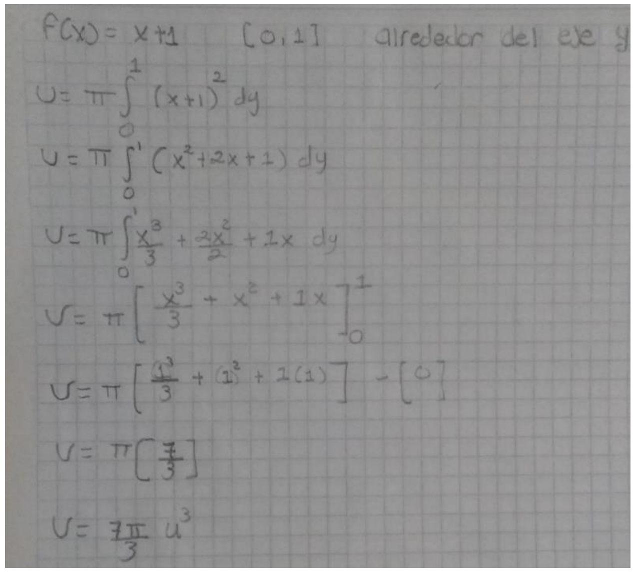


Imagen 5. Problemática en el desarrollo del volumen de un sólido de revolución, respecto al eje de las ordenadas. Fotografía propia.

Otra de las principales observaciones que se notó con el grupo tradicional, es que en su mayoría, resuelven los ejercicios de manera correcta, tratándose únicamente de rotaciones respecto al eje de las abscisas, por otra parte, se pudo observar que algunos alumnos para poder imaginarse el sólido en rotación, hacían el reflejo de la función algebraica respecto al eje de rotación, como se muestra a continuación:

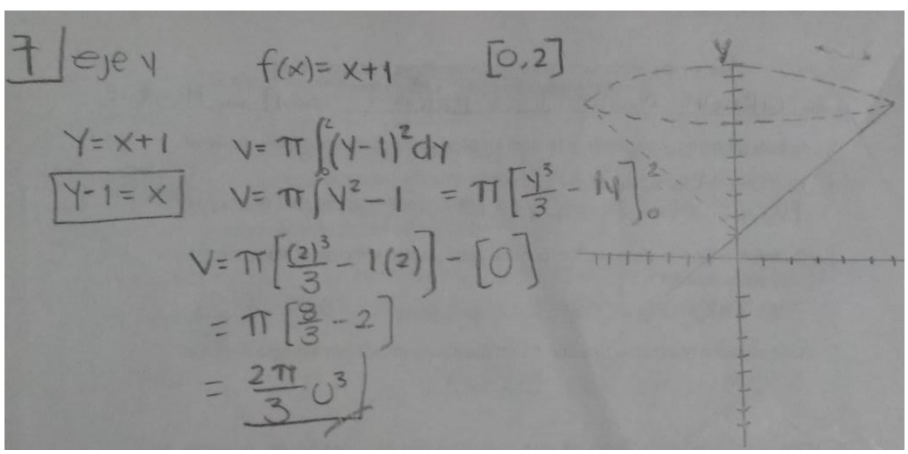


Imagen 6. Simetría de una función algebraica respecto al eje de las ordenadas. Fotografía propia.

Al trabajar con el método de arandelas, se observó que los alumnos identificaron rápidamente que ya no se trataba de una función algebraica análoga a las anteriores, sino de dos funciones algebraicas, las cuales estaban contenidas una dentro de la otra, en esta parte, se volvió a tener la misma interacción docente-alumno que se trabajó en el método de discos, para que los alumnos determinaran por si mismos cual era el radio mayor y cual el menor. En esta parte, los alumnos tuvieron una discusión acerca de los radios, donde se pudo observar, que algunos alumnos mencionaban que no se podía determinar y algunos otros, que el radio era la función que estaba arriba de la otra función algebraica, ambas representadas gráficamente en el pizarrón, como se muestra en la siguiente imagen:

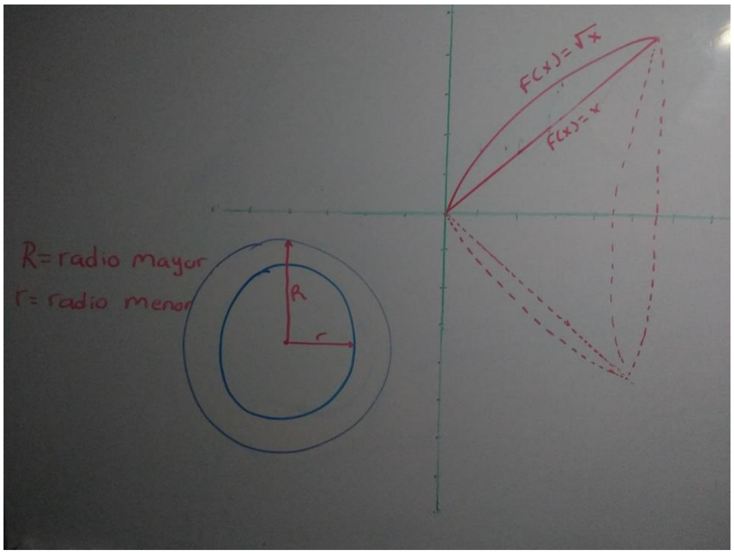


Imagen 7. Bosquejo de un sólido de revolución, considerando dos funciones algebraicas. Método de arandelas. Fotografía propia.

Al trabajar con este método, se observó que a los alumnos les parece más fácil resolver ejercicios relacionados con arandelas, ya que si consideran de forma errónea los radios, se pueden dar cuenta fácilmente en el resultado, ya que les puede quedar un volumen negativo y con el primer método (de discos) todo depende primordialmente del eje de rotación.

Al término de las actividades relacionadas con el tópico de estudio, se procedió a la construcción de significados, organización del conocimiento y evaluación del proceso, que forman parte de la fase final del plan diario de clases propuesto por Pimienta (2007) para la enseñanza del tema de estudio. En la mencionada fase, se seleccionaron de manera aleatoria cinco respuestas proporcionadas por los alumnos del grupo experimental, como se muestra en los cuadros 22 a 26 (Anexos 14, 15, 16, 17, 18).

¿Qué diferencia o relación existe entre la función $f(x)=x^3$ al hacerla rotar en el eje x y el eje y?	¿Se obtiene el mismo resultado?	En el método de arandelas ¿Qué sucedería de tomar los radios de manera inversa?	Determina los pasos para calcular el volumen de un sólido de revolución.
Una de las diferencias puede ser la representación gráfica y probablemente los valores negativos o positivos.	*No*	*Creo que será similar, solo que cambiarían las respuestas*	*1. Expresamos la gráfica junto con su reflejo. 2. Analizamos la figura que resultará. 3. Sacamos el volumen con ayuda de las funciones previamente señaladas. 4. Restamos los valores de x, sustituyéndolos en los intervalos (previamente dados)*

Cuadro 22. Resultados arrojados por una muestra de alumnos en clase de sólidos de revolución. Grupo tradicional. Elaboración propia.

¿Qué diferencia o relación existe entre la función $f(x)=x^3$ al hacerla rotar en el eje x y el eje y?	¿Se obtiene el mismo resultado?	En el método de arandelas ¿Qué sucedería de tomar los radios de manera inversa?	Determina los pasos para calcular el volumen de un sólido de revolución.
Que al momento de hacer el reflejo, cambia la forma del sólido.	*No, por ejemplo, al girarla en el eje x, sale forma de un cono, y al girarla en el eje y, tiene forma de jarrón.*	*Darían cifras negativas.*	*1. Analizar y detectar los datos. 2. Tabular para graficar. 3. Graficar el reflejo. 4. Proceder con la*

			fórmula de la función

Cuadro 23. Resultados arrojados por una muestra de alumnos en clase de sólidos de revolución. Grupo tradicional. Elaboración propia.

¿Qué diferencia o relación existe entre la función $f(x)=x^3$ al hacerla rotar en el eje x y el eje y?	*¿Se obtiene el mismo resultado?*	*En el método de arandelas ¿Qué sucedería de tomar los radios de manera inversa?*	*Determina los pasos para calcular el volumen de un sólido de revolución.*
Cambia o varía el resultado.	*No.*	*Se hace negativo y por lo tanto en incorrecto.*	*1. Se tabula.* *2. Se gráfica.* *3. Se hace el reflejo.* *4. Crear la función.* *5. Resolver la función.*

Cuadro 24. Resultados arrojados por una muestra de alumnos en clase de sólidos de revolución. Grupo tradicional. Elaboración propia.

¿Qué diferencia o relación existe entre la función $f(x)=x^3$ al hacerla rotar en el eje x y el eje y?	*¿Se obtiene el mismo resultado?*	*En el método de arandelas ¿Qué sucedería de tomar los radios de manera inversa?*	*Determina los pasos para calcular el volumen de un sólido de revolución.*
Se forma la misma figura pero en diferente dirección.	*La figura no cambia, sólo su posición, así que sería el mismo resultado*	*El resultado sería negativo.*	*1. Interpretando datos, se realiza la gráfica y figura.* *2. Se obtiene la integral a utilizar según las funciones.* *3. Se elevan al cuadrado las funciones en la integral.* *4. Se aplica la regla de integración.* *5. Se sustituyen los valores en la integral*

			de acuerdo a los intervalos. *6. Se hacen las operaciones que se indiquen (multiplicación, suma, resta, división).* *7. Se obtiene el resultado.*

Cuadro 25 Resultados arrojados por una muestra de alumnos en clase de sólidos de revolución. Grupo tradicional. Elaboración propia.

¿Qué diferencia o relación existe entre la función $f(x)=x^3$ al hacerla rotar en el eje x y el eje y?	*¿Se obtiene el mismo resultado?*	*En el método de arandelas ¿Qué sucedería de tomar los radios de manera inversa?*	*Determina los pasos para calcular el volumen de un sólido de revolución.*
El resultado varía y la gráfica cambia de dirección.	*No.*	*El resultado se hace negativo, por lo tanto es incorrecto.*	*1. Se tabula.* *2. Se traza la gráfica.* *3. Se hace el reflejo.* *4. Se hacen los cortes.* *5. Se realiza la función.* *6. Se resuelve el problema con la función.*

Cuadro 26. Resultados arrojados por una muestra de alumnos en clase de sólidos de revolución. Grupo tradicional. Elaboración propia.

Duval (2004) menciona que las actividades relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas, involucran diversos aspectos cognitivos al momento de resolver un problema determinado, como la conceptualización, el razonamiento y la compresión. Para esto, destaca que las representaciones semióticas activan los procesos matemáticos en un individuo. Por tanto, como se observa en las imágenes 4 y 7, el tener este tipo de visualización ayuda a los alumnos a tener un mejor entendimiento de lo que es la interpretación de un sólido de revolución, tal como lo refleja la imagen 6. De igual manera, al tener una representación visual de un sólido de revolución, los alumnos lograron deducir la fórmula para determinar el volumen de un sólido de revolución.

Así mismo, Duval (2006) menciona que el registro simbólico es utilizado cuando el objeto matemático necesita representarse en una matemática abstracta, es decir, cuando se operan cantidades numéricas o algebraicas. Por tanto, como se presenta en la imagen 5, hay evidencia de que algunos de los alumnos tienen dificultad para realizar despejes de variables, respecto a un eje determinado para proceder con la integración y así poder determinar el volumen correcto.

Por otro lado, Chevallard (1991) señala que la vigilancia epistemológica, es la distancia existente entre el objeto de conocimiento y el objeto de enseñanza, la cual está determinada por las transformaciones que el saber sabio sufre a los efectos de ser comprendido por un sujeto o un determinado grupo de aprendizaje como ocurre en el aula de clases. Para esto, la enseñanza que tuvo este grupo, fue de manera tradicional, en la cual se puede evidenciar que a los alumnos se les dificulta realizar de manera gráfica la rotación de una función algebraica respecto a un eje determinado. Así mismo, el autor menciona que el saber enseñando se refiere a la representación que hace el alumno del objeto matemático o en otras palabras, el saber tal y como es enseñado. Por tanto, como evidencian los cuadros 22 a 26, los alumnos representan su conocimiento tal y como les fue enseñado.

5.4 Análisis de clase del grupo experimental

Continuando con los análisis correspondientes a la fase “experimentación” de la ingeniería didáctica de Artigue (1995) al igual como sucedió en determinados momentos de clase en el grupo tradicional, se trabajó con una metodología constructivista, donde se pudo observar que el grupo experimental de forma semejante al grupo tradicional era en general muy distraído. Al comenzar con la reactivación de los conocimientos previos, los alumnos en general presentaron la misma problemática que el grupo tradicional al no poder construir la integral definida a partir de la gráfica expuesta en el pizarrón.

Posteriormente, se procedió a trabajar con la situación problemática en la que se les presentó la función $f(x) = x$ para hacer la relación de área bajo la curva vs. sólidos de revolución, después se preguntó ¿Cuál es la gráfica de función?, donde se pudo observar en primera instancia al igual que con los alumnos del grupo tradicional que se presentaban algunas dificultades para graficar, a pesar de que ya habían acreditado matemáticas IV y es una materia que en su gran mayoría temática se necesitan hacer graficas de funciones algebraicas. Para poder construir la función se les tuvo que recordar de la misma manera que se hizo con el grupo tradicional el método usual para graficar, la tabulación. Una vez realizada la gráfica por parte de los alumnos, se les presentó la función con el apoyo del recurso Geogebra como se muestra a continuación:

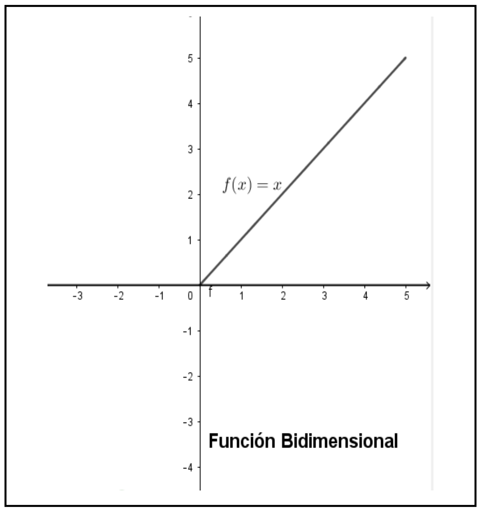


Imagen 8. Gráfica de una función lineal. Función bidimensional. Elaboración propia.

En la gráfica mostrada anteriormente, se les cuestionó a los alumnos acerca de ¿Qué pasaría si la función se encontrara girando respecto al eje de las abscisas?, dentro de este cuestionamiento se tuvieron diversas respuestas, las cuales estaban netamente relacionadas con el tópico de estudio como se muestra en la siguiente imagen:

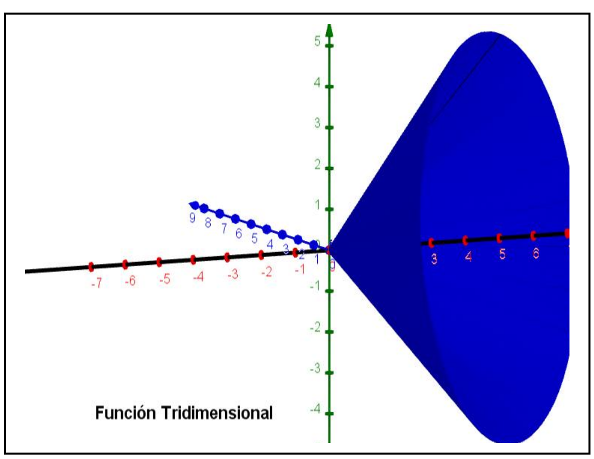


Imagen 9. Gráfica de una función lineal en rotación. Función tridimensional. Elaboración propia.

Los alumnos al observar la imagen mostrada con anterioridad se les cuestionó de la misma manera que se hizo con el grupo tradicional, ¿Cómo podríamos calcular el área o volumen? Y al igual que el grupo tradicional, se observó que mencionaron que se trataba de un volumen, ya que contenía las características de altura, longitud y profundidad. Una vez consideradas las ideas de los alumnos, se condujo a la construcción de la fórmula, donde algunos de los alumnos mencionaron que para determinar el volumen de la figura se necesitaba hacer cortes como los realizados en área bajo la curva (sumas de Riemann), tomando esta referencia de los alumnos se relacionó con la integral, posteriormente, se les cuestionó que al hacer cortes verticales que era lo que se obtenía, a lo que algunos de los alumnos mencionaron que se trataba de círculos con volumen, tomando esta idea se les mencionó que se trataba de pequeños cilindros, lo cual fue plasmado en el pizarrón como se muestra a continuación:

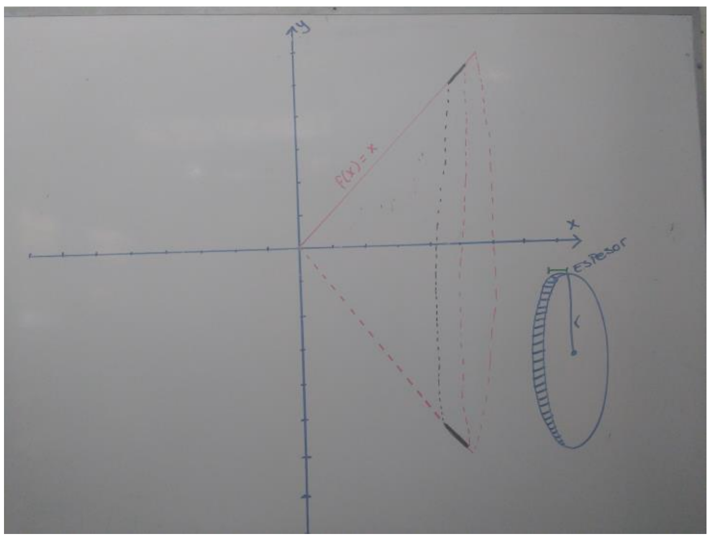


Imagen 10. Representación gráfica de la función $f(x) = x$, girando respecto al eje de las abscisas. Fotografía propia.

Consecutivamente, se mencionó *"sí dijeron que la figura era un volumen, ¿Cómo pueden calcular el volumen de los pequeños cilindros?"* a lo que rápidamente los alumnos mencionaron la fórmula para determinar el volumen de un cilindro, tomando esta referencia, se empezó a relacionar cada uno de los elementos que intervienen en el cálculo del volumen de un cilindro con el pequeño cilindro mostrado en la imagen 10, hasta lograr construir la fórmula para determinar el volumen de un sólido de revolución.

Posteriormente, se planteó la misma situación inicial pero ahora en el eje de las ordenadas y se observó que los alumnos presentan dificultades para despejar una función que originalmente depende de x. En cuanto a la visualización de los sólidos ya sea en el eje de las abscisas u ordenadas, se observó que los alumnos recurren a los trazos simétricos de la función graficada, además, se puede observar que gracias a la interacción con el recurso Geogebra, los alumnos al momento de hacer sus respectivas representaciones en sus cuadernos hacen los cortes circulares para no cometer errores hacia al cálculo del volumen de un sólido de revolución. Pero por otra parte, se puede observar que al igual que el grupo tradicional, algunos de los alumnos de este grupo resuelven el sólido respecto al eje de las abscisas y en la integral solo cambian el dx por el dy.

Por otro lado, para que los alumnos tuvieran como significado lo que es un sólido de revolución y su aplicabilidad con la vida cotidiana, se les presentó un video como se muestra en la imagen 11 acerca de cómo se formaba una figura a partir de la rotación.

Imagen 11. Elaboración de una figura tridimensional a partir de la rotación. Fotografía propia.

Dentro de lo cual, se pudo observar que los alumnos relacionaban el video con la rotación de una función algebraica respecto al eje de las abscisas, y empezaban a tener una mejor conceptualización de lo que era un sólido de revolución, lo cual concuerda con lo planteado con anterioridad por Duval (1999), *"…para comprender un concepto, se requiere de una representación diferente a la del lenguaje natural, ya sea algebraico, geométrico, gráfico, simbólico, tabular, esquemático, que toman el estatus de lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar las relaciones y las operaciones…"*, a partir de la visualización del video, se pudo observar que al momento de interactuar con diversos objetos que son utilizados en la vida cotidiana como los mostrados en la imagen 12, los alumnos pudieron identificar con gran rapidez si eran o no un sólido de revolución y pudieron explicar por qué no lo era.

Imagen 12. Figuras interactivas bidimensionales y tridimensionales. Fotografía propia.

Posteriormente, al trabajar con los ejercicios relacionados con el tópico de estudio, se observó que los alumnos tuvieron una excelente representación de los sólidos generados ya sea en el eje de las ordenadas o el de las abscisas, pero como se mencionó anteriormente, hubo algunos casos que se les dificultó el despeje de la función algebraica y por consecuencia no llegaron al resultado correcto. Pero en su gran mayoría sucedió lo contrario llegando a resultados correctos.

Una característica que se observó en este grupo, fue la similitud con el grupo tradicional respecto a la interpretación del segundo método (arandelas) de los sólidos de revolución, ya que se tuvo una discusión muy similar a la del grupo tradicional, pero algo que se pudo observar fue que un alumno sugirió que para saber que función determinaba el radio más grande, se necesitaba evaluar con los valores que les da el problema, motivo por el cual, el resto de los compañeros del grupo analizaron las posibles alternativas de solución, y por su cuenta, dedujeron que en algunos casos se tenía que sumar o restar las funciones presentadas. Al trabajar con este método se observó que los alumnos en un 50% aproximadamente, comentaron que era muy sencillo trabajar con el método de arandelas, y el resto del grupo comentó que cualquier método es muy sencillo de trabajar, solo con la excepción de los despejes necesarios para el primer método en el caso de una función que rota respecto al eje de las ordenadas.

Al término de las actividades relacionadas con el tópico de estudio, se procedió a la construcción de significados, organización del conocimiento y evaluación del proceso, que forman parte de la fase final del plan diario de clases propuesto por Pimienta (2007) para la enseñanza del tema de estudio. En la mencionada fase se seleccionaron de manera aleatoria cinco respuestas proporcionadas por los alumnos del grupo experimental como se muestra en los cuadros 27 a 31 (Anexos 9, 10, 11, 12, 13).

¿Qué diferencia o relación existe entre la función $f(x)=x^3$ al hacerla rotar en el eje x y el eje y?	*¿Se obtiene el mismo resultado?*	*En el método de arandelas ¿Qué sucedería de tomar los radios de manera inversa?*	*Determina los pasos para calcular el volumen de un sólido de revolución.*
Se forma la misma figura, ya que la diferencia es en el proceso de encontrar su volumen. Ya que sería $v=\pi\int x^3$ si gira en x, mientras que si gira en y, sería $y=x^3=\sqrt[3]{y}=x$	*No, como antes se mencionó su fórmula y procedimiento es diferente.*	*Si se toma el menor primero y el mayor después, el resultado sería negativo.*	*1.Determinar cuál es el eje (x o y)* *2. Determinar el intervalo.* *3. Determinar si es una esfera o cilindro.* *4. Utilizar la fórmula.* $dv=\pi\int_a^b f(x)\,dx \text{ o } dy$ *5. Integrar* *6. Sustituir variables.* *7. Restar y obtener resultados.*

Cuadro 27. Resultados arrojados por una muestra de alumnos en clase de sólidos de revolución. Grupo experimental. Elaboración propia.

¿Qué diferencia o relación existe entre la función $f(x)=x^3$ al hacerla rotar en el eje x y el eje y?	*¿Se obtiene el mismo resultado?*	*En el método de arandelas ¿Qué sucedería de tomar los radios de manera inversa?*	*Determina los pasos para calcular el volumen de un sólido de revolución.*
Las figuras que se obtienen en los diferentes ejes.	*No, el sentido es diferente.*	*Se obtienen volúmenes negativos.*	*1. Identificar eje de giro.* *2. Identificar intervalos.* *3. Identificar la*

			función. *4. Integrar función.* *5. Sustituir los intervalos.* *6. Restar.*

Cuadro 28. Resultados arrojados por una muestra de alumnos en clase de sólidos de revolución. Grupo experimental. Elaboración propia.

¿Qué diferencia o relación existe entre la función $f(x) = x^3$ al hacerla rotar en el eje x y el eje y?	*¿Se obtiene el mismo resultado?*	*En el método de arandelas ¿Qué sucedería de tomar los radios de manera inversa?*	*Determina los pasos para calcular el volumen de un sólido de revolución.*
La figura cambia de plano y cambia el volumen.	*No, ya que pasa a ser de $x^3 = y$ a ser $x = \sqrt[3]{y}$, lo cual da resultados distintos.*	*Sale un resultado negativo, por lo tanto es incoherente, sin embargo es el mismo resultado en negativo.*	*1. Identificar datos (función e intervalos)* *2. Usar la fórmula* $V = \pi \int_a^b x^2 dx$ *3. Integrar el resultado del paso anterior.* *4. Evaluar la función integrada con b y a.* *5. Restar las funciones integradas restando la de b con a.*

Cuadro 29. Resultados arrojados por una muestra de alumnos en clase de sólidos de revolución. Grupo experimental. Elaboración propia.

¿Qué diferencia o relación existe entre la función $f(x)=x^3$ al hacerla rotar en el eje x y el eje y?	¿Se obtiene el mismo resultado?	En el método de arandelas ¿Qué sucedería de tomar los radios de manera inversa?	Determina los pasos para calcular el volumen de un sólido de revolución.
Cambia el volumen y el alargamiento del sólido.	*No.*	*Los resultados serían negativos.*	*1. Determinar intervalos.* *2. Determinar fórmula* $V=\pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$ *3. Integrar la función.* *4. Sustituir datos*

Cuadro 30. Resultados arrojados por una muestra de alumnos en clase de sólidos de revolución. Grupo experimental. Elaboración propia.

¿Qué diferencia o relación existe entre la función $f(x)=x^3$ al hacerla rotar en el eje x y el eje y?	¿Se obtiene el mismo resultado?	En el método de arandelas ¿Qué sucedería de tomar los radios de manera inversa?	Determina los pasos para calcular el volumen de un sólido de revolución.
Que al ser rotada en el eje x queda igual y en el eje y cambiaría por una raíz cubica.	*No, cambia la gráfica y el resultado.*	*Quedarían resultados negativos.*	*1. se utiliza la fórmula* $V=\pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$ *2. Se cambian los valores de b, a y la función de x.* *3. Se integra.* *4. Se restan los resultados que se obtuvieron.*

Cuadro 31. Resultados arrojados por una muestra de alumnos en clase de sólidos de revolución. Grupo experimental. Elaboración propia.

Duval (1999) señala que el funcionamiento cognitivo que se requiere para comprender algún concepto, requiere de una representación diferente a la del lenguaje natural, ya sea algebraico, geométrico, gráfico, simbólico, tabular, esquemático, entre otros, que toman el estatus de lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar las relaciones y las operaciones. Por tanto, como se muestra en la imagen 8 y 9 se evidencia que este tipo de representaciones ayudan a los alumnos a tener una mejor comprensión, así como, una mejor visualización de lo que es el concepto del tópico de estudio, para así, poder construir su propio conocimiento y por consecuencia llegar a la fórmula para determinar el volumen de un sólido de revolución. Además, como se muestra en la imagen 11 la cual, según Duval (2004) es un registro visual icónico, permite evidenciar que los alumnos comprenden de excelente manera lo que es un sólido de revolución y así mismo, lo relacionan con el medio que los rodea, encontrando efectividad en el proceso de visualización del tema de estudio.

Por otro lado, Duval (1999) menciona que la transformación de conversión se caracteriza por hacer una transformación entre dos registros totalmente distintos. Por tanto, como se mencionó con anterioridad se evidencia que los alumnos lograron de manera excelente hacer el bosquejo de los sólidos de revolución, y poder determinar el volumen del sólido generado en cada uno de los ejercicios propuestos, partiendo de un lenguaje escrito a un lenguaje gráfico en el caso del bosquejo y de un lenguaje algebraico a uno numérico para el volumen obtenido, lo cual coincide con lo planteado por Duval (1999), la transformación de tratamiento, que la define como la transformación dentro del mismo registro (numérico y algebraico).

Según Chevallard (1997) señala que el saber académico se refiere a la interpretación del profesor acerca del saber sabio y como enseñarlo, para posteriormente ser aplicado en el aula. Por ende, se evidencia que el proponer dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje diversos objetos que sean de uso cotidiano, el alumno relaciona el tópico de estudio con la vida diaria tal como es mostrado en la imagen 12, y por consecuencia, se logra tener un mejor entendimiento del tema.

Así mismo, Chevallard (1997) menciona que el saber enseñado se refiere a la representación que hace el alumno del objeto matemático, o en otras palabras, el saber tal y como es enseñado. Por tanto, como evidencian los cuadros 27 a 31, los alumnos representan su conocimiento tal y como les fue enseñado y así mismo, logran diferenciar entre el método de discos y el de arandelas.

5.5 Análisis de la prueba post-test

Para dar inicio a los análisis correspondientes a la cuarta fase "análisis a posteriori y evaluación" de Artigue (1995), que consiste en *"…hacer uso de los datos recogidos en la observación, así como las observaciones y producciones de los estudiantes en clase…",* se tomaron los datos estadísticos generados en la prueba post-test por el grupo experimental y el grupo tradicional, se tomó como base la prueba de hipótesis para t-test por medio de intervalos de confianza para la diferencia de medias. En dicha prueba y como se mencionó en el segundo instrumento, se consideran elementos primordiales que ayudan a fortalecer la comprobación de una hipótesis, tales como: a) media de la muestra; b) distribución del error estándar; c) desviación estándar de la muestra; d) margen de error; e) intervalos de confianza; f) valores *t* críticos para un alfa dado (distribución *t* de student); g) tamaño de la muestra; h) grados de libertad e i) hipótesis alternativa y nula.

En el instrumento utilizado para el post-test se realizó la prueba de hipótesis para t- test, ya que se trabajó con dos muestras de variables independientes, el grupo tradicional y el grupo experimental. Para proceder con la comprobación de la hipótesis alternativa al igual que con el análisis para el primer instrumento, se tuvo que realizar primeramente el cálculo de algunas de las medidas de tendencia central y de dispersión como:

- La media aritmética del grupo tradicional.
- La media aritmética del grupo experimental.
- La media general de ambos grupos.
- La desviación estándar del grupo tradicional.
- La desviación estándar del grupo experimental
- La desviación estándar estimada de ambos grupos aleatorios.
- Diferencia de medias aritméticas.

Para el cálculo de los elementos antes mencionados, se consideraron las calificaciones obtenidas en el post-test que son mostradas en el siguiente cuadro:

GRUPO EXPERIMENTAL		*GRUPO TRADICIONAL*	
CALIFICACIONES		*CALIFICACIONES*	
PRE-TEST	*POST-TEST*	*PRE-TEST*	*POST-TEST*
4.3	*7.4*	*4.3*	*1.6*
6.4	*7.4*	*2.9*	*4.7*
4.3	*10.0*	*3.6*	*5.8*
5.7	*4.7*	*5.7*	*6.3*

6.4	*8.4*	*7.1*	*6.8*
7.9	*8.9*	*4.3*	*2.6*
6.4	*7.4*	*6.4*	*2.6*
4.3	*8.9*	*3.6*	*6.8*
6.4	*6.8*	*5.7*	*4.2*
8.6	*7.9*	*5.0*	*5.8*
7.1	*10.0*	*1.4*	*5.3*
6.4	*10.0*	*5.0*	*4.2*
4.3	*9.5*	*7.9*	*8.4*
7.9	*8.4*	*2.9*	*4.7*
4.3	*7.4*	*7.9*	*8.9*
2.9	*9.5*	*7.1*	*5.8*
8.6	*6.3*	*5.7*	*5.8*
5.0	*8.9*	*7.1*	*7.4*
5.7	*8.4*	*5.0*	*6.8*
7.1	*8.9*	*7.1*	*6.3*
4.3	*7.9*	*5.0*	*6.8*
5.7	*9.5*	*4.3*	*4.2*
5.7	*8.9*	*6.4*	*8.9*
4.3	*7.4*	*6.4*	*5.8*
4.3	*8.4*	*4.3*	*5.8*
7.1	*7.4*	*5.7*	*4.7*
7.1	*5.8*	*5.7*	*4.2*
6.4	*6.3*	*5.7*	*4.2*
4.3	*9.5*	*5.0*	*4.2*
7.1	*8.9*	*6.4*	*5.8*
7.9	*5.3*	*5.0*	*6.8*
5.0	*10.0*	*5.0*	*5.3*
5.0	*6.3*	*3.6*	*3.2*
6.4	*7.9*	*5.0*	*3.7*
5.7	*7.4*	*5.0*	*6.3*
7.1	*8.4*	*5.0*	*5.8*
5.7	*8.9*	*8.6*	*7.4*
5.0	*5.8*	*3.6*	*2.1*
5.0	*8.4*		
2.9	*7.9*		
TOTAL DE ALUMNOS			
40	*40*	*38*	*38*

Cuadro 32. Calificaciones obtenidas en las pruebas post-test y pre-test. Elaboración propia.

Al realizar los cálculos correspondientes se obtuvieron los datos mostrados a continuación:

ANÁLISIS DE DISTRIBUCIÓN EN PRUEBA POST-TEST POR MEDIO DE LA DISTRIBUCIÓN T DE STUDENT					
Prueba de Hipótesis para T- test					
SIGNIFICANCIA 95% α=0.05			*GRADOS DE LIBERTAD= 38 ESTUDIANTES*		
H0; EXPERIMENTAL ≤ TRADICIONAL					
H1; EXPERIMENTAL > TRADICIONAL					
Media	*valor*	*Desviación Estándar*	*valor*	*Elementos de verificación*	*Valor*
Tradicional	5.4	*Tradicional*	1.76	*Desviación promedio*	0.3579
Experimental	8.0	*Experimental*	1.36	*Intervalo de confianza*	0.6035
General	6.8	*General*	2.04	*Diferencia de medias*	2.6

Cuadro 33. Resultados arrojados para la comprobación de hipótesis por diferencias de medias en prueba post-test. Elaboración propia.

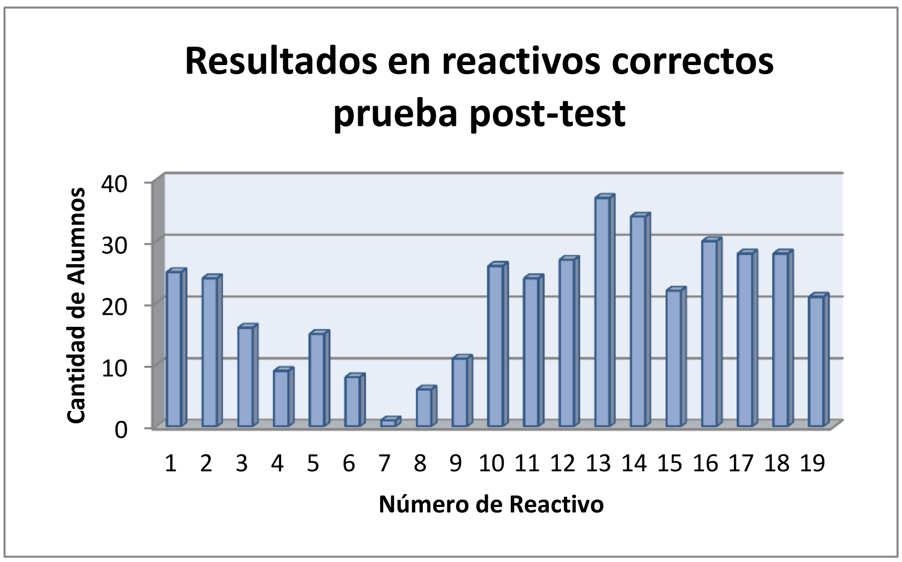
Posteriormente, para dar paso a la comprobación de hipótesis alternativa se ocupó:

- El tamaño de las muestras, las cuales son treinta y ocho para el grupo tradicional y cuarenta para el grupo experimental.
- El tipo de distribución t de student en esta prueba, es de una cola, por la hipótesis alterna de superioridad.
- El cálculo de los grados de libertad obtenidos de sustituir los valores de nuestras variables independientes, en la fórmula mostrada en el cuadro 15.
- El Valor de α para el tipo de distribución seleccionada, con $\alpha = 1.686$ que corresponde al 95% de significancia, para una distribución de una cola en el caso de la prueba post-test.
- El cálculo del margen de error o error estándar a partir de la fórmula mostrada en el cuadro 15.
- El intervalo de confianza para la comprobación de hipótesis alternativa.

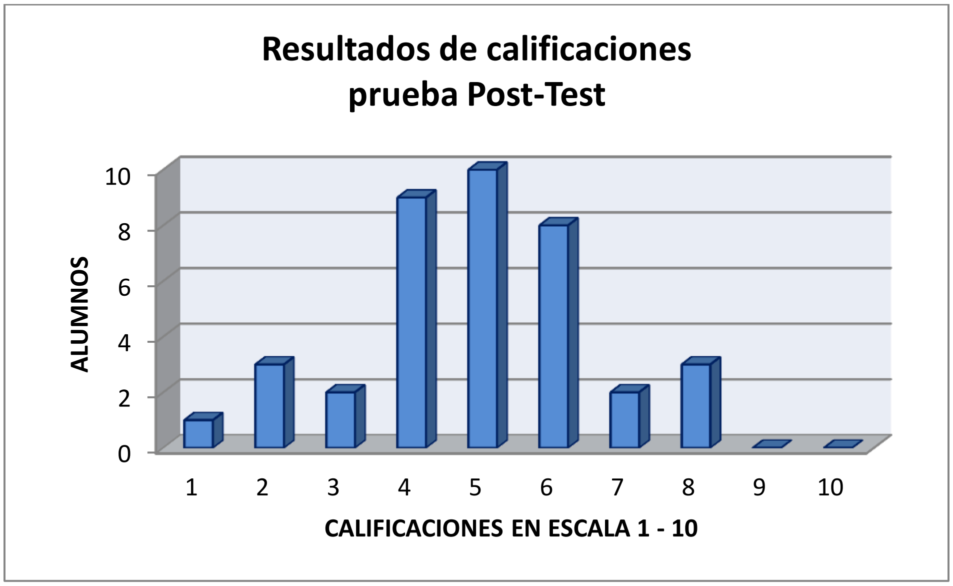
Para el análisis de la prueba post-test, se estableció como hipótesis alterna que la variable aleatoria de la muestra experimental es superior al grupo tradicional (i.e., distribución con una cola en 0.05 para n=38 +40).

El intervalo de confianza para el post-test es el tercer valor mostrado en la quinta columna, el cual está conformado por el t-valor multiplicado ($\alpha = 1.687$ ya que en este caso son treinta y ocho grados de libertad) por la distribución estándar de la diferencia (primer valor), los cuales nos ayudan a poder encontrar la estimación del intervalo de confianza.

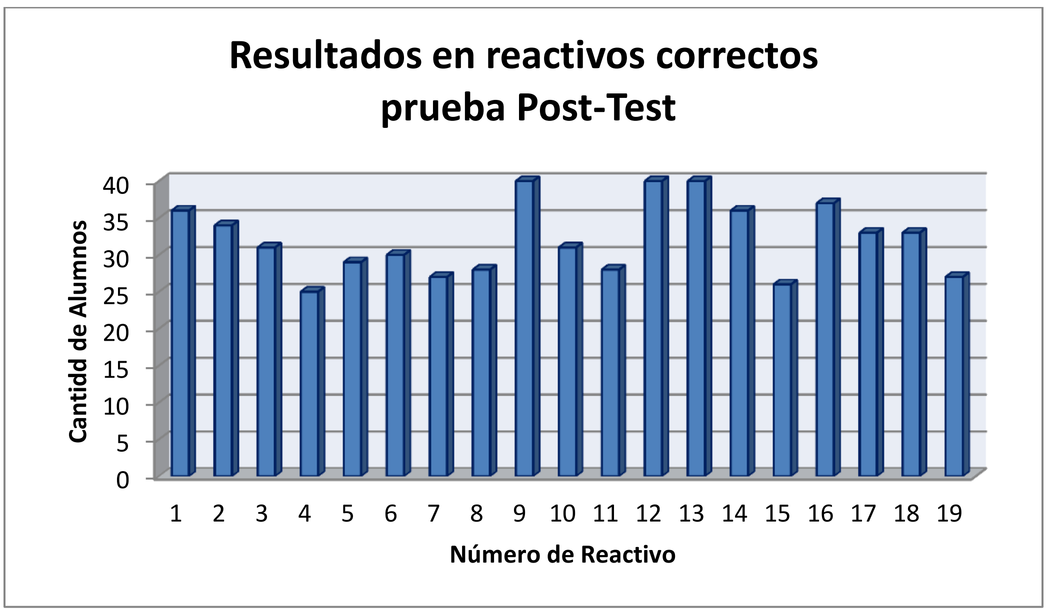
Duval (1991) menciona que para expresar un resultado que sea distinto al lenguaje natural, es necesaria la utilización de algún tipo de representación semiótica, ya que son importantes para los fines de comunicación, así como, para un mejor desarrollo de la actividad matemática. Por tanto, como se muestra en el cuadro 33 en la columna de elementos de verificación, la diferencia entre las medias es equivalente a 2.6, por lo tanto en el post-test la diferencia de medias está fuera del intervalo $2.6 + 1.687$ (segundo valor) y con un 95% de confianza, podemos concluir que se encontró evidencia de que la variable aleatoria de la distribución experimental es superior a la de la tradicional. De la misma manera, se muestran los histogramas de reactivos y de las calificaciones (así como, las diferencias de reactivos correctos e incorrectos en Anexos 22 y 23) para el post-test de los grupos tradicional y experimental en los cuadros 34 a 37 para fines de comunicación y un mejor entendimiento de la actividad matemática tal como lo sostiene el autor.



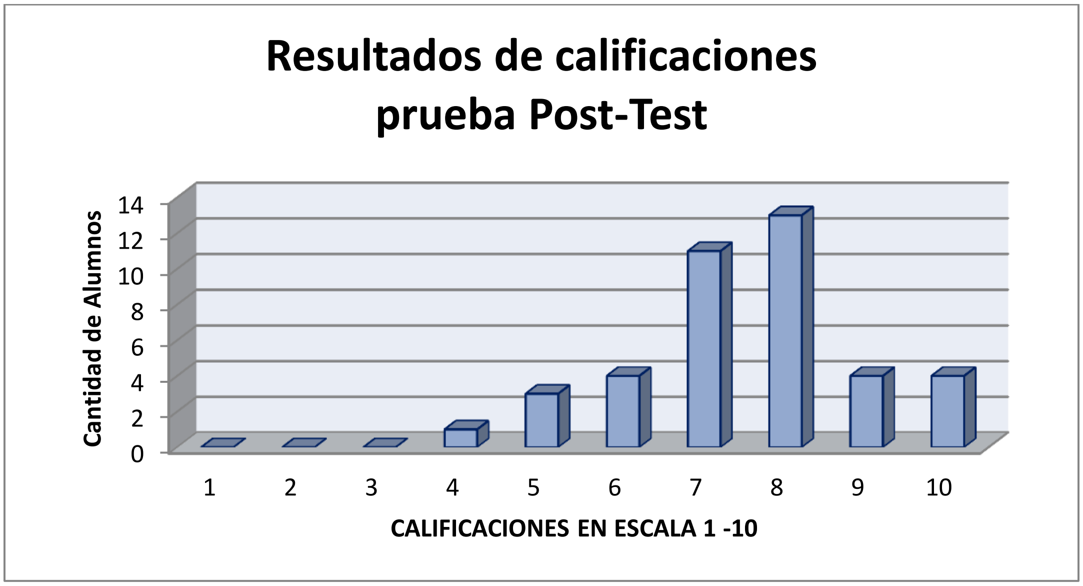
Cuadro 34. Histograma de reactivos correctos en la prueba post-test. Grupo tradicional. Elaboración propia.



Cuadro 35. Histograma de calificaciones en la prueba pre-test.
Grupo tradicional. Elaboración propia.



Cuadro 36. Histograma de reactivos correctos en la prueba post-test.
Grupo experimental. Elaboración propia.



Cuadro 37. Histograma de calificaciones en la prueba post-test. Grupo experimental. Elaboración propia.

5.6 Confrontación de los análisis de las pruebas pre-test y post-test

Continuando con los análisis correspondientes a la cuarta fase de la ingeniería didáctica de Artigue (1995) se realizó una confrontación entre los análisis correspondientes al pre-test y los análisis del post-test, así como también la validación de las hipótesis formuladas en la investigación. Para esto, en el cuadro 38 se muestran las catorce pruebas de hipótesis asociadas cada una de las preguntas del pre-test. La prueba de hipótesis nula es, que no hubo una diferencia estadísticamente significativa (con una significancia del 95%) en la frecuencia de éxito en la población experimental para la pregunta correspondiente, es decir, que no existe evidencia relevante de que en el pre-test el grupo experimental fuera mejor que el tradicional al responder cada una de las catorce preguntas, salvo en la número 6 (marcada en negritas). En las preguntas 2 y 4 no hubo ninguna respuesta correcta, y en la 8, todos la respondieron acertadamente, por lo que en estas tres preguntas, las pruebas de hipótesis correspondientes no aportan información significativa.

Relación de respuestas correctas en la prueba pre-test.							
No. de Pregunta	Grupo tradicional	Grupo experimental	Grupo tradicional	Grupo experimental	E. E.	D. F.	M. E.
1	13/38	14/40	0.34	0.35	0.108	-0.01	0.2181
2	0/38	0/40	0.00	0.00	0.000	---	---
3	9/38	15/40	0.24	0.38	0.103	-0.14	0.2085
4	0/38	0/40	0.00	0.00	0.000	---	---
5	26/38	31/40	0.68	0.78	0.100	-0.09	0.2029
6	14/38	24/40	0.37	0.60	0.110	**-0.23**	**0.2229**
7	28/38	29/40	0.74	0.73	0.100	0.01	0.2033
8	38/38	40/40	1.00	1.00	0.000	---	---
9	30/38	30/40	0.79	0.75	0.095	0.04	0.1927
10	26/38	23/40	0.68	0.58	0.109	0.11	0.2198
11	30/38	33/40	0.79	0.83	0.089	-0.04	0.1808
12	23/38	31/40	0.61	0.78	0.103	-0.17	0.2088
13	24/38	30/40	0.63	0.75	0.104	-0.12	0.2104
14	21/38	25/40	0.55	0.63	0.111	-0.07	0.2251

Cuadro 38. Relación de respuestas correctas en la prueba pre-test. (E. E, error estándar; D.F., Diferencia de Frecuencias; M.E, margen de error) Grupos tradicional y experimental. Elaboración propia.

En cambio, en el cuadro 39 se presenta la relación de respuestas correctas para el post-test, en el cual, se realizaron diecinueve pruebas de hipótesis para comparar las frecuencias de acierto en cada una de las preguntas del test. Se puede observar que en general, las frecuencias de acierto mejoraron para ambos grupos, no obstante la prueba de hipótesis nula fue rechazada para once de las preguntas, lo cual representa la existencia de evidencia estadística de la validez de la hipótesis alterna, i.e., que sí existe una diferencia relevante a favor de la frecuencia de aciertos del grupo experimental respecto al grupo tradicional en las preguntas 1 a la 9, así como la 12 y la 16.

Post-test respuestas correctas							
No. de Pregunta	Grupo tradicional	Grupo experimental	Grupo tradicional	Grupo experimental	E. E.	D. F.	M. E.
1	25/38	36/40	0.66	0.90	0.090	**0.24**	**0.1519**
2	24/38	34/40	0.63	0.85	0.096	**0.22**	**0.1621**
3	16/38	31/40	0.42	0.78	0.104	**0.35**	**0.1744**
4	9/38	25/40	0.24	0.63	0.103	**0.39**	**0.1731**
5	15/38	29/40	0.39	0.73	0.106	**0.33**	**0.1784**
6	8/38	30/40	0.21	0.75	0.095	**0.54**	**0.1599**
7	1/38	27/40	0.03	0.68	0.078	**0.65**	**0.1318**
8	6/38	28/40	0.16	0.70	0.094	**0.54**	**0.1571**

9	11/38	40/40	0.29	1.00	0.074	**0.71**	**0.1236**
10	26/38	31/40	0.68	0.78	0.100	0.09	0.1684
11	24/38	28/40	0.63	0.70	0.107	0.07	0.1792
12	27/38	40/40	0.71	1.00	0.074	**0.29**	**0.1236**
13	37/38	40/40	0.97	1.00	0.026	0.03	0.0436
14	34/38	36/40	0.89	0.90	0.069	0.01	0.1155
15	22/38	26/40	0.58	0.65	0.110	0.07	0.1848
16	30/38	37/40	0.79	0.93	0.078	**0.14**	**0.1313**
17	28/38	33/40	0.74	0.83	0.093	0.09	0.1568
18	28/38	33/40	0.74	0.83	0.093	0.09	0.1568
19	21/38	27/40	0.55	0.68	0.110	0.12	0.1840

Cuadro 39. Relación de respuestas correctas en la prueba post-test. (E. E, error estándar; D.F., Diferencia de Frecuencias; M.E, margen de error) Grupos tradicional y experimental. Elaboración propia.

Duval (1991) menciona que para expresar un resultado que sea distinto al lenguaje natural, es necesaria la utilización de algún tipo de representación semiótica, ya que son importantes para los fines de comunicación, así como, para un mejor desarrollo de la actividad matemática. Por tanto, como se muestra en el cuadro 38, se evidencia que ambos grupos de estudio son semejantes en cuanto a nivel de conocimientos relacionados con el tema de estudio, en cambio, en el cuadro 39, se evidencia que una vez aplicada la situación didáctica para la enseñanza del tema de sólidos de revolución, en su comparación de enseñanzas tradicional vs. experimental, se evidencia que el grupo experimental es superior al grupo tradicional en cuanto a los aciertos obtenidos en la prueba post-test.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

6.1 Conclusiones

En este trabajo se abordó la enseñanza del tema de sólidos de revolución desde dos perspectivas diferentes, la primera de manera clásica y la segunda con el apoyo del recurso tecnológico graficador Geogebra, en sus fases bidimensional y tridimensional. De la investigación se concluye que al tener como apoyo recursos tecnológicos en este caso, los gráficadores, ayuda a que los alumnos mejoren su cognición visual (asociada a habilidades visuales, pero también de representación, etc.), misma que desarrolla la habilidad de reconocer objetos y sus respectivas transformaciones (Cavanagh, 2011) en este caso, el cambio de espacio en la respectiva interpretación de área a volumen. Además se identificó que el tener interacción con distintos medios tecnológicos, estas herramientas ayudan a que el alumno sea capaz de entender mejor los temas que se le presentan en la clase, en este caso la representación gráfica de funciones algebraicas, poder construir su propio conocimiento, presentar ejemplos tangibles de objetos cotidianos vinculados con el tema, además de generar un aprendizaje significativo.

La problemática que se identificó para este trabajo de investigación, la cual tiene que ver con la forma de impartir estos tópicos relacionados con la aplicación de la integral, específicamente el tema de estudio, nos permitió analizar que las metodologías usadas por la gran mayoría de los profesores sigue siendo tradicional, ya que no se exploran diferentes propuestas metodológicas para que los alumnos puedan comprender mejor estos temas que tienen cierto nivel de complejidad, y en el peor de los casos, los profesores prefieren evadir este tipo de temas y enfocarse en otros de menor complejidad. Por tal situación, nuestra hipótesis consistió en cambiar la metodología tradicional y utilizar diferentes metodologías innovadoras, teniendo en cuenta además, que hoy en día los alumnos están inmersos en la tecnología y disponen de herramientas tecnológicas (teléfonos inteligentes, tabletas, computadoras) que utilizan con frecuencia aunque no necesariamente con objetivos académicos.

Por otra parte, la investigación arrojó que los alumnos tienen un escaso nivel de habilidad en ejercicios que involucran el espacio tridimensional o en su defecto, existen obstáculos epistemológicos que por consecuencia no les permiten llegar a un resultado correcto, el trabajar el tema de estudio por medio del recurso graficador Geogebra, acompañado del principal recurso del aula de clases, el pizarrón, nos permitió mejorar la habilidad de los alumnos en tópicos relacionados con rotación, simetría, volumen, visualización de figuras, entre otros, específicamente los reactivos de PLANEA (2016) propuestos para nuestras pruebas iniciales y finales (pre-test y post-test). Además, la investigación permitió analizar los resultados de ambos grupos de estudio (tradicional y experimental) y se comprobó, que involucrar al alumno en el tema de estudio (con ejercicios y/o ejemplos de la vida cotidiana), se logra tener un mejor desenvolvimiento en clase ya que, el alumno va construyendo su conocimiento hasta generar un aprendizaje significativo.

Los estadísticos realizados sobre los tests, muestran que las dos poblaciones de estudiantes presentaron resultados similares en el pre-test, esto es, no se presenta evidencia de mayores conocimientos de un grupo respecto a otro. No obstante, el mismo análisis sobre el post-test, muestra que en los reactivos de la prueba PLANEA hay una diferencia positiva significativa del grupo experimental respecto al tradicional, a pesar de que los tópicos que evalúan estas preguntas no son exactamente sobre el tema de sólidos de revolución, lo que conlleva a una nueva hipótesis, de que impartir temas de matemáticas, sirve para el reforzamiento de otros temas de matemáticas básicos.

Con lo antes mencionado y respecto a la forma tradicional de enseñanza en la materia de matemáticas V, equivalente a Cálculo integral, con el fin de cambiar este tipo de enseñanza propusimos una metodología con el uso de software graficador en tres dimensiones, con el fin de que el alumno pueda tener una mejor cognición visual del sólido a trabajar, y mejore las habilidades matemáticas relacionadas con los conocimientos previos al tema de estudio como graficación de funciones algebraicas.

6.1 Futuras investigaciones

Para dar continuidad a este trabajo, se pretende ampliar esta propuesta de enseñanza de los sólidos de revolución en el nivel superior, con el fin de dar un mejor entendimiento y representación visual del sólido de revolución, ya que en el nivel superior, específicamente en áreas afines a ciencias exactas e ingenierías, se trabaja con el tópico de estudio, pero con un nivel más alto de complejidad debido a que se trabaja no solamente con expresiones algebraicas sino también con trascendentes (e.g., exponenciales, trigonométricas) y sus tres respectivos métodos de solución: discos, arandelas y cascarones cilíndricos o carcasas.

Otra línea de investigación que nació de este trabajo, es la observación del vínculo o correlación de otras habilidades matemáticas que tienen los alumnos, en ejercicios relacionados con el tema (en nuestro caso, sólidos de revolución), por ejemplo: la cognición espacial, las representaciones tridimensionales, operaciones de adición, rotaciones, convergencia, etc.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alfaro, C., & Chavarria, J. (2012). La Transposición Didáctica: un ejemplo en el Sistema Educativo. *Uniciencia*, 153-168.

Alzate, O. E. (2006.). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Educación y Pedagogía., XVIII*(45), 13. Recuperado el 07 de Septiembre de 2016, de http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/6085/5491

Araya, R. G. (2007). *Universidad Nacional.* Recuperado el 25 de Mayo de 2016, de http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno3/cuaderno3_c1.pdf

Artigue, M. (1995). *Ingenieria Didáctica en Educación Matemática.* Recuperado el 09 de Septiembre de 2016, de http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. *1995* (págs. 33-60). Bogotá: Editorial Iberoamericana.

Bertoni, E. (2002). La Transposición Didáctica. *Revista Interdisciplinaria de Reflexión y Experiencia Educativa* , 1-9.

Bourdieu, P. (1975). *El Oficio del Sociólogo.* Buenos Aires: Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Briones, G. (2012). *Metodología de la investigación cuantitativa en las ciencias sociales.* Bogotá: Editores e Impresores Ltda.

Campos, E. D. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Eduación Matemática*, 1-9.

Campos, E. D. (2006). *Ingeniería Didáctica.* Recuperado el 08 de Septiembre de 2016, de Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas: www.cimm.ucr.ac.cr/edefaria

Campos, Y. (2005). *¿En que consiste la microenseñanza?* Recuperado el 14 de Junio de 2017, de Campos del conocimiento: http://www.camposc.net/

Cavanagh, P. (2011). Cognición Visual. *El Servier*, 1538-1551.

Chevallard, Y. (1991). *Del Saber Sabio al Saber Eneseñado.* Buenos Aires: Grupo Editor Aique.

Cortés, R. V. (2012). *La Transposición Didáctica: Un modelo teórico para investigar los estatus de los objetos matemáticos.* Recuperado el 15 de Noviembre de 2016, de http://biblioteca.uahurtado.cl/ujah/reduc/pdf/pdf/mfn313.pdf

De Faria Campos, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática.*, 01-09.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la real sociedad matemática española.*, 143-168.

Duval, R. (2012). Lo escencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiotica. *Enseñanza de las Matemáticas.*, 31-36. Recuperado el 04 de Noviembre de 2016

Duval, R. (2012). Registros semioticos y aprendizajes intelectuales. En R. Duval, *Semiosis de representaciones como recurso de aprendizaje.* (págs. 5-20). Scientifiques Eropéennes. Recuperado el 04 de Noviembre de 2016

Fouz, F., & Donosti, B. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. *Un paseo por la geometría* , 67-82.

García, J., Nicolás, L., & Zamorano, J. (2009). *Estadística básica para estudiantes de ciencias* . Madrid.

García Nieto, C. F. (2014) “Una aproximación teórica desde las matemáticas a los conceptos de lenguaje y comunicación en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje”. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia: Medellín, Colombia.

González Chica, G. (2011) “Tratamiento de las representaciones semióticas de la función cuadrática”. Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Manizales: Caldas, Colombia.

Han, H. L. (2005). Reconstrucción de sólidos de revolución que interactúan en 3D desde vistas ortográficas en 2D. *El Servier, 37*, 1398.

Hardingb, B. M.-M. (2013). Dificultades de aprendizaje con los sólidos de la revolución: Observaciones en clase. *Revista Internacional de Educación Matemática en Ciencia y Tecnología*, 1-17.

Lee, H. (2005). Reconstrucción de sólidos de revolución que interactúan 3D desde vistas ortográficas 2D. *El Servier*, 1-11.

Martínez, A. M. (2015). La Vigilancia Epistemológica en la Transposición Didáctica. Colombia. Recuperado el 20 de Octubre de 2016, de http://soda.ustadistancia.edu.co/enlinea/III-congresoproblemasinvestigacioneduc/La%20vigilancia%20Epistemologica.pdf

Martínez Medina, J. E. (2016) "Propuesta metodológica para desarrollar la competencia matemática mediante el diseño de situaciones de aprendizaje en alumnos del nivel medio superior". Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de San Luis Potosí: San Luis Potosí, México.

Melissa Andrade Molina, A. M. (2013). *Cinvestav del IPN* . Recuperado el 25 de Mayo de 2016, de http://funes.uniandes.edu.co/4050/1/AndradeConversionALME2013.pdf

Mendoza, M. A. (2005). La Transposición Didáctica: Historia de un Concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 1-35.

Mendoza, M. A. (2005). La Transposición Didáctica: Historia de un Concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 83-115.

Molina, M. A. (2013). La visualización espacial como herramienta en el entendimiento de lo tridimensional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 506-515.

Molina, M., & Montecino, A. (2013). Cinvestav del IPN. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 473-481. Recuperado el 25 de Mayo de 2016, de http://funes.uniandes.edu.co/4050/1/AndradeConversionALME2013.pdf

Muñoz, L. R., & Swears Pozo, Y. (2013.). Micro- ingeniería Didáctica adecuado una balanza para enseñar a los estudianes a descubrir y desarrollar estrategias que les permita resolver ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros. *Micro- ingeniería Didáctica adecuado una balanza para enseñar a los estudianes a descubrir y desarrollar estrategias que les permita resolver ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros.*, (págs. 1397-1404.). Montevideo.

Oviedo, L. M., & Kanashiro, A. M. (2012). Los registrs semióticos de representación en matemática . *Revista Aula Universitaria* , 29-36.

Ospina García, D. (2012) "Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal". Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Manizales: Caldas, Colombia.

Pereira, Z. (2011). Los diseños de un método mixto en la investigación en educación: Una experiencia concreta. *Revista Electronica Educare*, 15-29.

Pérez, A. M. (2016). La vigilancia epistemológica en la transposición didáctica. Colombia.

Pimienta, J. (2007). *Metodología Constructivista.* Edo. de México: Pearson Educación de México.

Programa de Formación Pedagógico Didatica de docentes universitarios del Area Social. (2002). La Transposición Didáctica: Un campo de reflexión con múltiples posibilidades para la docencia. *Revista interdisciplinaria de reflexión y experiencia educativa.*, 1-9.

Ramírez Jiménez A. J. (2015) "Hacia una metodología de análisis para libros de texto de matemáticas en secundaria desde los registros semióticos que emplean". Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de San Luis Potosí: San Luis Potosí, México.

Rodríguez, J. A. (2013). Instituto Tecnológico de Monterrey. *El Cálculo y su Enseñanza*, 1-8.

Rojano, D. M. (2011). *Universidad Autonóma de Querétaro.* Recuperado el 25 de Mayo de 2016, de https://docs.google.com/file/d/0B7p2xOJDNxECLVU3NkdNRkhwb28/edit

Rojas, P. J. (2016). Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 1-5.

SEP. (2016). *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes*. Recuperado el 12 de Septiembre de 2017, de PLANEA: http://planea.sep.gob.mx/

Soto, E., & Rodriguez, J. A. (2014). Resultados empíricos de la implementación de una propuesta para la enseñanza del concepto Integral Definida de funciones de una variable en el Nivel Superior. *El Cálculo y su Enseñanza*, 67-74.

Stewart, J. (2011). *Cálculo, Trascendentes Tempranas.* México: Cengage Learning.

Swokowski, E. W. (1989). *Cálculo con geometría analítica.* Estados Unidos de America: Editorial Iberoamericana.

Treviño, M. E. (2015.). Actividades Didácticas para la Enseñanza de Volumen de Sólidos de Revolución. *Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de Tecnología en Educación Matemática.*, 1-19.

Anexos

Anexo 1. Lista de observación metodológica.

Lista de observación metodológica					
Características para evaluación					
Nombre del profesor: _______Ing. Fernando Correa_______					
Niveles para Evaluación					
4. Excelente	3. Bien	2. Regular	1. Deficiente		
HABILIDAD		4	3	2	1
ENCUADRE	Realiza un encuadre completo y comprensible.				
INDUCCIÓN	La inducción es motivante.				
	La inducción se relaciona con el tema.				
COMUNICACIÓN	Utiliza lenguaje comprensible hacia al alumno.				
	Se expresa con claridad en clase.				
	Usa muletillas al exponer el tema.				
	Habla con fluidez al exponer el tema.				
	Utiliza diversos tonos de voz.				
	Hace pausas convenientes durante la clase.				
	Hace contacto visual con los alumnos.				
	Utiliza lenguaje corporal.				
	Se relaciona equitativamente con los alumnos.				
MOTIVACIÓN	Utiliza diversos materiales para mantener atención grupal.				
	Utiliza reforzadores verbales.				
	Promueve la participación individual y/o grupal.				
ORGANIZACIÓN LÓGICA	Presenta el material en forma clara y ordenada.				
	Presenta el tema completo.				
INTEGRACIÓN	Realiza una actividad para una integración del tema.				
	Hace un cierre con claridad del tema.				

Cuadro 40. Relación a partir de las observaciones metodológicas. Elaboración propia.

Anexo 2. Prueba pre-test.

CENTRO DE BACHILLERATO TECNOLÓGICO INDUSTRIAL Y DE SERVICIOS 131

Prueba de Análisis Preliminares   Cálculo Integral

Nombre____ **Edad:**______

I. Lea con atención y conteste a lo que se pide en cada uno de los reactivos.

1. ¿Qué entiende por sólido de revolución?

2. ¿Cuántos métodos de solución conoce para poder estimar el volumen de un sólido de revolución?

3. ¿Qué significa realizar la rotación de un área o de un sólido respecto a un eje?

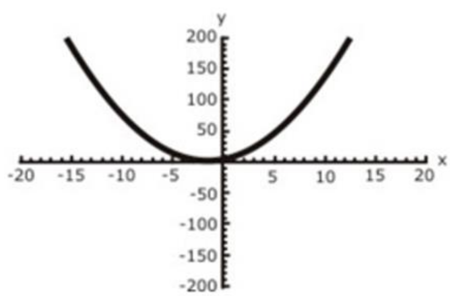
4. Determine el volumen que se obtiene al rotar alrededor del eje x, la función $f(x)=\sqrt{x^3}$ en el intervalo [1,4].

5. Enrique está revisando cuánto dinero necesita para la fiesta que empieza a organizar. Él supone que asistirán unos 30 invitados, por los cuales piensa gastar entre $100 y $200 en comida y de $300 a $400 en bebida por cada uno. ¿Aproximadamente cuánto dinero va a gastar Enrique?

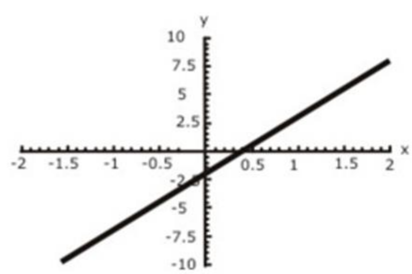
   e) $3,000 a $5,900 f) $6,000 a $8,900 g) $9,000 a $11,900 h) 12,000 a 18,000

6. Identifique la gráfica que represente la siguiente expresión algebraica $y=x^3+3x^2+5$

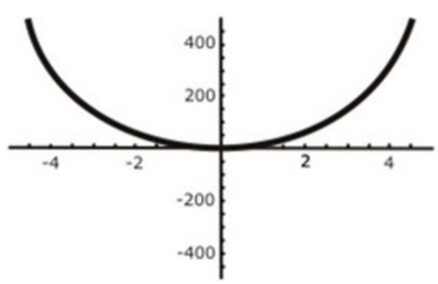
e)



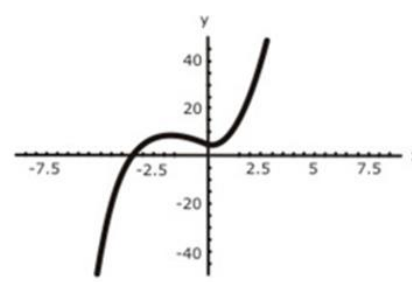
f)



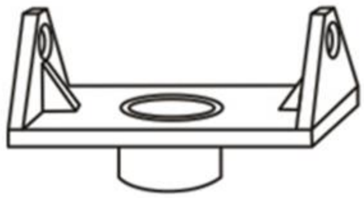
g)

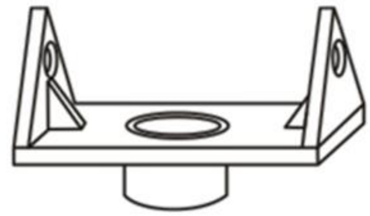


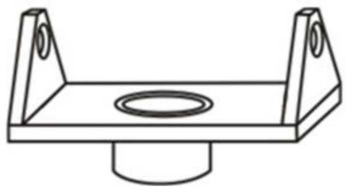
h)

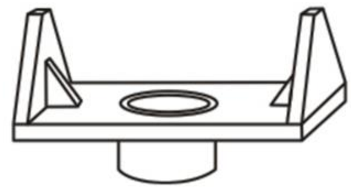


7. Una pieza para torno está formada por una base en forma de paralelepípedo sostenido por la parte de abajo por un cilindro hueco que penetra en esta base. En cada uno de los extremos más cortos del paralelepípedo tiene un prisma trapezoidal, que en su parte superior tiene un orificio en forma de cilindro. Estos prismas están sostenidos en su unión con la base de la pieza, por prismas triangulares colocados sobre una de sus caras laterales.

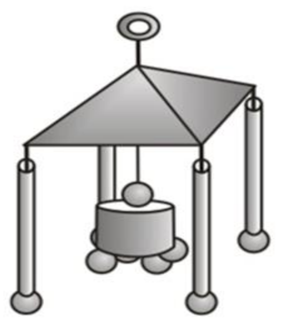
e) 

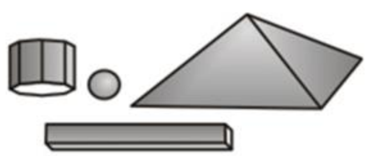
f) 

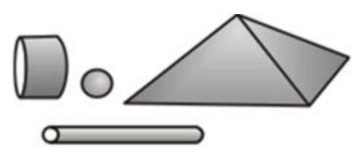
g) 

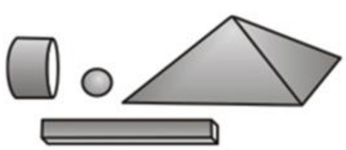
h) 

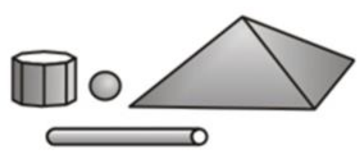
8. El juguete de una cuna de un bebé tiene la forma que siguiente. ¿Cuáles son las figuras que lo componen?



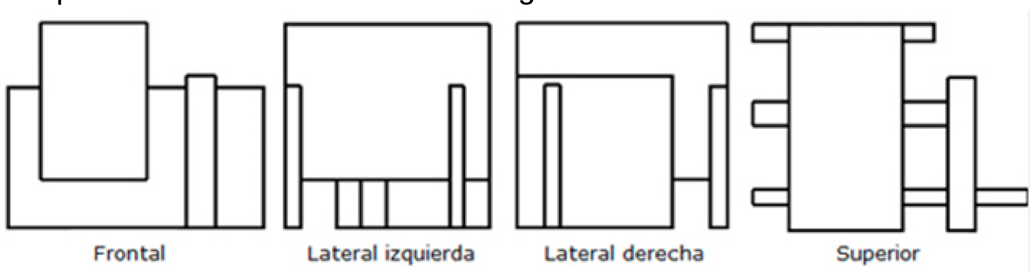
e) 

f) 

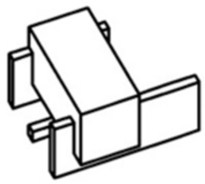
g) 

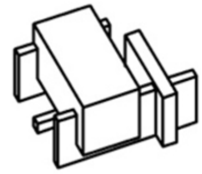
h) 

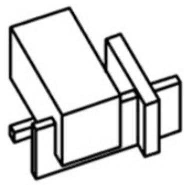
9. Se presentan cuatro vistas de una figura tridimensional:

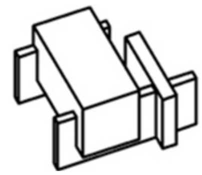


Identifique a cuál de las siguientes figuras pertenecen las vistas anteriores.

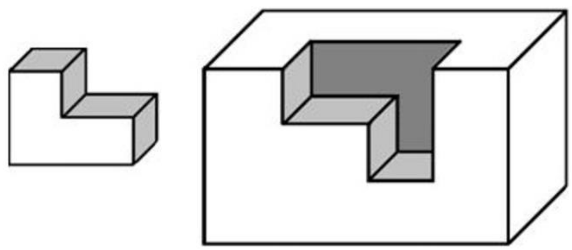
e) 

f) 

g) 

h) 

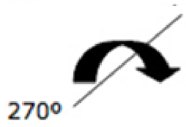
10. En la siguiente imagen se muestra una pieza pequeña que contempla a una más grande.



¿Qué movimiento se debe realizar para ensamblar y completar la pieza mayor?

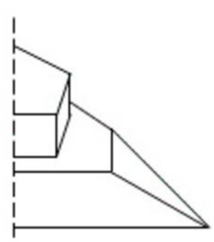
e) 

f) 

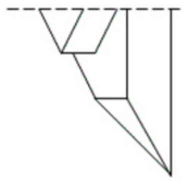
g) 

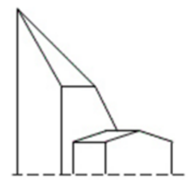
h) 

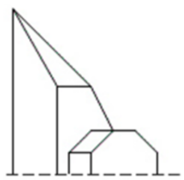
11. Para poner a prueba a un aspirante a escultor, se le pide que complete la siguiente pieza.

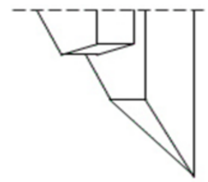


Si la parte que falta debe de ser simétrica, ¿Cuál de las siguientes figuras tiene que elaborar?

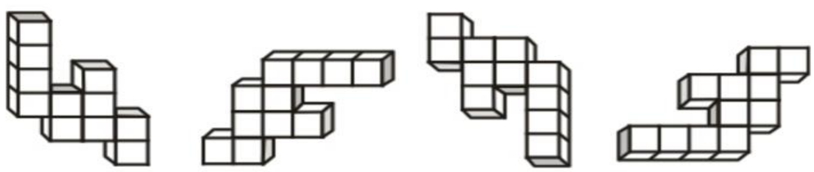
e) 

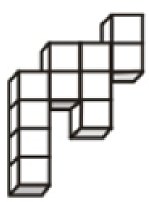
f) 

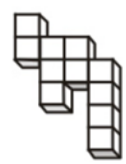
g) 

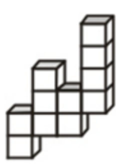
h) 

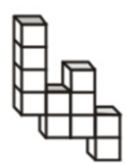
12. ¿Cuál es la figura que continua en la siguiente sucesión?



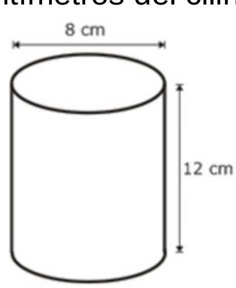
e) 

f) 

g) 

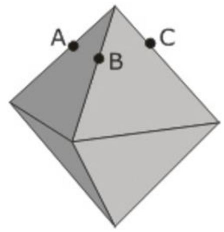
h) 

13. ¿Cuál es el volumen en centímetros del cilindro que se muestra en la figura?



e) 96.00
f) 150.72
g) 301.44
h) 602.88

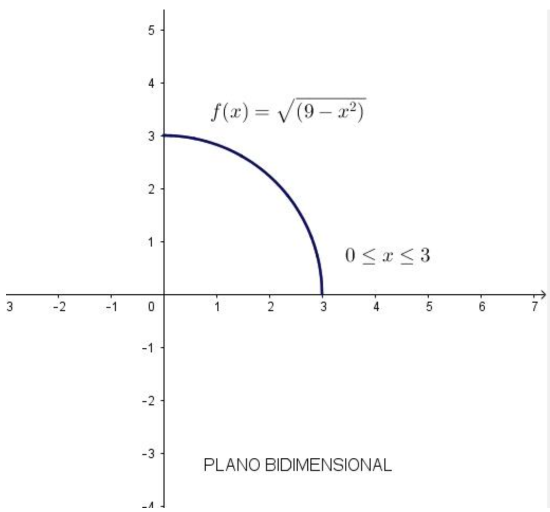
14. El siguiente octaedro sólido es seleccionado por un plano que pasa por los puntos A, B y C.



Una vez realizado el corte, ¿Cuál es el número de caras del poliedro que resulta con el mayor número de vértices?

e) 5
f) 7
g) 9
h) 10

Anexo 3. Visualización de una función en rotación.



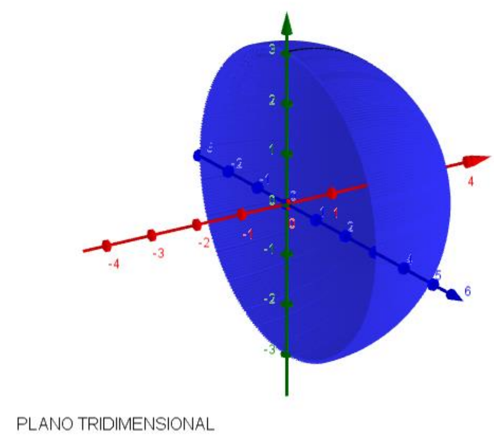


Imagen 13. Cambio de plano de una función algebraica, respecto al eje de las abscisas. Método de discos. Elaboración propia.

Anexo 4. Visualización de una función en rotación.

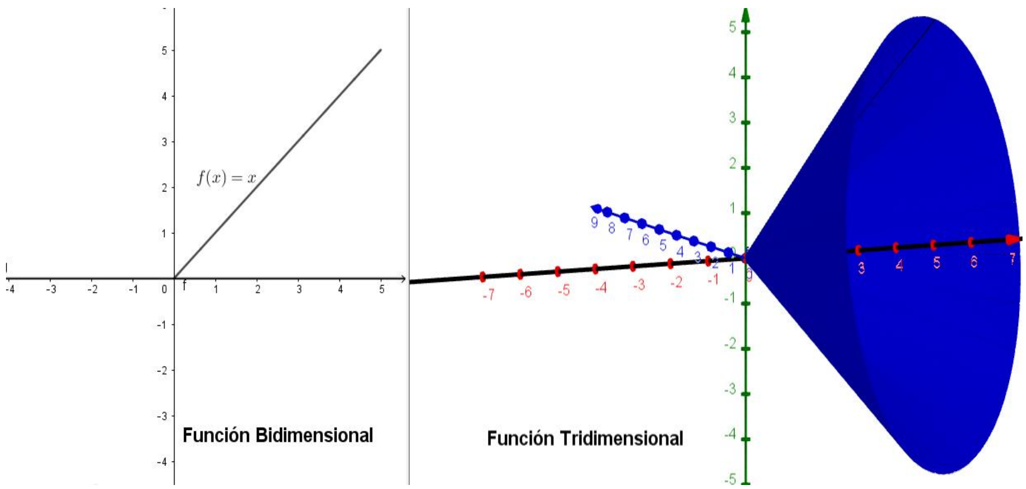


Imagen 14. Cambio de plano de una función algebraica, respecto al eje de las abscisas. Método de discos. Elaboración propia.

Anexo 5. Visualización de una función en rotación.

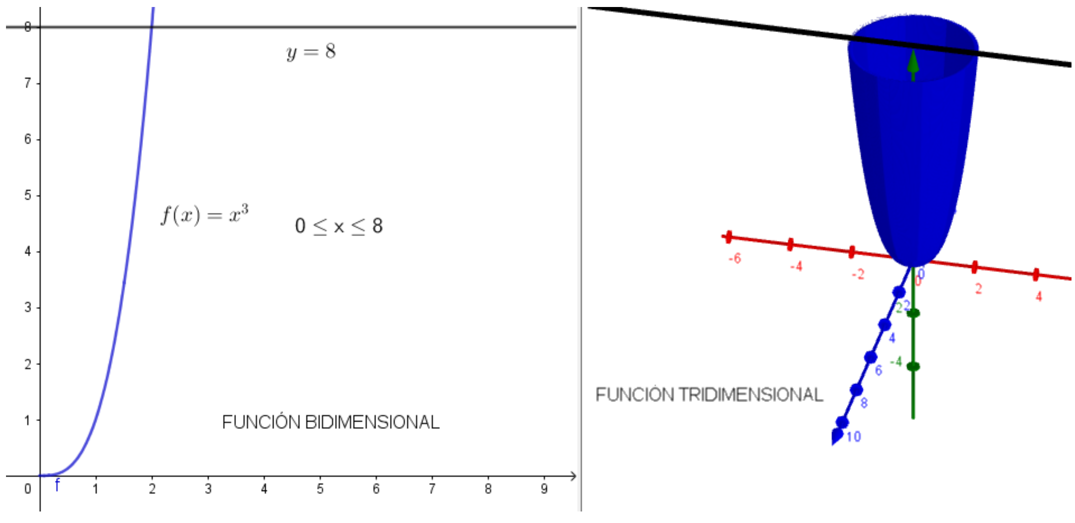


Imagen 15. Cambio de plano de una función algebraica, respecto al eje de las ordenadas. Método de discos. Elaboración propia.

Anexo 6. Visualización de una función en rotación.

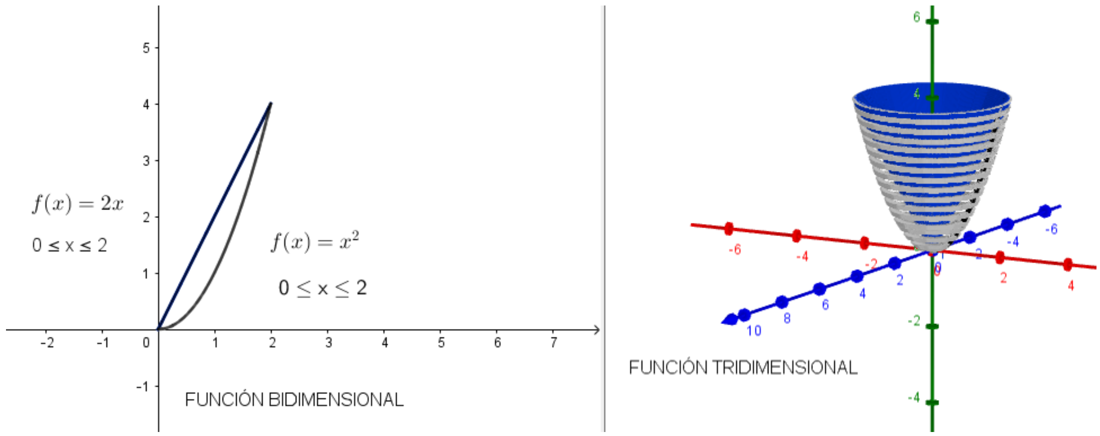


Imagen 16. Cambio de plano de una función algebraica, respecto al eje de las ordenadas. Método de arandelas. Elaboración propia.

Anexo 7. Visualización de una función en rotación.

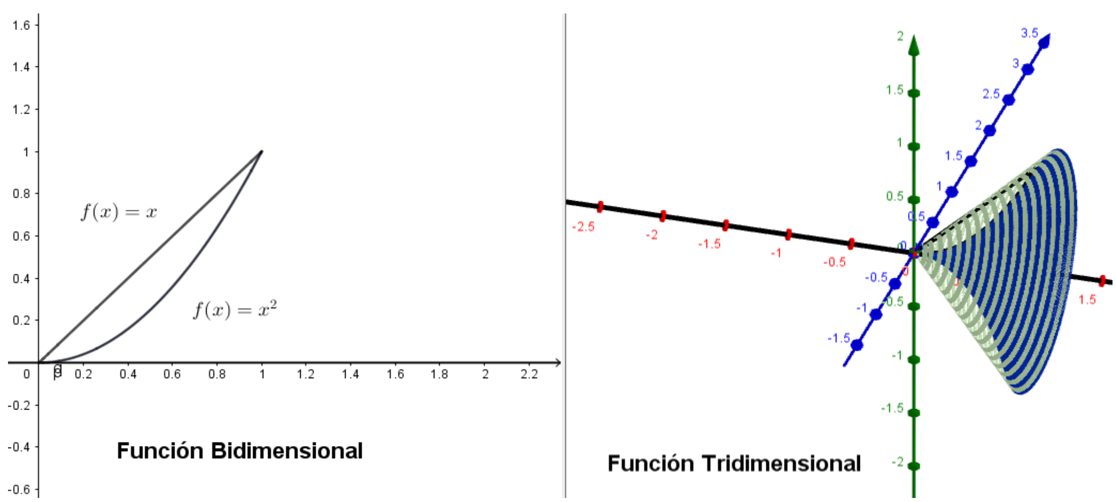


Imagen 17. Cambio de plano de una función algebraica, respecto al eje de las abscisas. Método de arandelas. Elaboración propia.

Anexo 8. Visualización de una función en rotación.

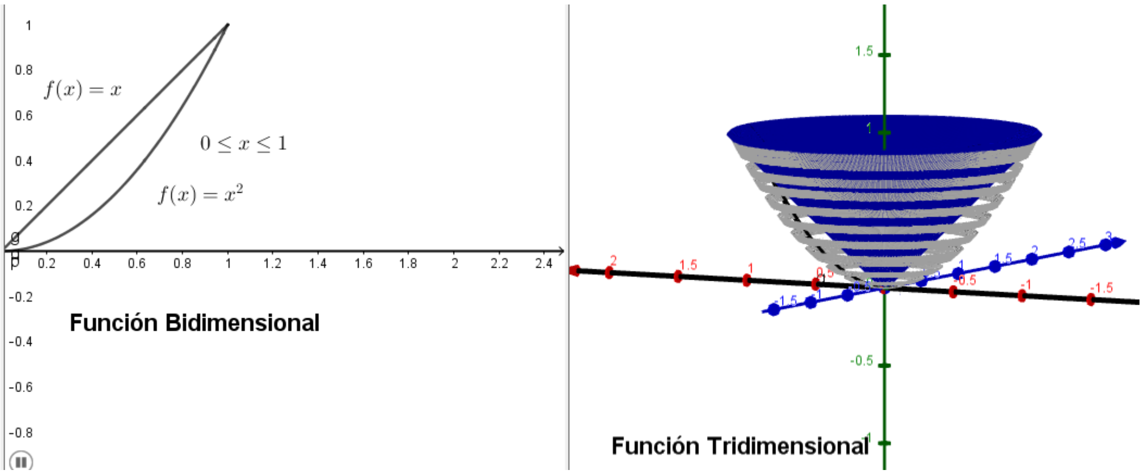
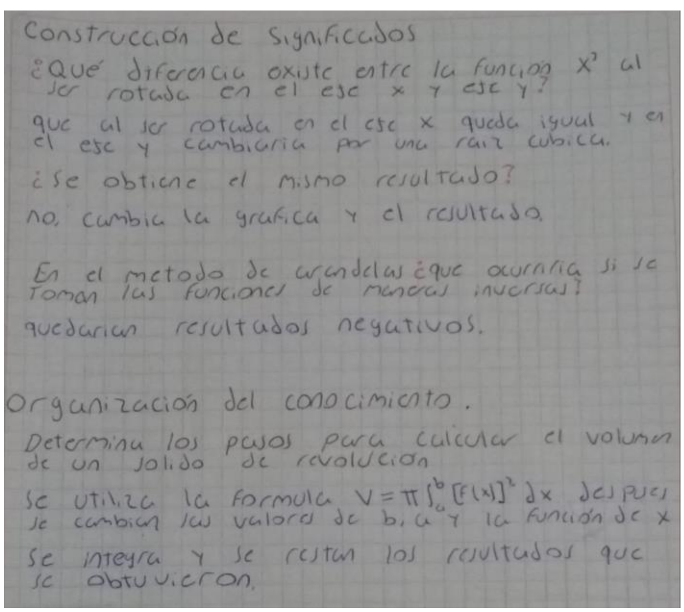


Imagen 18. Cambio de plano de una función algebraica, respecto al eje de las ordenadas. Método de arandelas. Elaboración propia.

Anexo 9. Construcción de significados y organización del conocimiento.



Construcción de Significados

¿Qué diferencia existe entre la función x^3 al ser rotada en el eje x y eje y?

que al ser rotada en el eje x queda igual y en el eje y cambiaría por una raiz cubica.

¿Se obtiene el mismo resultado?

no, cambia la grafica y el resultado.

En el metodo de arandelas ¿que ocurria si se Toman las funciones de maneras inversas?

quedarian resultados negativos.

Organización del conocimiento.

Determina los pasos para calcular el volumen de un solido de revolución

Se utiliza la formula $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$ despues se cambian los valores de b, a y la función de x

Se integra y se restan los resultados que se obtuvieron.

Imagen 19. Construcción y organización de los conocimientos en el tema de sólidos de revolución. Grupo experimental. Fotografía propia.

Anexo 10. Construcción de significados y organización del conocimiento.

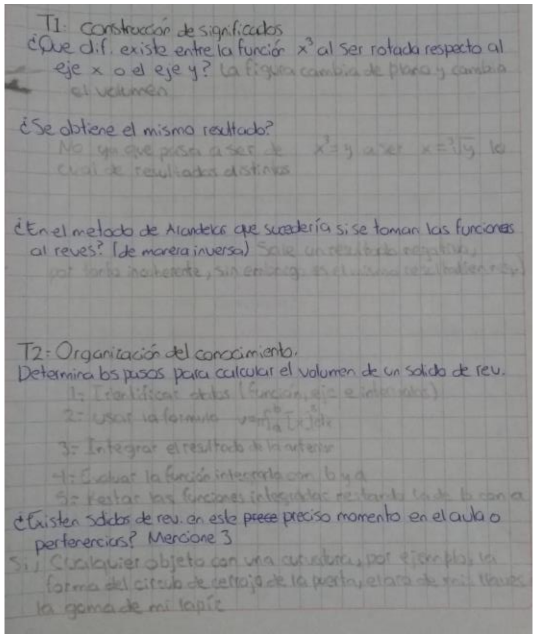


Imagen 20. Construcción y organización de los conocimientos en el tema de sólidos de revolución. Grupo experimental. Fotografía propia.

Anexo 11. Construcción de significados y organización del conocimiento.

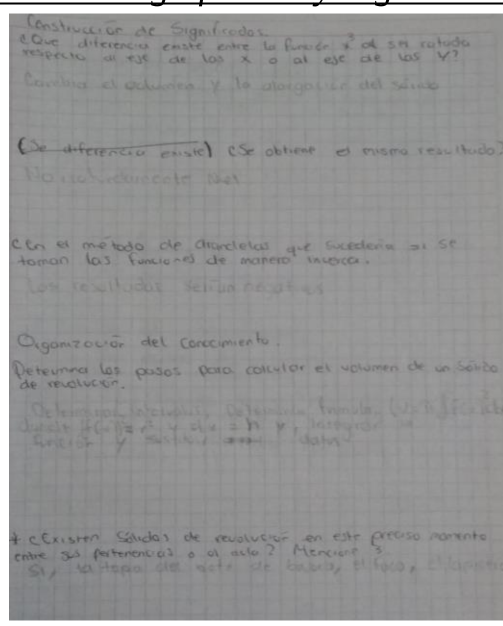


Imagen 21. Construcción y organización de los conocimientos en el tema de sólidos de revolución. Grupo experimental. Fotografía propia.

Anexo 12. Construcción de significados y organización del conocimiento.

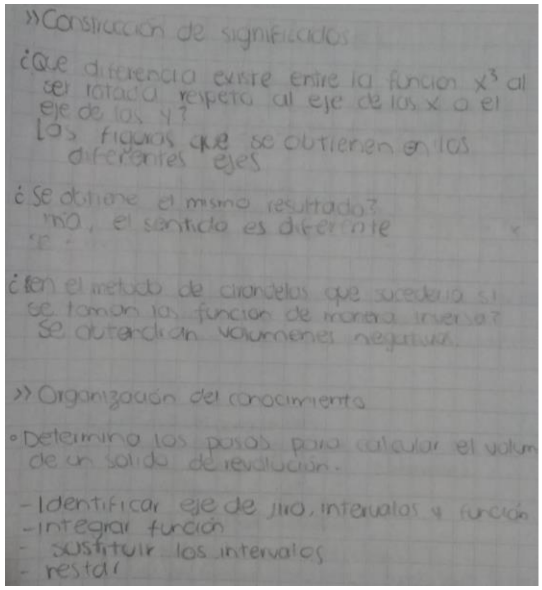


Imagen 22. Construcción y organización de los conocimientos en el tema de sólidos de revolución. Grupo experimental. Fotografía propia.

Anexo 13. Construcción de significados y organización del conocimiento.

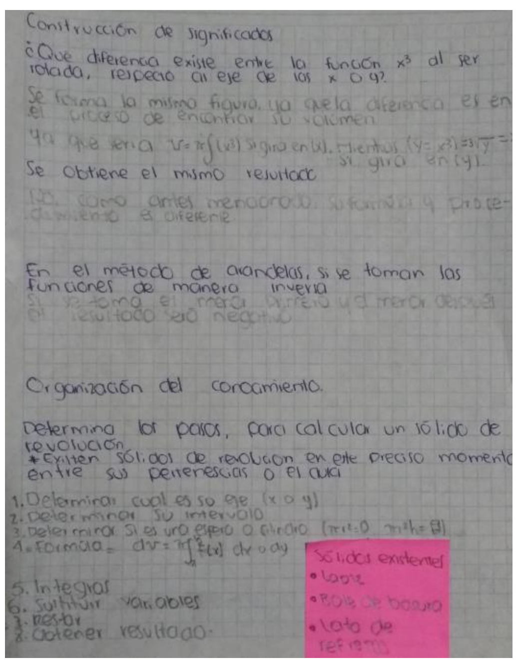


Imagen 23. Construcción y organización de los conocimientos en el tema de sólidos de revolución. Grupo experimental. Fotografía propia.

Anexo 14. Construcción de significados y organización del conocimiento.

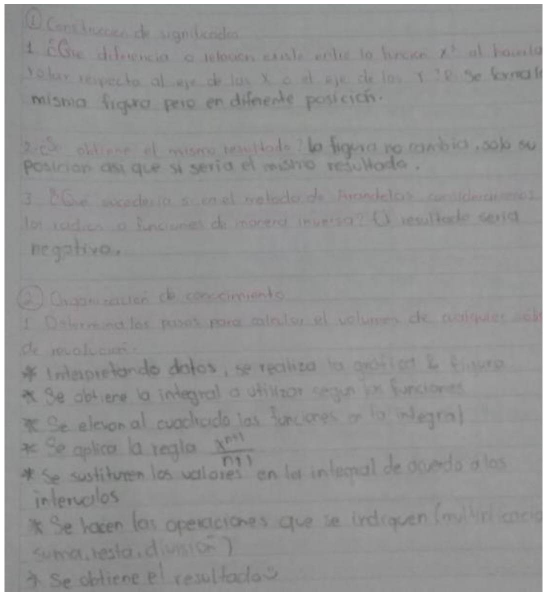

① Construcción de significados
1 ¿Qué diferencia o relación existe entre la función x^3 al hacerla
rotar respecto al eje de las X o el eje de las Y ?R: Se forma la
misma figura pero en diferente posición.
2 ¿Se obtiene el mismo resultado? la figura no cambia, solo su
posición así que sí sería el mismo resultado.
3 ¿Qué sucedería si en el método de Arandelas consideramos
los radios o funciones de manera inversa? El resultado sería
negativo.
② Organización de conocimiento
1 Determina los pasos para calcular el volumen de cualquier sólido
de revolución.
* Interpretando datos, se realiza la gráfica de la figura
* Se obtiene la integral a utilizar según las funciones
* Se elevan al cuadrado las funciones en la integral
* Se aplica la regla $\frac{x^{n+1}}{n+1}$
* Se sustituyen los valores en la integral de acuerdo a los
intervalos
* Se hacen las operaciones que se indiquen (multiplicación
suma, resta, división)
* Se obtiene el resultado

Imagen 24. Construcción y organización de los conocimientos en el tema de sólidos de revolución. Grupo tradicional. Fotografía propia.

Anexo 15. Construcción de significados y organización del conocimiento.

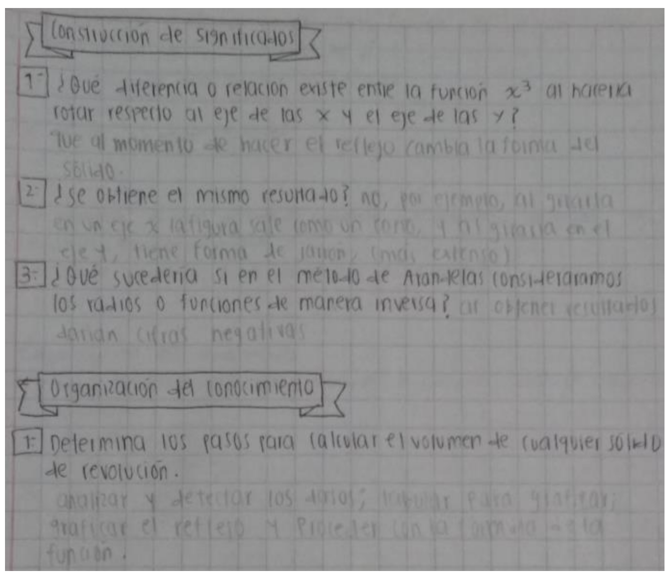

Construcción de significados
1.- ¿Qué diferencia o relación existe entre la función x^3 al hacerla
rotar respecto al eje de las x y el eje de las y?
Que al momento de hacer el reflejo cambia la forma del
sólido.
2.- ¿Se obtiene el mismo resultado? no, por ejemplo, al girarla
en un eje x la figura sale como un cono, y al girarla en el
eje y, tiene forma de jarrón, (más extenso)
3.- ¿Qué sucedería si en el método de Arandelas consideramos
los radios o funciones de manera inversa? al obtener resultados
darían cifras negativas
Organización del conocimiento
1.- Determina los pasos para calcular el volumen de cualquier sólido
de revolución.
analizar y detectar los datos; tabular para graficar;
graficar el reflejo y proceder con la fórmula de la
función.

Imagen 25. Construcción y organización de los conocimientos en el tema de sólidos de revolución. Grupo tradicional. Fotografía propia.

Anexo 16. Construcción de significados y organización del conocimiento.

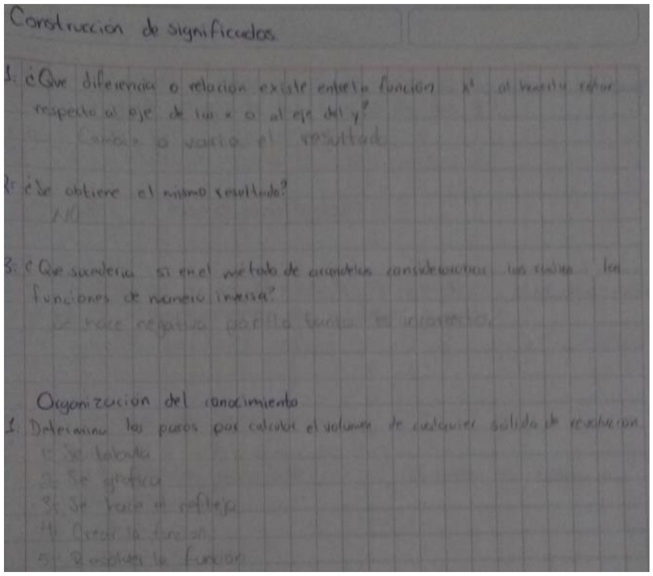

Construccion de significados
1. ¿Que diferencia o relacion existe entre la funcion
respecto al eje de las x o al eje del y?
2. ¿Se obtiene el mismo resultado?
NO
3. ¿Que sucederia si en el metodo de arandelas consideraramos los radios o las
funciones de manera inversa?
Organizacion del conocimiento
1. Determina los pasos para calcular el volumen de cualquier solido de revolucion

Imagen 26. Construcción y organización de los conocimientos en el tema de sólidos de revolución. Grupo tradicional. Fotografía propia.

Anexo 17. Construcción de significados y organización del conocimiento.

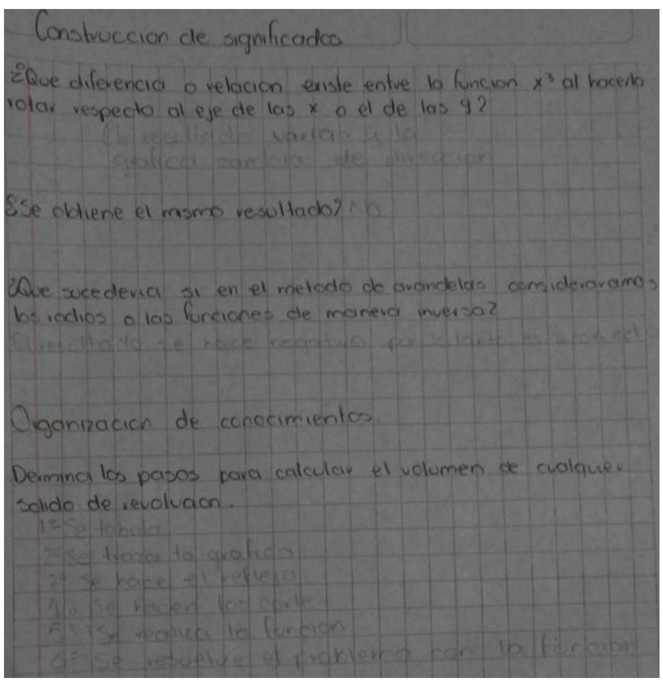

Construccion de significados
¿Que diferencia o relacion existe entre la funcion x^3 al hacerla
rotar respecto al eje de las x o el de las y?
¿Se obtiene el mismo resultado?
¿Que sucederia si en el metodo de arandelas consideraramos
los radios o las funciones de manera inversa?
Organizacion de conocimientos
Determina los pasos para calcular el volumen de cualquier
solido de revolucion.
1º Se tabula
2º Se traza la grafica

Imagen 27. Construcción y organización de los conocimientos en el tema de sólidos de revolución. Grupo tradicional. Fotografía propia.

Anexo 18. Construcción de significados y organización del conocimiento.

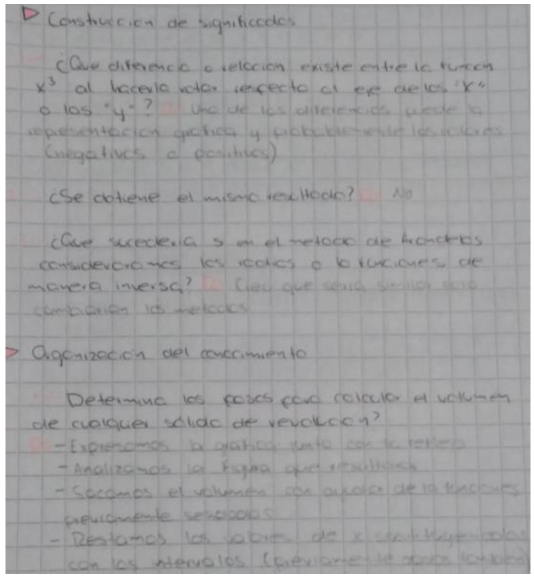


Imagen 28. Construcción y organización de los conocimientos en el tema de sólidos de revolución. Grupo tradicional. Fotografía propia.

Anexo 19. Construcción de significados y organización del conocimiento.

En este apartado se incluyen únicamente los ejercicios adicionales para la prueba post- test, el resto de los ejercicios se muestran en el anexo 2.

CENTRO DE BACHILLERATO TECNOLÓGICO INDUSTRIAL Y DE SERVICIOS 131

Prueba de Análisis a Posteriori   Cálculo Integral

Nombre____ **Edad:**_______

I. Lea con atención y conteste a lo que se pide en cada uno de los reactivos.

1. ¿Cómo se relaciona el área de una superficie con el volumen de un sólido de revolución?

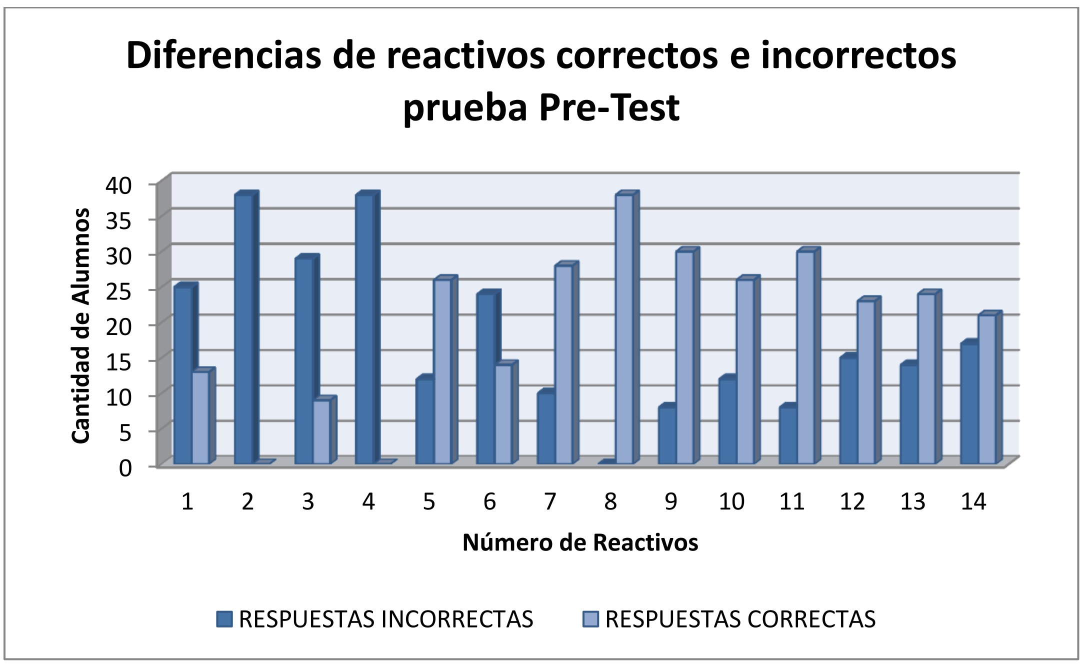
2. ¿Qué sucede si generamos cortes verticales u horizontales en un sólido de revolución?

3. ¿Cómo se relaciona el área de una superficie con el volumen de un sólido de revolución?

4. Determine el volumen que se obtiene al rotar alrededor del eje y la función $f(x) = x + 1$ en el intervalo [0,2].

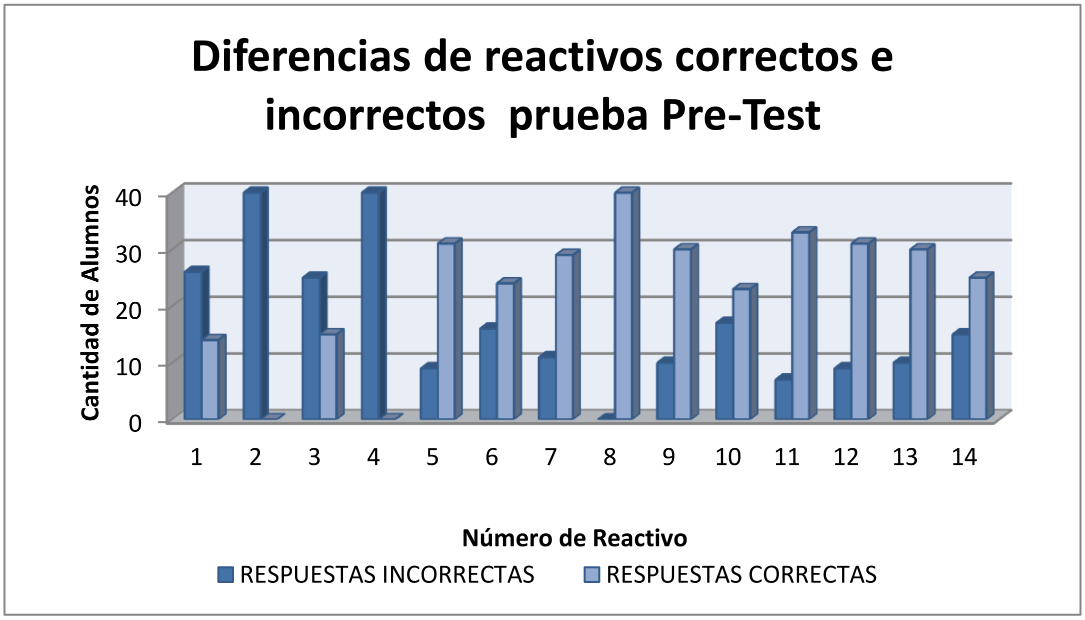
5. Mencione tres ejemplos de la vida cotidiana donde se utilicen los sólidos de revolución.

<u>Anexo 20. Diferencias de reactivos correctos e incorrectos en prueba pre-test.</u>



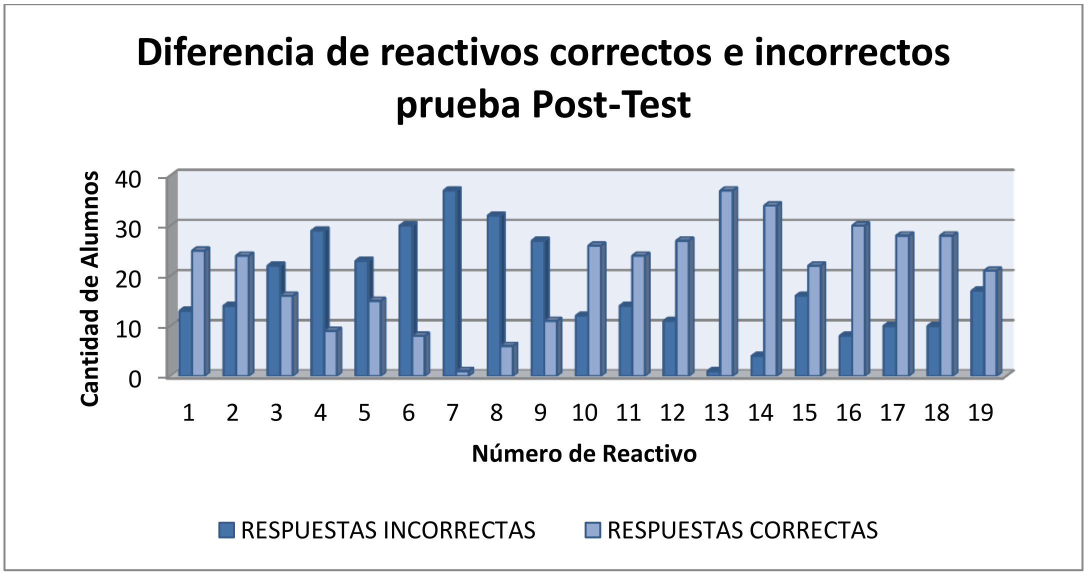
Cuadro 41. Histograma de diferencias entre reactivos correctos e incorrectos, prueba pre-test. Grupo tradicional. Elaboración propia.

Anexo 21. Diferencias de reactivos correctos e incorrectos en prueba pre-test.



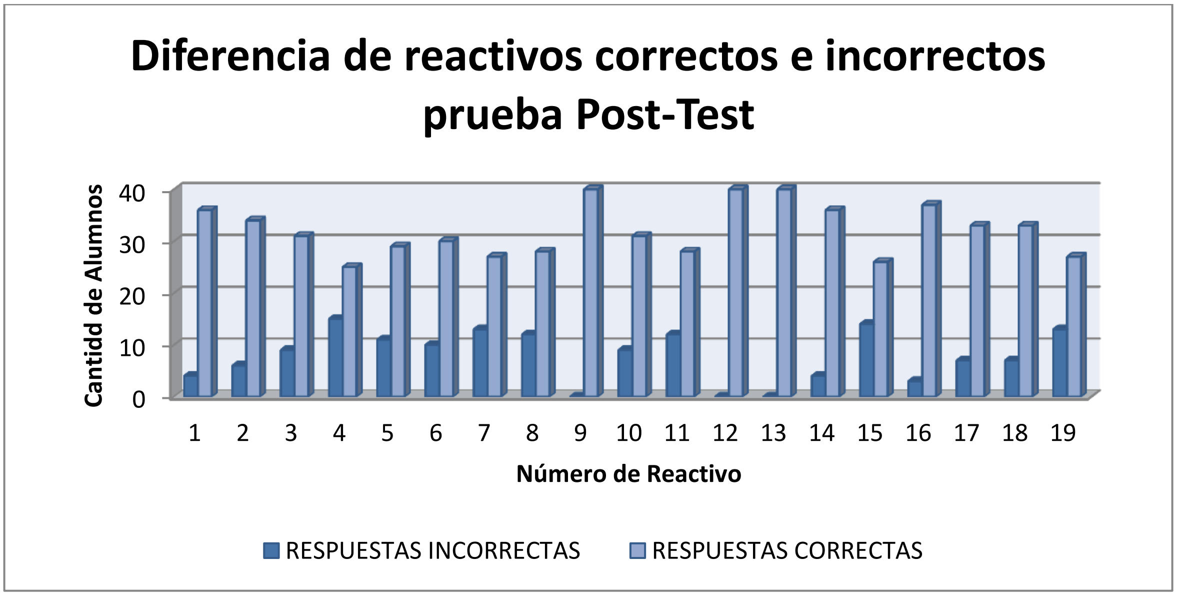
Cuadro 42. Histograma de diferencias entre reactivos correctos e incorrectos, prueba pre-test. Grupo experimental. Elaboración propia.

Anexo 22. Diferencias de reactivos correctos e incorrectos en prueba post-test.



Cuadro 43. Histograma de diferencias entre reactivos correctos e incorrectos, prueba post-test. Grupo tradicional. Elaboración propia.

Anexo 23. Diferencias de reactivos correctos e incorrectos en prueba pre-test.



Cuadro 44. Histograma de diferencias entre reactivos correctos e incorrectos, prueba post-test. Grupo experimental. Elaboración propia.

Anexo 24. Análisis de correlación de Matthews.

Análisis de correlación de Matthews. Grupo experimental. Prueba Pre-Test.														
Reactivos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1														
2	0.28													
3	0.71	0.20												
4	0/0	0/0	0/0											
5	0.02	0.18	0.25	0/0										
6	0.15	0.10	-0.08	0/0	0.29									
7	0.48	0.21	-0.34	0/0	0.06	0.30								
8	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0							
9	0.30	0.00	-0.29	0/0	0.10	0.24	0.42	0/0						
10	0.00	0.12	-0.04	0/0	0.14	0.12	0.38	0/0	0.09					
11	0.08	0.15	0.02	0/0	0.09	0.16	0/0	0/0	0.04	0.14				
12	0.14	0.18	0.13	0/0	0.14	0.05	0.20	0/0	0.10	0.51	0.22			
13	0.06	0.19	-0.06	0/0	0.10	0.12	0.16	0/0	0.20	0.32	0.04	0/0		
14	0.24	0.09	0.29	0/0	0.17	0.00	-0.01	0/0	0.09	0.04	0.05	0.05	0.03	

Cuadro 45. Análisis de correlación de Matthews, prueba pre-test. Grupo experimental. Elaboración propia.

Anexo 25. Análisis de correlación de Matthews.

Análisis de correlación de Matthews. Grupo tradicional Prueba Pre-Test.														
Reactivos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1														
2	0/0													
3	0.20	0/0												
4	0/0	0/0	0/0											
5	-0.03	0/0	0.18	0/0										
6	0.16	0/0	0.35	0/0	0.17									
7	-0.13	0/0	0.12	0/0	0.49	0.08								
8	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0							
9	-0.38	0/0	0.04	0/0	-0.07	0.13	-0.16	0/0						
10	0.09	0/0	-0.19	0/0	0.15	0.05	0.11	0/0	0.07					
11	-0.11	0/0	0.04	0/0	0.07	0.13	0.28	0/0	0.21	-0.07				
12	0/0	0/0	0.40	0/0	0.15	0.17	0.01	0/0	0.24	0.03	0.03			
13	0.06	0/0	0.25	0/0	0.07	0.02	0.04	0/0	0.01	0.07	0.07	0.16		
14	0.19	0/0	0.22	0/0	0/0	0.25	0/0	0/0	0.31	0/0	-0.04	0.25	0.30	

Cuadro 46. Análisis de correlación de Matthews, prueba pre-test. Grupo tradicional. Elaboración propia.

Anexo 26. Análisis de correlación de Matthews.

Análisis de correlación de Matthews. Grupo experimental. Prueba Post-Test.															
Reactivos	1	2	3	4	6	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1															
2	0.33														
3	0.22	-0.06													
4	0.26	0.11	0.25												
6	0.19	0.40	0.16	0/0											
10	0.22	0.23	0.28	-0.17	0.03										
11	-0.22	0.18	-0.22	-0.17	0.00	-0.09									
12	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0								
13	0/0	0.00	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0							
14	-0.11	0.35	0.22	-0.26	0.00	0.22	-0.22	0/0	0/0						
15	0.10	0.21	-0.02	-0.03	0.30	0.11	0.09	0/0	0/0	-0.07					
16	-0.09	0.13	-0.15	-0.02	0.27	-0.15	0.43	0/0	0/0	-0.09	0.19				
17	0.07	0.41	-0.09	-0.08	0.04	0.07	0.13	0/0	0/0	-0.15	0.35	0.12			
18	0.29	0.08	0.07	0.05	0.34	0.38	0.13	0/0	0/0	0.07	0.35	0.12	0.31		
19	-0.05	0/0	0.14	0.01	0.09	-0.12	0.24	0/0	0/0	-0.05	0.16	0.41	0.10	-0.04	

Cuadro 47. Análisis de correlación de Matthews, prueba post-test. Reactivos 5, 7, 8 y 9, consignas exclusivas del post- test. Grupo experimental. Elaboración propia.

Anexo 27. Análisis de correlación de Matthews.

Análisis de correlación de Matthews. Grupo tradicional. Prueba Post-Test.															
Reactivos	1	2	3	4	6	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1															
2	0.48														
3	0.50	0.10													
4	0.14	0.43	0.03												
6	0.24	0.13	0.08	0.32											
10	0.13	0.33	0.01	-0.02	0.21										
11	0.37	0.29	0.32	0.17	0.13	-0.05									
12	0.15	0.28	0.04	0.08	0.19	0.19	0.11								
13	0.23	0.22	0.14	0.09	0.08	-0.11	0.22	0.26							
14	0.07	0.21	0.23	0.19	0.18	0.14	0.08	0.22	0.06						
15	0.17	0.37	0.19	0.48	0.05	0.11	0.12	0.04	0.19	-0.12					
16	0.04	0.06	0.05	-0.02	0.11	0.07	0.01	0.10	0.08	0.03	-0.05				
17	0.18	0.23	0.03	-0.09	0.16	0.24	0.08	0.01	0.28	-0.01	-0.03	0.28			
18	0.45	0.48	0.27	0.33	0.31	0.11	0.41	0.15	0.28	0.18	0.34	0.28	0.19		
19	0.02	0.23	0.02	0.13	0.18	-0.04	0.19	0.01	0.18	-0.14	0.20	0.05	0.06	0.06	

Cuadro 48. Análisis de correlación de Matthews, prueba post-test. Reactivos 5, 7, 8 y 9, consignas exclusivas del post- test. Grupo tradicional. Elaboración propia.