UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

FACULTAD DE CIENCIAS

"ANÁLISIS DE LAS CONCEPCIONES QUE TIENEN ALGUNOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO SOBRE LA OPTIMIZACIÓN EN CÁLCULO DIFERENCIAL"

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

P R E S E N T A:

LETICIA LORENY MONTELONGO GARCÍA

Director de tesis:

Dr. Nehemías Moreno Martínez

Octubre 2019

FORMATO DE AUTORIZACIÓN PARA LA IMPRESIÓN FINAL DE LA TESIS

SECRETARIA GENERAL

FACULTAD DE CIENCIAS

Nombre: Leticia Loreny Montelongo García

Clave: 237580

Fecha: 2 de octubre del 2019

Carrera: Lic. en Matemática Educativa

Especialidad: ____________

Generación: 2014

Título de la Tesis:
Análisis de las concepciones que tienen algunos estudiantes de Bachillerato sobre la optimización en cálculo Diferencial

Asesor: Dr. Nehemías Moreno Martínez

Adscripción del Asesor: Facultad de ciencias

SINODALES ASIGNADOS

Presidente: Dr. César Israel Hernández Vélez

Secretario: Dr. Luis Roberto Pino Fan

Vocal: Dr. Nehemías Moreno Martínez

Suplente: Dr. Noé Sánchez

Por medio de la presente atestiguamos que después de leer el documento de tesis puesto a nuestra consideración, no tenemos recomendaciones o sugerencias a su contenido y damos nuestra aprobación para que se impriman las versiones finales del mismo.

Firmas:

Sinodal Presidente

Sinodal Secretario

Nehemías

Sinodal Vocal

Sinodal Suplente

Vo.Bo.

Secretario General

SECRETARIA GENERAL

ÍNDICE

Resumen

La enseñanza del tema de optimización a nivel bachillerato suele ser operativa. En general, el tratamiento de este tema en los libros de texto se aborda de manera mecánica y como una aplicación de las derivadas. Es decir, se establece un procedimiento que el estudiante debe seguir al pie de la letra para resolver problemas en contextos extramatemáticos (de la vida cotidiana, de economía, entre otros) en los que se le solicita a los alumnos maximizar o minimizar alguna cantidad. La repercusión de esta práctica de enseñanza conduce a los estudiantes a la repetición del procedimiento sin tener las habilidades para argumentar e interpretar por qué un resultado es el óptimo.

En este trabajo se presenta un análisis gráfico sobre las concepciones que tienen algunos estudiantes de nivel medio superior acerca de la optimización que se aborda en la clase de Cálculo Diferencial. El análisis gráfico se apoyó en dos técnicas de representación, la V de Gowin y los Mapas Conceptuales Híbridos, las cuales se apoyan en la Teoría del aprendizaje significativo y en el Enfoque ontosemiótico, respectivamente.

En esta investigación de carácter cualitativo se utilizó el estudio de caso. A través del análisis en los libros de texto se categorizaron tres tipos de problemas de optimización que no son tan comunes su aplicación en la asignatura. Se diseñó un cuestionario con estos problemas y se aplicó a estudiantes que cursaban el tercer año de bachillerato.

Posteriormente, los resultados obtenidos fueron clasificados en dos categorías de acuerdo con el tipo de resolución y con los errores similares. Cabe mencionar que solo un estudiante resolvió correctamente los tres problemas, mientras que los estudiantes restantes resolvieron incorrectamente los tres problemas. Debido a esto, la categoría de los estudiantes que no obtuvieron una resolución correcta se desglosó en subcategorías en base al tipo de resolución, es decir, si respondieron al azar el problema o al tanteo; si se equivocaron en las operaciones básicas; si

plantearon mal el problema; entre otras. Se descartó a los estudiantes que no resolvieron uno o los tres problemas, y a los que resolvieron al tanteo alguno de los tres. De modo que se seleccionó una estudiante que sí realizó procedimientos en la resolución de cada uno. Posteriormente, al estudiante A que resolvió correctamente los tres problemas y a la estudiante B que los resolvió incorrectamente, se les realizó una entrevista con la ayuda de una pluma electrónica *Smartpen Live Scribe*, la cual permite guardar registro electrónico de la producción oral y escrita a lo largo de la resolución de cada problema. Con esta producción se elaboró por cada problema la V de Gowin y el Mapa Conceptual Híbrido correspondiente, los cuales permitieron advertir cómo el sujeto pone en juego los objetos y los procesos matemáticos.

El estudiante A resolvió de manera correcta los problemas, sin embargo, él consideró que solo era necesario realizar el criterio de la primera derivada para determinar los máximos. En ningún problema utilizó la segunda derivada. Las prácticas que realizó en cada problema iban encaminadas a construir una función de una sola variable para derivar. Es decir, cada práctica tenía relación una con la otra.

Por otro lado, la estudiante B tampoco realizó la segunda derivada para comprobar que realmente el resultado fuera el óptimo. Sin embargo, los errores los cometió desde el planteamiento de los problemas. El procedimiento que realizó fue un procedimiento ciego, sin detenerse a analizar si realmente estaba resolviendo de manera correcta los problemas. La estudiante ignoró en algunos casos los resultados que obtenía en prácticas anteriores, por lo que la llevó a obtener resultados incorrectos.

Introducción

La optimización está presente en la vida cotidiana de las personas. Claro está, no de forma rigurosa, sino que en algunos momentos de nuestra vida queremos encontrar una opción óptima para llegar más temprano al trabajo o a la escuela, tomar el camino más rápido al cine, para comprar más gastando menos o para elegir cuál trabajo brinda más ingreso con menor esfuerzo, etc. No utilizamos fórmulas o procedimientos matemáticos, pero sí utilizamos la intuición matemática de optimización.

Esta intuición es fundamental en nuestra vida para tomar decisiones. Sin embargo, al analizar los libros de texto del nivel bachillerato se pudo observar que las situaciones problemas abordadas y el tratamiento matemático que involucra a la optimización se encuentran lejos de poder ser aplicables a la vida cotidiana y de ser útiles para la comprensión. La forma en la que se enseña no involucra la existencia de la optimización en la vida, sino que se presentan ejemplos muy concretos en áreas como economía o agricultura. Además, los ejercicios suelen ser la mayoría de las veces muy similares. Como consecuencia, no se brinda la oportunidad de desarrollar habilidades que permitan a los estudiantes buscar y encontrar soluciones óptimas en su vida.

Esto motivó a llevar a cabo la presente investigación en la cual se estudia el proceso de optimización en la resolución de problemas por parte de estudiantes de tercer año de bachillerato. Por otra parte, es necesario el uso de dos herramientas que permitan observar los procedimientos que los estudiantes realizan. En este caso, se hizo uso de la V de Gowin de la Teoría del aprendizaje significativo, y del Mapa Conceptual Híbrido interpretado a través de la teoría del Enfoque ontomsemiótico. Los cuales permitirán tener una noción más grande acerca de los conceptos, propiedades, argumentos, entre otros, que los estudiantes utilizan para resolver este tipo de problemas, además de permitir observar las deficiencias que tienen los estudiantes acerca de este tema.

Como se mencionó anteriormente, la problemática se debe a la forma de presentar el tema de optimización en los libros de texto. Incluso se establecen procedimientos que el estudiante debe seguir paso a paso para resolver este tipo de problemas, lo cual termina en una resolución mecánica por parte del estudiante. Además, cada año se presentan los mismos tipos de problemas y los mismos ejemplos. Debido a esto, se hizo un análisis acerca de los problemas más comunes y los no tan comunes en el libro de texto. Resultaron tres tipos de problemas no comunes: algebraicos, geométricos y los relacionados con economía. Esto con el fin de aplicar un cuestionario de tres problemas (uno de cada tipo) a un grupo de estudiantes de tercer año de bachillerato de Cedral, S.L.P.

Este trabajo está conformado por 7 capítulos. En el capítulo 1 se muestra la investigación que se realizó en el currículo de tercer año de bachillerato, el plan de estudio y el libro de texto. Además, se incluyen investigaciones referentes a este tema. En el capítulo 2 se presenta la problemática, las preguntas y objetivos de investigación que guiaron a este trabajo. El capítulo 3 corresponde a las teorías y sus constructos teóricos que respaldan al estudio realizado. En el capítulo 4 se detalla la metodología y el diseño de investigación que guio a este trabajo. Los resultados obtenidos se muestran en el capítulo 5. El capítulo 6 corresponde al análisis y discusión derivada de los resultados. Por último, las respuestas a las preguntas de investigación se presentan en el capítulo 7, así como también las conclusiones derivadas de este estudio.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

CAPÍTULO 1
ANTECEDENTES

Introducción

En este capítulo se describe qué es la optimización, se muestra cómo se aborda el tema de optimización en bachillerato y cómo aparece en el currículo. El motivo por el cual se aborda solamente el nivel medio superior es debido a que en los niveles anteriores no se hace mención explícita de dicho contenido en los programas educativos, y solo se hace referencia a éste en el bachillerato en el tema de la aplicación de la derivada, particularmente mediante el criterio de la primera y segunda derivada. Por último, se mencionan investigaciones previas sobre la optimización en matemática educativa.

1.1 ¿Qué es la optimización?

En diversas áreas de la vida las personas quieren optimizar tiempo, dinero, esfuerzo, entre otras cosas. Por ejemplo, cuando buscan un trabajo prefieren tener uno con mayor ingreso salarial en el menor tiempo laboral; las fábricas tratan de invertir lo menos posible de capital y, a su vez, obtener la ganancia máxima; en algunas empresas de troquelado, los trabajadores tratan de utilizar el mayor número de figuras en la lámina en la cual se va a realizar el trabajo, todo esto con el fin de reducir el material desperdiciado.

Además, las personas comúnmente buscan reducir al mínimo lo que les hace daño para tener una salud óptima, también quieren hacer rendir su dinero al tratar de comprar un número máximo de productos gastando lo menor posible; al invertir dinero se busca la opción en la cual se pueda obtener la mayor ganancia o en la cual se tenga el mínimo de pérdida; cuando las personas se dirigen a un lugar en específico procuran tomar el mejor camino para llegar, es decir, aquel en el que se llegue en menor tiempo. Otro claro ejemplo es el de las abejas, ellas construyen sus panales con celdas hexagonales, de modo que se aprovecha el máximo espacio, por lo que se utiliza muy poca cera para construirlo y se puede almacenar la mayor cantidad posible de miel.

Como se puede ver, querer optimizar siempre ha estado presente en la vida cotidiana. En muchas de las situaciones que se presentan en la vida no utilizamos matemáticas rigurosas para resolverlas, sin embargo, sí buscamos una solución óptima.

En matemáticas, optimizar se define como "*buscar el máximo o menor valor de una función limitada por algún tipo de restricción. La restricción será alguna condición (que normalmente puede describirse mediante una ecuación) que debe ser absolutamente cierta sin importar cuál sea nuestra solución*" (Dawkins, 2007, p. 308). Es decir, es obtener el valor máximo o mínimo que una función puede tomar teniendo en cuenta ciertas restricciones.

Por otro lado, en el libro de Cálculo Diferencial para Bachillerato se define como "*buscar cómo maximizar o minimizar determinado resultado o variable, por ejemplo, encontrar cómo hacer algo que cueste lo menos posible o que tenga el mayor volumen posible, entre otras posibilidades*" (Ylé, Juárez y Vizcarra, 2012, p. 310).

1.2 Optimización en el bachillerato

En el plan de estudios del bachillerato, la optimización se aborda en quinto semestre en la asignatura de Matemáticas V. Esta materia propone que el estudiante, mediante el análisis de la razón de cambio promedio e instantánea, construya el concepto de límite, y este a su vez "*establece los antecedentes de la derivada con lo cual estará en condiciones de resolver problemas de máximos y mínimos*" (Colegio de Bachilleres, 2016, p.12).

En los planes de estudio de referencia del componente básico del marco curricular común de la educación media superior del año 2017 se integraron los contenidos de la asignatura de Cálculo Diferencial que se aborda en bachillerato general junto con los del bachillerato tecnológico. Esto debido a que los contenidos en ambos tipos de bachilleratos son claramente diferentes por lo que requirió formar un solo programa. En la Tabla 1.1 se puede observar que solo en el bachillerato general está el integrado el tema de optimización sobre cómo calcular e interpretar máximos y mínimos sobre tres tipos de fenómenos, mientras que en el bachillerato tecnológico simplemente no aparece este tema.

Cálculo diferencial BG - 3 horas	Cálculo diferencial BT - 4 horas
Argumentas el estudio del Cálculo mediante el análisis de su evolución, sus modelos matemáticos y su relación con hechos reales. Resuelves problemas de límites en situaciones de carácter económico, administrativo, natural y social. Calculas, interpretas y analizas razones de cambio en fenómenos naturales, sociales, económicos, administrativos, en la agricultura, en la ganadería y en la industria. Calculas e interpretas máximos y mínimos sobre los fenómenos que han cambiado en el tiempo de la producción, producción industrial o agropecuaria.	**Pre-Cálculo** Números reales, intervalos, desigualdades. **Funciones** Dominio y contra dominio, clasificación, comportamiento, operaciones. **Límites** Límite de una función, propiedades, continuidad de una función. **Derivada** Razón de cambio promedio de interpretación geométrica, Derivación de funciones, derivadas sucesivas, comportamiento.

Tabla 1.1 Bachillerato general y bachillerato tecnológico (SEP, 2017)

En la Tabla 1.2 se observa el cuadro de aprendizajes claves que se desarrollarán en el curso de Cálculo Diferencial. En éste se observa cómo inmediatamente después de la introducción a las derivadas se aborda el tema de los criterios de optimización, sin embargo, solo se mencionan específicamente los criterios para determinar si un valor es un máximo o mínimo. Posteriormente se abordan las nociones básicas de la primera y segunda derivada. Como último tema se presenta la optimización de funciones algebraicas y trascendentes.

Eje	Componentes	Contenidos centrales
Pensamiento y lenguaje variacional.	**Cambio y predicción: elementos del Cálculo.**	Conceptos básicos de sistemas de coordenadas, orientación y posición.
		Introducción a las funciones algebraicas y elementos de las funciones trascendentes elementales.
		Usos de la derivada en diversas situaciones contextuales.
		Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites.
		Tratamiento del cambio y la variación: estrategias variacionales.
		Graficación de funciones por diversos métodos.
		Introducción a las funciones continuas y a la derivada como una función.
		Criterios de optimización: Criterios de localización para máximos y mínimos de funciones.
		Nociones básicas de derivación de orden uno y orden dos (primera y segunda derivada).
		Optimización y graficación de funciones elementales (algebraicas y trascendentes).

Tabla 1.2 Cuadro de aprendizajes claves (SEP, 2017)

En cuanto al cuadro de contenidos de Cálculo Diferencial (ver Tabla 1.3) se aborda como contenido central el uso de la derivada en diversas situaciones contextuales.

Sin embargo, en la parte de contenido específico y en el de aprendizaje esperado, se ignora totalmente ese punto. No se menciona más sobre las situaciones contextuales. Esto claramente significa que solo interesa la parte algorítmica y se hace a un lado el enfoque en distintos contextos. Además, en la parte donde se abordan los máximos y mínimos como contenido central, no se muestra la aplicación de los criterios de la primera y segunda derivada en problemas de optimización. Esto se ve claramente en el aprendizaje esperado, donde solo importa la localización de estos puntos en funciones polinomiales y trigonométricas.

EJE	COMPONENTE	CONTENIDOS CENTRALES	CONTENIDO ESPECÍFICO	APRENDIZAJE ESPERADO	PRODUCTO ESPERADO
Pensamiento y lenguaje variacional.	Cambio y predicción: elementos del Cálculo.	**Usos de la derivada en diversas situaciones contextuales**. Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites. Tratamiento del cambio y la variación: estrategias variacionales.	• ¿Qué tipo de procesos se precisan para tratar con el cambio y la optimización, sus propiedades, sus relaciones y sus transformaciones representacionales? • ¿Por qué las medidas del cambio resultan útiles para el tratamiento de diferentes situaciones contextuales? • ¿Se pueden sumar las funciones?, ¿qué se obtiene de sumar una función lineal con otra función lineal?, ¿una cuadrática con una lineal?, ¿se le ocurren otras? • Construyendo modelos predictivos de fenómenos de cambio continuo y cambio discreto. • Calcular derivadas de funciones mediante técnicas diversas.	• Encuentra en forma aproximada los máximos y mínimos de una función. • Opera algebraica y aritméticamente, representa y trata gráficamente a las funciones polinomiales básicas (lineales, cuadráticas y cúbicas). • Determina algebraica y visualmente las asíntotas de algunas funciones racionales básicas. • Utiliza procesos para la derivación y representan a los objetos derivada y derivada sucesiva como medios adecuados para la predicción local.	Estimar si una población crece exponencialmente, ¿cómo se estima su valor unos años después?
Pensamiento y lenguaje variacional.	Cambio y predicción: elementos del Cálculo.	**Graficación de funciones por diversos métodos**. Introducción a las funciones continuas y a la derivada como una función. Criterios de optimización: Criterios de localización para máximos y mínimos de funciones.	• Determinar el máximo o el mínimo de una función mediante los criterios de la derivada ¿Dónde se crece más rápido? • Encontrar los puntos de inflexión de una curva mediante el criterio de la segunda derivada. ¿Cómo se ve la gráfica en un punto de inflexión? ¿Podrías recortar el papel siguiente esa gráfica?, ¿qué observas?	Localiza los máximos, mínimos, las inflexiones de una gráfica para funciones polinomiales y trigonométricas.	• Localizar en el plano cartesiano las regiones de crecimiento y de decrecimiento de una función dada en un contexto específico. • Calcular el máximo de la trayectoria en el tiro parabólico.
Pensamiento y lenguaje variacional.	Cambio y predicción: elementos del Cálculo.	**Nociones básicas de derivación de orden uno y orden dos (primera y segunda derivada)**. Optimización y graficación de funciones elementales (algebraicas y trascendentes).	• Reconocer las propiedades físicas como posición, velocidad y aceleración y su correspondencia con la función, la derivada primera y la segunda derivada de una función. Interpretación física de los puntos singulares. • Calcular derivadas sucesivas de funciones polinomiales y trigonométricas mediante algoritmos, no mayor a la tercera derivada. ¿Existen caminos directos para derivar?, ¿qué métodos conocemos? • Predice el comportamiento en el crecimiento de un proceso de cambio en el dominio continuo (variables reales) y en el dominio discreto (variables enteras).	Calcula y resuelve operaciones gráficas con funciones para analizar el comportamiento local de un función (los ceros de f, f ’y f ”). En algunos casos, se podrán estudiar los cambios de f ” mediante la tercera derivada.	Localizar los ceros de f y sus derivadas hasta el orden tres.

Tabla 1.3 Cuadro de contenidos de Cálculo Diferencial (SEP, 2017)

Cabe destacar que, en la revisión realizada del programa, la optimización se presenta como la aplicación de la derivada. Además, en los aprendizajes esperados no se menciona explícitamente la resolución de problemas de optimización. De hecho, en la Tabla 1.3 si bien se menciona a la optimización en el contenido central, no vuelve a aparecer el tema en el aprendizaje esperado, sino que solo es de interés aprender a localizar los ceros de las funciones y sus derivadas. Por lo que es fácil concluir que no le dan tanta importancia a la optimización y a los problemas que involucren optimizar.

1.3 Tratamiento de la optimización en el libro de texto

En el nivel medio superior, el tema de optimización se aborda en quinto semestre. En el libro de texto Cálculo I para Bachillerato (Ylé, Juárez, y Vizcarra, 2012) se presenta la definición de los máximos y mínimos de una función:

> Un punto $x_0$es un máximo local de una función f,si el valor $f(x_0)$ es **mayor** que todos los valores que toma la función en un intervalo del tipo $(x_0 - a, x_0 + a)$.
>
> Un punto x_0 es un **mínimo local** de una función f, si el valor $f(x_0)$ es menor que todos los valores que toma la función en un intervalo del tipo $(x_0 - a, x_0 + a)$.
>
> Una función **puede tener varios extremos locales** y al mayor (menor) de todos ellos se le llama máximo absoluto (mínimo absoluto). De igual modo **puede suceder que una función no tenga ningún extremo relativo.** (p.285).

Posteriormente se presenta un recuadro (ver Figura 1.5) con el procedimiento o algoritmo para obtener los extremos locales de un ejemplo en concreto con una explicación detallada de cada paso y con ayuda de la visualización gráfica de la función.

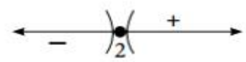
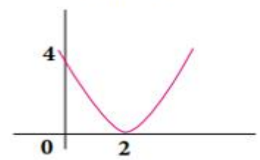
Procedimiento para determinar la monotonía y los extremos locales de una función.	
Ejemplo 17: $y = x^2 - 4x + 4$	
1. Se calcula la primera derivada de la función.	$y' = 2x - 4$
2. Se determinan los ceros de la derivada, o sea los puntos donde ella se anula (puntos críticos). En este caso $x = 2$ es un cero y es el único.	$2x - 4 = 0$ $2x = 4$ $x = 2$
3. Se investiga los signos de la derivada en los intervalos determinados por los ceros. En este caso solo son: $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$	
4. Como la derivada es negativa para $x<2$ ahí la función es decreciente y como es positiva para $x>2$ ahí la función es creciente. Además, como la derivada pasa de negativa a positiva en 2, en ese punto hay un mínimo local. Ese valor mínimo se calcula evaluando la función en $x=2$. En este caso $y=(2)^2- 4(2) + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$ Por tanto, se dice que la función **tiene un mínimo en 2 y que ese valor mínimo es 0.** También se puede decir que la gráfica de la función tiene un mínimo en **(2 , 0).**	**Un esbozo aproximado de la gráfica de la función dada es el siguiente:**  **Después tendrás más elementos para hacer la gráfica más cercana a la realidad.**

Figura 1.4 Procedimiento para obtener extremos locales (Ylé, Juárez, y Vizcarra, 2012)

Después del recuadro, se menciona que no es suficiente con ese procedimiento para saber la existencia de máximos y mínimos. Por lo tanto, presentan un recuadro con el criterio de la primera derivada (ver Figura 1.5). Se señala cuándo es un máximo o un mínimo local en el punto x_0 de una función.

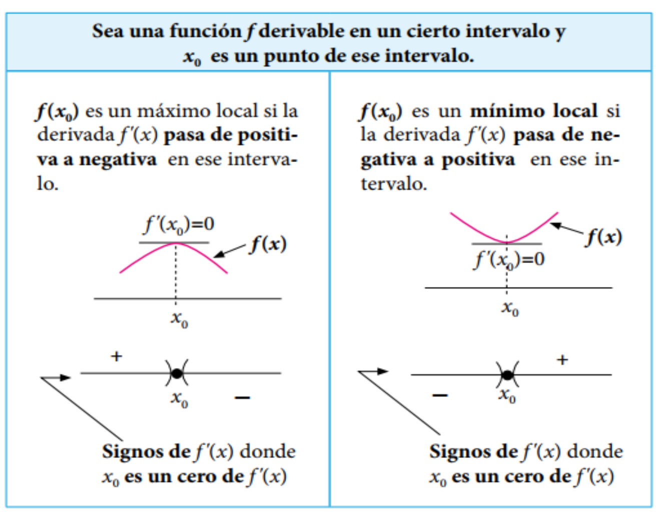


Figura 1.5 Criterio de la primera derivada (Ylé, Juárez, y Vizcarra, 2012)

En la Figura 1.6 se puede observar que los ejercicios que el estudiante debe resolver son solamente para aplicar los algoritmos presentados anteriormente en la Figura 1.4 y Figura 1.5. Sin embargo, se incluye una parte de la resolución y la respuesta de cada ejercicio.

Ejemplo 18: Analiza en qué puntos es posible que tenga extremos locales la función

a) $y = 4x^2+2x$ b) $y = 5x + 1$ c) $y = x^3 + 2$

d) $y = 4\text{sen}\, x + 3$ e) $y = \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$

Resolución: Como solo piden los puntos donde haya posibles extremos basta con hallar los ceros de la primera derivada.

a) $y = 4x^2 + 2x \Rightarrow y' = 8x + 2 = 0 \Rightarrow x = -0.25 \Rightarrow P(-0.25, f(-0.25))$ es posible.

b) $y = 5x + 1 \Rightarrow y' = 5 \neq 0$. La función no tiene extremos locales para todo x.

c) $y = x^3 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow P(0,2)$ es el único punto posible.

d) $y = 4\ \text{sen}\, x + 3 \Rightarrow y' = 4\cos x$. Resolviendo la ecuación $y' = 0$ obtenemos que

$4\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow$ Todos los puntos de abscisa $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ son los posibles extremos locales.

e) $y = \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 \Rightarrow y' = 5x^2 + x - 3 = 0.$ Entonces los puntos de abscisa igual a $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{10} \Rightarrow x_1 \approx 0{,}681$ y $x_2 \approx -0{,}881$ son los posibles extremos.

Figura 1.6 Lista de ejercicios con el criterio de la primera derivada (Ylé, Juárez, y Vizcarra, 2012)

En la Figura 1.7 se muestran algunas de las actividades de aprendizaje que se dejan al estudiante. La última actividad son dos demostraciones, sin embargo, en ningún momento se presentó alguna demostración que sirviera de guía o ejemplo de las definiciones ni de ejercicios parecidos a los de la actividad. Ni tampoco se proporcionó una explicación sobre cómo hacer una demostración.

Act-33) Determina en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$, los extremos locales (máximo o mínimo) de las siguientes funciones.

a) $y = \frac{1}{2}\text{sen}\ 2x$ b) $y = \cos^2 x - \cos x$

c) $y = x - 2\ \text{sen}\ x$ d) $y = (\text{sen}\ x)(1 + \cos x)$

e) $y = 4\cos^3 x - 3\cos x$ f) $y = 1 - 7\text{sen}\left(\pi + \frac{x}{8}\right)$

g) $y = 4\text{sen}\ x - 3\cos x$ h) $y = (\text{sen}\ x)(1 - 2\cos x)$

Act-34) ¿Para qué valores de k, $y = k\ \text{sen}\ x + \frac{1}{3}\text{sen}\ 3x$ tiene un extremo en $x = \frac{\pi}{3}$?

Act-35) Determina los valores de a y b para los cuales la función $y = a\ ln\ x + bx^2 + x$ tiene extremos en los puntos $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

Act-36) Demuestra la desigualdad $e^x \geq x + 1$. (Sugerencia: Prueba que la función $f(x) = e^x - x - 1$ toma su valor mínimo para $x = 0$.)

Act-37) Demuestra las siguientes desigualdades:

a) $\text{sen}\ x < x$, para $x > 0$ a) $ln(x + 1) < x$, para $x > 0$

Figura 1.7 Actividades de aprendizaje (Ylé, Juárez, y Vizcarra, 2012)

Posteriormente, en la página 292 se presenta en un recuadro (ver Figura 1.8) el criterio de concavidad. Dicho teorema tampoco se demuestra, sino que simplemente se "justifica intuitivamente".

Teorema 4.
Sea f una función que tiene segunda derivada en x_0. Se cumple que:
Si $f''(x_0) \geq 0$ entonces f es cóncava hacia arriba en x_0
Si $f''(x_0) \leq 0$ entonces f es cóncava hacia abajo en x_0
Si $f''(x_0) = 0$ entonces f cambia de sentido de su concavidad en x_0, o sea tiene un punto de inflexión en x_0.

Este teorema se puede justificar intuitivamente si nos damos cuenta que en donde la $f''(x_0) \geq 0$ la derivada de f es creciente (por el Teorema 1), o sea las pendientes de las rectas tangentes a la curva son valores crecientes hasta llegar al punto de inflexión que es el cero de la segunda derivada.

De igual modo en donde $f''(x_0) \leq 0$ la derivada de f es decreciente (por el Teorema 2), o sea las pendientes de las rectas tangentes a la curva son valores que van decreciendo hasta llegar al punto de inflexión. En ambos casos hay un significado geométrico.

Observen en la figura 4.30 que en el tramo AB las cinco tangentes representadas van aumentando sus pendientes hasta llegar a B. En el tramo BC las tangentes trazadas empiezan a disminuir sus pendientes hasta llegar a C donde empiezan a aumentar, pero en D vuelven a disminuir.

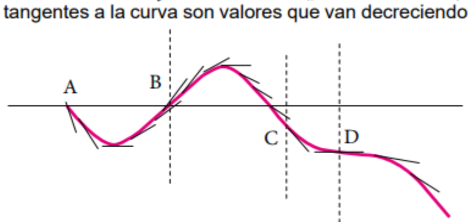


Figura 4.30

Lo anterior significa que en el tramo AB la función es cóncava hacia arriba, en el BC cóncava hacia abajo, en el CD cóncava hacia arriba y a partir de D es cóncava hacia abajo. **En B, C y D hay puntos de inflexión.**

Figura 1.8 Criterio de Concavidad (Ylé, Juárez, y Vizcarra, 2012)

Posteriormente se muestra un recuadro con el teorema de la segunda derivada, en la cual tampoco se incluye su demostración. Después del recuadro se presentan ejemplos con su resolución y después se dejan actividades de aprendizaje para el estudiante.

Act-40) Calcula los máximos y los mínimos locales de la función usando el criterio de la segunda derivada.

a) $f(x) = x(12 - 2x)^2$ b) $y = x^2 + \dfrac{250}{x}$

c) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ d) $f(x) = 3 + 2x - x^2$

e) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

g) $f(x) = (2 - x)^3$ h) $y = (x^2 - 4)^2$

i) $y = x^3 + \dfrac{48}{x}$ j) $y = 2x^3 + 7x$

Figura 1.9 Actividades de aprendizaje del criterio de la segunda derivada (Ylé, Juárez, y Vizcarra, 2012)

Como se puede observar en la Figura 1.9, nuevamente los ejercicios son para aplicar los algoritmos señalados en el libro de texto. Es decir, tienen como objetivo que sirvan de práctica para el estudiante.

En la página 310, en el apartado 4.5 se abordan las aplicaciones de la optimización. Se incluyen problemas de ingeniería, economía, administración, comercio, entre otros. Además, se presenta el proceso para la modelización matemática (ver Figura 1.10) para la resolución de este tipo de problemas.

(a) **Formulación del problema:** Poner de manera clara y explícita la formulación de una tarea (o actividad de aprendizaje) identificando las características de una realidad percibida como problemática y que será modelada o matematizada.

(b) **Sistematización:** selección de los objetos relevantes, relaciones, etc. Del dominio de investigación resultante e idealización de las mismas para hacer posible una representación matemática.

(c) **Traducción** de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.

(d) **Uso de métodos y modelos matemáticos** para arribar a resultados matemáticos o cuantitativos.

(e) **Interpretación de los resultados** y conclusiones cuantitativas y cualitativas considerando el dominio y las condiciones de la investigación inicial.

(f) **Evaluación de la validez del modelo y los resultados** por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

Figura 1.10 Modelización matemática (Ylé, Juárez, y Vizcarra, 2012)

Después se presentan los problemas de optimización y se muestran algunos ejemplos resueltos (ver Figura 1.11). Los ejercicios propuestos no están dentro del contexto del estudiante. Se podría decir que se presentan los problemas típicos de optimización como: volumen de una caja, producción máxima, ganancia máxima, área máxima de una figura, etcétera. Nunca se le menciona al estudiante en qué parte de su vida es aplicable la optimización.

Es fácil notar que lo que el estudiante solamente va a realizar en los ejercicios propuestos es copiar los pasos que se presentan anteriormente (Figura 1.10). Es decir, no se le proporciona al estudiante las habilidades que necesita para resolver este tipo de problemas. Solamente es una reproducción tal cual se realizó en los ejemplos del libro.

Ejemplo 31: En condiciones de competencia perfecta, una empresa puede vender los artículos que produce a $500 por unidad. Si $C(x) = 2x^2 + 40x + 1400$ en pesos es el costo total de la producción diaria cuando se producen x artículos. Determine el número de unidades que deben producirse diariamente a fin de que la empresa obtenga la máxima ganancia total diaria.

Resolución: Según los datos del problema la función objetivo de la ganancia G (igual a las Ventas menos los costos de producción) será

$$G(x) = 500x - C(x) = 500x - 2x^2 - 40x - 1400 = -2x^2 + 460x - 1400$$

Calculando su derivada y los puntos críticos: $G'(x) = -4x + 460 = 0 \Rightarrow x = 115$.

Como la función de la ganancia es continua en su dominio, entonces tiene valor un máximo o un mínimo. En este caso se trata de un valor máximo ya que $G''(x) = -4 < 0$ y es igual a:

$$G(x) = -2(115)^2 + 460(115) - 1400 = 25050 \text{ pesos}$$

Figura 1.11 Ejemplo de un problema de optimización (Ylé, Juárez, y Vizcarra, 2012)

En sí, lo que se propone en el libro es aprenderse el procedimiento o algoritmo. Por ejemplo, en la página 315, se observa un recuadro (ver Figura 1.12) con el procedimiento para resolver problemas de optimización. Solamente se le dice al estudiante que debe aprender cada paso para poder resolver este tipo de problemas. Es decir, solo debe memorizar el procedimiento. Nunca se prepara al estudiante para adquirir otras habilidades que le ayudarán a plantear las funciones para resolverlos.

El siguiente procedimiento para optimizar una función debes aprenderlo y usarlo correctamente.

Procedimiento para resolver problemas de optimización, o sea de hallar máximos o mínimos globales de una función.	
Primero	Hacer una figura de análisis si lo consideras necesario.
Segundo	Identificar la función que hay que optimizar (función objetivo) y las condiciones que dan para hacerlo (funciones de enlace).
Tercero	Expresar la función objetivo en términos de una sola variable sustituyendo en su ecuación la relación de enlace y precisar el dominio de definición de esa función.
Cuarto	Determinar los puntos de máximo (mínimo) local de la función objetivo y evaluar la función en dicho punto para conocer cuál es su valor máximo (mínimo).
Quinto	Determinar los valores de la función en los extremos del intervalo donde está definida y comparar ese valor con el valor máximo (mínimo) antes hallado.
Sexto	Concluir cuál es el punto de máximo (mínimo) global y darle respuesta a la pregunta del problema.

Figura 1.12 Procedimiento para resolver problemas de optimización (Ylé, Juárez, y Vizcarra, 2012)

Finalmente se presentan las actividades de aprendizaje que el estudiante debe resolver. En la Figura 1.13 se muestran algunas de las actividades, las cuales tampoco están dentro del contexto de los estudiantes o que por lo menos sean parte de la vida cotidiana.

Act-64) Un agricultor estima que en un terreno si se plantan 400 matas de aguacates, la producción estimada será de 350 Kg. por árbol y que por cada árbol que se deje de plantar la producción aumentará en 4 Kg. por árbol. ¿Cuál es el número de árboles que debe plantarse en el terreno a fin de obtener la máxima cosecha posible en el terreno? ¿Cuál es este valor máximo?

Act-65) El alcance de un proyectil (no tomando en consideración la resistencia del aire y otras causas perturbadoras) está dado por la fórmula $x = \frac{2V_0}{g}$ sen $\alpha \cdot$ cos α, donde V_0 representa el valor de la velocidad inicial, g la aceleración debida a la gravedad y α el ángulo de tiro. ¿Qué valor ha de tener α para que el alcance del proyectil sea máximo?

Act-66) En el problema anterior, la altura del proyectil en el instante t está dada por la fórmula $h = v_0\, t \text{ sen } \alpha - \frac{1}{2}\, g\, t^2$. Halla la altura máxima que alcanza el proyectil para una velocidad inicial y un ángulo de tiro dados.

Act-67) Un recipiente cilíndrico de treinta litros de capacidad tiene en su parte inferior un pequeño orificio. Si el recipiente se llena de agua, se comprueba que en 30 segundos pierde un litro de líquido por el orificio. ¿Cuánto tiempo tarda el recipiente lleno en vaciarse por completo? (Sugerencia: investiga sobre el principio de Torricelli para resolverlo)

Act-68) Se diseña un proyecto de ingeniería para abastecer de agua a dos ciudades A y B de una misma estación de bombeo, que estará localizada en la rivera de un rio recto que está situado a 15 km de la ciudad A y a 10 km de la ciudad B. Si los puntos sobre el rio más cercanos a las ciudades están separados 30 km y si las ciudades están del mismo lado del rio, ¿Dónde deberá estar localizada la estación de abastecimiento para usar la menor cantidad de tubería?

Figura 1.13 Actividades de aprendizaje de optimización (Ylé, Juárez, y Vizcarra, 2012)

Se puede observar que, en los ejemplos y las actividades propuestas por el libro, no permiten que el estudiante pueda reflexionar acerca de lo que está haciendo en la resolución. Sólo proveen el algoritmo del procedimiento y se dejan muchas actividades a resolver.

Otro aspecto que destacar es que los libros presentan una gama de problemas en los que no se tiene cuidado de la relación que guarda la noción de optimización con los diferentes conceptos y objetos matemáticos. Debido a que solamente relacionan a la optimización con la noción de derivada.

1.3 Investigaciones previas sobre la optimización en Matemática Educativa

Antes que nada, es necesario mencionar que el campo donde se inscriben los artículos que se discuten en esta sección pertenecen a la Matemática Educativa.

Primeramente, Malaspina (2008) define los problemas de optimización como "*todo problema en el cual el objetivo fundamental es obtener un valor máximo o un valor mínimo de alguna variable*" (p.25). Este autor considera, en el documento citado anteriormente, que sí existe una intuición optimizadora para resolver problemas de este tipo. Esto debido a las experiencias que los seres humanos tienen a lo largo de su vida y que experimentan situaciones en donde tienen que elegir la opción óptima.

Además, menciona que el ser humano experimenta consigo mismo, esto significa que al tener conocimiento de qué le hace mejor o qué le hace mal crea estrategias para obtener los resultados óptimos.

Malaspina (2008) señala que no existe una orientación hacia el desarrollo de la intuición. Debido a que en cálculo diferencial solo se brinda al estudiante los pasos a seguir para resolver los problemas de optimización, por lo que no estimula su creatividad. Incluso menciona "*en particular, cuando se usan las palabras mínimo y máximo no se hace tomar conciencia del significado de estos conceptos en el contexto que se está usando, ni hay énfasis en la verificación de que lo obtenido es realmente óptimo*" (p.264).

Por otra parte, Balcaza, Contreras de la Fuente & Font (2017) realizaron un análisis minucioso sobre la optimización en los libros de texto de bachillerato. Detectaron una serie de conflictos semióticos que podrían causar que el estudiante presente problemas al aprender el tema. Además, encontraron que los problemas de optimización en diversas áreas no se presentan en los libros. Lo cual causa una contradicción debido a que en realidad en muchas áreas de la ciencia se busca una solución óptima. Por lo cual, mencionan que es esencial presentar más variedad de situaciones para completar el significado de la optimización. También hacen mención que se le da una mayor importancia al procedimiento que a los conceptos, lo cual ocasiona que si el estudiante les da una interpretación errónea a los conceptos claves entonces las soluciones no serán las correctas.

Además, Balcaza, Contreras de la Fuente & Font (2017) señalan que la forma de resolver los problemas es la misma en los libros de texto que analizaron, esto ocasiona que se enseñe de manera rutinaria y algorítmica, y, por ende, no se realicen conexiones conceptuales adecuadas.

Malaspina y Font (2015) mencionan que la intuición de la optimización está relacionada con la idealización, la generalización y la argumentación. Esta intuición se desarrolla a través de dos tipos de experiencia. El primer tipo sucede cuando en la vida diaria las personas se enfrentan a la tarea de tomar decisiones óptimas. Por otro lado, el segundo tipo de experiencia es más personal, por ejemplo, el pasar por situaciones críticas con nuestra salud o nuestro bienestar. Es por este tipo de situaciones y experiencias que los estudiantes pueden entender problemas de optimización por lo que les permite responder intuitivamente a algunos problemas. Por ejemplo, si los estudiantes observan en el pizarrón el esbozo de una parábola, incluso sin mencionarles qué es, ellos sabrán que el profesor se refiere a una parábola.

Es necesario también abordar en este punto la noción de complejidad (Rondero y Font, 2010). Se trata de la complejidad asociada a la noción de optimización, la cual puede ser optimización geométrica, numérica, en donde la optimización se relaciona con distintos conceptos y objetos matemáticos, y no se reduce exclusivamente a la relación entre optimización y el concepto de derivada. Cabe mencionar que en los libros de texto no se hace referencia a que existen diversos tipos de optimización, tales como optimización numérica, gráfica, geométrica, entre otros.

1.5 Reflexión acerca de los antecedentes

De acuerdo con el análisis realizado del plan de estudios y la forma en la que se aborda el tema de máximos y mínimos, en particular el de optimización, se puede concluir que no es de principal interés que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para resolver problemas de optimización en diferentes áreas de la ciencia.

Como se observó antes, solamente se presentan los algoritmos y los pasos específicos para resolver los problemas de optimización, esto con motivo de que el estudiante simplemente siga paso por paso en la resolución, sin importar que él reflexione acerca de lo que está realizando o por qué lo hace. Así también se observa lo que menciona Malaspina (2008) acerca de que no se enseña a verificar y a argumentar que realmente el resultado obtenido haya sido el óptimo.

En cuanto al tipo de problemas que se presentan en los libros de texto, estos no son acordes al contexto del estudiante. Este tipo de problemas se podrían considerar como “típicos”. Los cuales sirven meramente para preparar a los estudiantes en las evaluaciones mediante el uso de memorización de reglas y algoritmos. Sin embargo, esto no ayuda a desarrollar el pensamiento matemático ni a desarrollar la intuición optimizadora.

Debido a esto, cabe señalar que hay escasas investigaciones sobre la comprensión de la optimización, por lo que abordar dicha problemática desde dos teorías sería muy importante para obtener más información relevante a este tema.

En el siguiente capítulo se presenta el problema de investigación, las preguntas de investigación y los objetivos que guiaron al trabajo.

CAPÍTULO 2

PROBLEMA Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 2
PROBLEMA Y
PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Introducción

Los antecedentes presentados en el capítulo anterior permitieron tener un acercamiento al problema de investigación. En este capítulo se describe el problema de investigación relacionado con la comprensión de la optimización por parte de los estudiantes de bachillerato y las preguntas de investigación que guiaron al trabajo. Por último, se presentan los objetivos que se pretenden alcanzar.

2.1 Problema de investigación

Con respecto al análisis de los libros de texto acerca de cómo se aborda el tema de la optimización mediante la resolución de problemas que implican la aplicación del criterio de la primera y segunda derivada, y con lo que mencionan las investigaciones al respecto a este tema, se identificó el problema existente. Los estudiantes no comprenden qué es la optimización, desconocen la complejidad, en el sentido de Rondero y Font (2010), de dicha noción y únicamente asocian la optimización a un mero proceso algorítmico.

Los estudiantes minimizan la importancia del papel de la noción de optimización y consideran que optimizar solo se refiere a la aplicación de la derivada mediante la realización de un algoritmo que inicia con la búsqueda de una función, su derivación, la obtención de las raíces, al cálculo de la segunda derivada, a la sustitución de las raíces encontradas y a la identificación del signo de la segunda derivada para conocer si las raíces corresponden a un máximo, mínimo o punto de inflexión.

Sin embargo, ante situaciones ligeramente distintas de las que se presentan en los textos, los alumnos se muestran incapaces de resolver dichos problemas.

Es por lo anterior que en la presente investigación se planteó la tarea de conocer cuáles son algunas de las concepciones que tienen los estudiantes acerca de la optimización en el contexto de la resolución de problemas en el marco de una enseñanza tradicional guiada por el programa educativo vigente. Esto conlleva los pasos que realizan los estudiantes al resolverlo, los argumentos que presentan para aplicar los criterios de la primera y segunda derivada, y las justificaciones sobre el resultado que obtienen.

Para tener un acercamiento más adecuado a las concepciones que generan los estudiantes acerca de la optimización, se llevó a cabo un análisis tomando en cuenta dos enfoques teóricos. Por lo que el problema se aborda desde dos teorías educativas: una teoría educativa general de corte cognitivo y la otra, específica de la matemática educativa, de tipo constructivista.

2.3 Preguntas de investigación

Pregunta de investigación 1

¿Qué características presenta la práctica de resolución de problemas que involucran optimización?

Pregunta de investigación 2

¿Qué significado asocian a la optimización en el contexto de problemas de Cálculo Diferencial de tipo numérico, geométrico, y sobre economía?

2.4 Objetivo general

Conocer las concepciones acerca de la optimización que tienen algunos alumnos de nivel medio superior a partir de la manera en que éstos se desempeñan al resolver problemas que involucran optimización.

2.5 Objetivos específicos

Para tener el acercamiento a las concepciones de los estudiantes, el trabajo considera un análisis gráfico de la actividad matemática que llevan los alumnos tomando en cuenta dos técnicas, el Mapa Conceptual Hibrido (MCH desde ahora) y una V de Gowin, los cuales son interpretados desde la Teoría del enfoque ontosemiótico y la Teoría del aprendizaje significativo, respectivamente.

Con base en lo anterior, los objetivos particulares se describen a continuación:

Objetivo 1

Diseñar un cuestionario con tres tipos de problemas que involucren optimización y aplicarlo a estudiantes de quinto semestre de nivel bachillerato.

Objetivo 2

Realizar una entrevista sobre la resolución de los tres problemas de cálculo diferencial a dos estudiantes seleccionados para obtener la producción oral y escrita de cada problema.

Objetivo 3

Elaborar el MCH y la V de Gowin para representar esquemáticamente los objetos y procesos involucrados en la resolución de un conjunto de problemas de cálculo diferencial que involucran optimización.

Objetivo 4

Analizar y describir a través del MCH interpretado desde el Enfoque Ontosemiótico, y de la V de Gowin desde la Teoría del Aprendizaje Significativo, cómo es la comprensión de la optimización que manejan los estudiantes.

Objetivo 5

Describir el aporte que brinda el análisis de la optimización desde la Teoría del Aprendizaje Significativo, y el Enfoque Ontosemiótico, apoyado de las técnicas del MCH y la V de Gowin para caracterizar las concepciones de la optimización.

Indagar en las concepciones generadas por los estudiantes acerca de la optimización, como resultado de una enseñanza tradicional que toman en cuenta los programas vigentes, podría ayudar a los profesores a tomar ciertas acciones en la clase apoyándose en la noción de complejidad. En la siguiente sección se describen las teorías que respaldan a la investigación.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

Introducción

Debido a la necesidad de analizar los problemas a los que se enfrentan los estudiantes al resolver problemas de optimización. En esta investigación se emplearon dos marcos teóricos para tener un acercamiento a las concepciones que tienen algunos alumnos acerca de la optimización. Por consiguiente, en el presente apartado se describe en un primer momento la Teoría del Aprendizaje Significativo (TAS desde ahora) propuesta por David Ausubel (1983) y sus derivaciones, y en un segundo momento se describe el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS desde ahora) de J. Godino (1994) y colaboradores. También se describe la interpretación de las técnicas MCH y V de Gowin mediante el EOS y la TAS, respectivamente.

3.1.1 Teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel

El aprendizaje significativo es un proceso donde un nuevo conocimiento se relaciona con las estructuras cognitivas que tiene la persona que va a aprenderlo. Las estructuras cognitivas son el conocimiento previo y su organización que posee un estudiante. Por eso, es de suma importancia que los profesores conozcan los conocimientos que los estudiantes tienen antes de enseñarles un tema en específico (Ausubel, 1983). Para que el aprendizaje significativo suceda exitosamente se debe de relacionar el conocimiento nuevo con algún aspecto relevante de las estructuras cognitivas, que reciben el nombre de *subsumidores* o *anclajes*, de forma sustantiva (no al pie de la letra) y no arbitraria (Moreira, 1997). Sin embargo, el proceso no termina ahí puesto que, al relacionarse estos conocimientos, los subsumidores se modifican al fortalecerse y hacerse más completos, sirviendo de base para aprender nuevos conocimientos (Rodríguez, 2004).

La importancia de este proceso es la relación sustantiva y no arbitraria de los contenidos. Por sustantividad se refiere a las ideas claves del contenido, o sea no aprender el contenido literalmente y no utilizando las palabras empleadas al pie de la letra. No arbitrariedad es que el nuevo contenido se relacione con estructuras cognitivas relevantes que ya tienen significado en el estudiante, y no que se relacione de manera obligatoria con todo (Moreira, 1997). En la Figura 3.1 se describe mediante un esquema el aprendizaje significativo exitoso. Se observa que el conocimiento matemático escolar nuevo se relaciona con algún aspecto relevante que existe en las estructuras cognitivas de estudiante, es decir, el conocimiento previo. Esta relación es no arbitraria y no es al pie de la letra, por lo que da lugar a un conocimiento modificado, es decir, más completo.

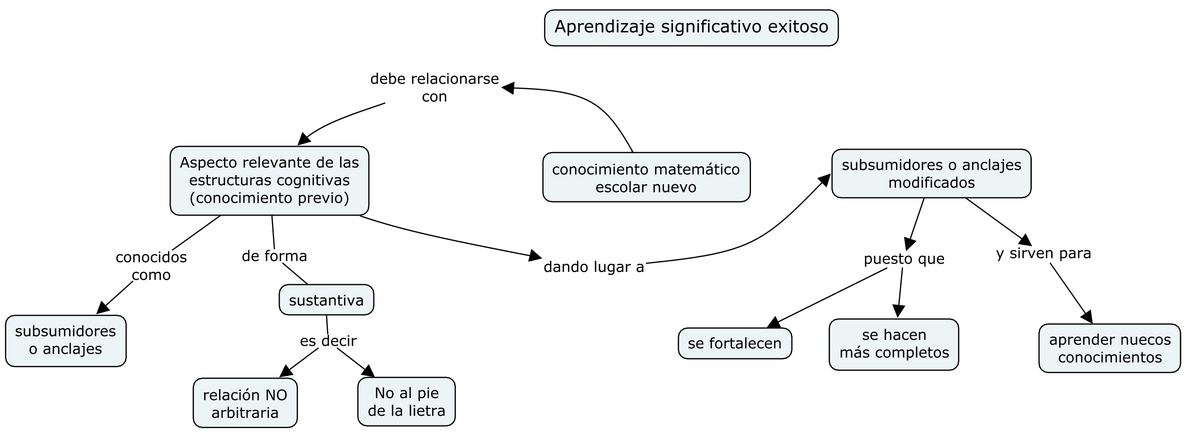


Figura 3.1 Aprendizaje significativo (elaboración propia)

Además, se establecen dos condiciones para que el aprendizaje significativo suceda:

- La actitud de predisposición del estudiante por aprender significativamente.
- Material potencialmente significativo.

Claro está, para proponer un material potencialmente significativo se debe de tomar en cuenta los conocimientos previos que el alumno tiene para que pueda establecer esa relación entre ambos conocimientos. De no ser así, no serviría de nada el material propuesto (Rodríguez, 2004).

3.1.2 Tipos de aprendizaje significativos

Existen tres tipos de aprendizaje significativo: *representacional, conceptual* y *proposicional*.

El *aprendizaje representacional* (ASR desde ahora) es el aprendizaje de lo que determinados símbolos representan. Esto por lo regular sucede cuando se aprenden las palabras (Moreira, 1997) puesto que el sujeto aprende lo que palabras aisladas representan cuando son significativas para él. Se presenta en la Figura 3.2 un esquema del aprendizaje representacional con un ejemplo de física. En este caso, el conocimiento nuevo es un símbolo el cual es del de la energía cinética. Este conocimiento se relaciona con un subsumidor del símbolo de energía (por ejemplo, energía potencial), esto da lugar a un subsumidor modificado en donde el estudiante comprende que existe otro tipo de energía que está presente cuando los cuerpos se mueven.

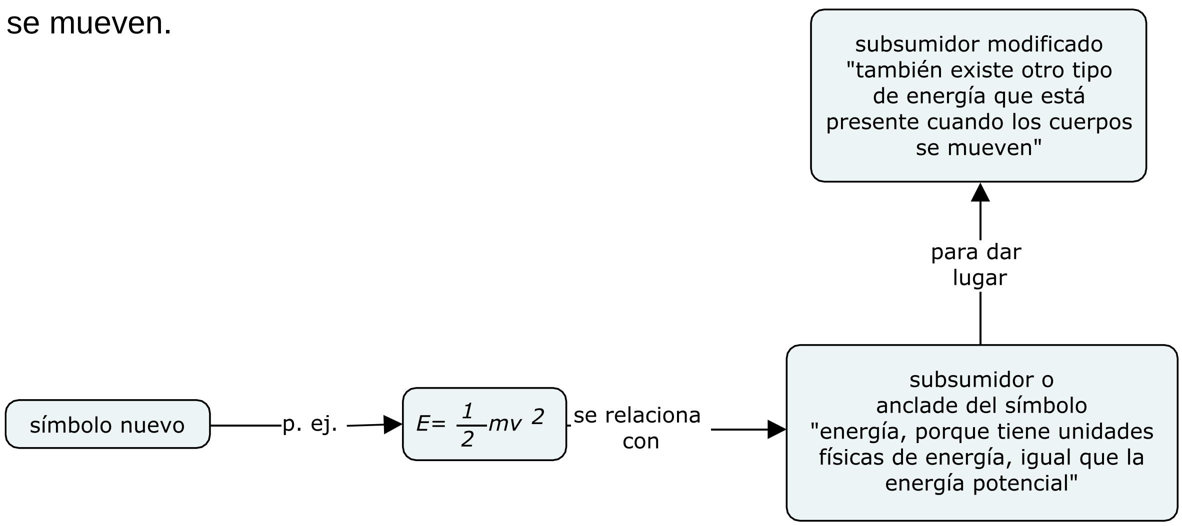


Figura 3.2 Aprendizaje representacional en física (elaboración propia)

El *aprendizaje conceptual* (ASC desde ahora) también puede considerarse de representaciones puesto que los conceptos son objetos o propiedades que poseen características comunes y que se representan por símbolos individuales. Para que un concepto sea adquirido se pasa por dos procesos: de formación y asimilación. En la formación de conceptos, las características del concepto se adquieren por medio de la experiencia. En el proceso de asimilación se utilizan las combinaciones que existen en la estructura cognitiva para definir las características de los conceptos (Ausubel, 1983). En la Figura 3.3 se presenta el esquema del aprendizaje conceptual. La experiencia da lugar a la formación de un conjunto de conceptos en la estructura cognitiva de las personas, los cuales se combinan para dar lugar a la asimilación para finalmente formar un concepto completo.

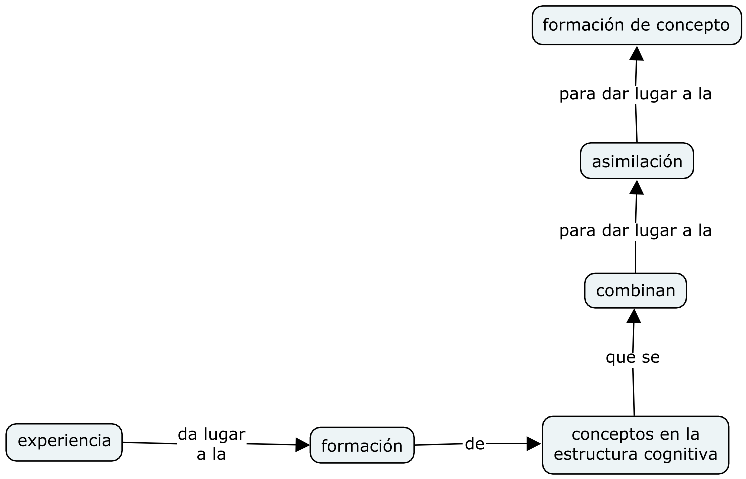


Figura 3.3 Aprendizaje significativo conceptual (elaboración propia)

El *aprendizaje proposicional* (ASP desde ahora) implica captar los significados de la combinación y relación de ideas expresadas en forma de sentencias, es decir, aprender el significado no de manera aislada, sino como un todo (Moreira, 1997). La proposición nueva, formada por palabras aisladas, se relaciona con la estructura cognitiva del sujeto para producir un nuevo significado compuesto. En la Figura 3.4 se presenta el esquema del aprendizaje proposicional. Las sentencias representan una combinación de ideas para captar significados y dar lugar al aprendizaje proposicional.

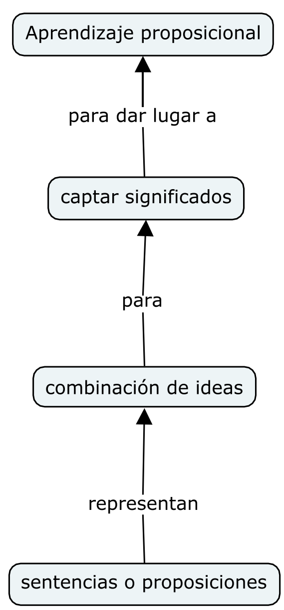


Figura 3.4 Aprendizaje significativo proposicional (elaboración propia)

3.1.3 Facetas del aprendizaje

Por otro lado, si se utiliza la estructura cognitiva y su organización jerárquica como referencia, entonces el aprendizaje significativo puede ser: *subordinado*, *superordenado* o *combinatorio.* Esto es porque según Ausubel (1983, citado en Moreira, 1997) la organización se da en términos del nivel de abstracción, generalidad e inclusividad de ideas.

El aprendizaje *subordinado* sucede cuando el nuevo conocimiento queda subordinado en la estructura cognitiva ya existente. Los conceptos y proposiciones quedan subordinados ante las ideas más generales de la estructura. Puede ser derivativo cuando el contenido nuevo se deriva de una proposición más inclusiva que ya existe en la estructura cognitiva. O bien, puede ser correlativo cuando el contenido nuevo es una extensión de ideas previamente aprendidas de manera significativa (Ausubel, 1983).

Cuando la persona aprende un nuevo concepto que abarque aún más que un concepto previamente aprendido, es cuando surge el aprendizaje *superordenado.* Esto se debe a que el concepto que ya estaba en la estructura cognitiva queda subordinado por el nuevo concepto (Moreira, 1997).

Si el concepto nuevo no es capaz de ser subordinado o subordinar a un concepto ya existente en la estructura cognitiva, el aprendizaje se llama *combinatorio* (Moreira, 1997).

3.1.4 Diferenciación progresiva y reconciliación integradora

Estos dos procesos están estrechamente relacionados y ocurren a medida que el aprendizaje significativo sucede.

Si durante la asimilación los subsumidores se modifican, adquieren un nuevo significado y se crean jerarquizaciones entre los conceptos, se le conoce como diferenciación progresiva. Este proceso ocurre mayormente cuando existe un aprendizaje significativo subordinado puesto que los subsumidores están siendo progresivamente diferenciados. En el ámbito educativo, la diferenciación progresiva puede implementarse al presentarse las ideas generales de un tema para posteriormente ser diferenciadas en términos más específicos.

Por otra parte, si se crean relaciones entre las ideas nuevas y la estructura cognitiva, de modo que se crea una nueva organización y se adquiere un nuevo significado, entonces a este proceso se le conoce como reconciliación integradora. Este proceso ocurre en los aprendizajes subordinados y combinatorios. En el ámbito educativo no solamente se debe de realizar una diferenciación progresiva, sino que se deben resaltar las semejanzas y diferencias entre los temas, para que se pueda lograr una reconciliación integradora de las incongruencias que existan (Ausubel, 1983).

3.1.5 Conceptualización en el aprendizaje significativo

Moreira (2010) menciona que para conceptualizar se debe de hacer de modo significativo debido a que sin el aprendizaje significativo no se puede conceptualizar. Los conceptos deben de ser construidos y reconstruidos de forma interna por el individuo. Esto se puede ilustrar mediante el ejemplo de un niño que va a aprender el concepto de pelota. Mediante los distintos escenarios donde se presentan objetos con forma de pelota y su interacción con dichos objetos, él construye un concepto de pelota más general.

Ausubel le atribuye gran importancia a la conceptualización en el lenguaje. Debido a que los conceptos son la base del razonamiento humano para Ausubel (1982, citado en Moreira, 2003), la adquisición del lenguaje es lo que le permite al ser humano que aprenda una gran variedad de conceptos. Además, el lenguaje es lo que permite ver las operaciones mentales que tiene una persona, es decir, el nivel que tiene para la adquisición de conceptos abstractos. Los significados complejos pueden ser representados por palabras aisladas y son los únicos que pueden ser manipulables para llevar a cabo operaciones combinatorias y transformatorias, lo cual permite la construcción de nuevos conceptos (Moreira, 2003).

Los Mapas Conceptuales son un recurso para promover el aprendizaje significativo de conceptos. Sobre todo, cuando se trabajan colaborativamente se negocia acerca de cuáles conceptos utilizar y con qué conectores pueden mostrar la relación que hay entre los conceptos (Moreira, 2010).

Sin embargo, dentro del aprendizaje significativo, las concepciones que tiene un individuo, es decir, los subsumidores, no son borrables ni reemplazados. Esto quiere decir que están siempre presentes. Una persona puede tener significados aceptados y no aceptados, es decir, puede tener concepciones erróneas en determinados contextos. A medida que la concepción se desarrolla, la discriminación de conceptos aumenta y los conceptos erróneos son menos utilizados, pero no borrados ni remplazados (Moreira & Greca, 2004).

3.1.6 La técnica la V de Gowin y el mapa conceptual

La V de Gowin

Fue desarrollada en los años 70's por Bob Gowin mediante la teoría de Ausubel. Es una herramienta que ayuda a los estudiantes y docentes a captar la estructura del conocimiento. Además, esta técnica se utiliza como medio para la resolución de un problema y para entender el procedimiento que se lleva a cabo. Facilita la construcción de conocimientos y promueve un aprendizaje significativo. (Guardian y Ballester, 2011).

En la Figura 3.6 se muestra la V de Gowin simplificada. Del lado izquierdo de la V se escribe lo teórico, es decir, las teorías, los principios y leyes, y conceptos. El lado derecho de la V corresponde a lo procedimental, en el cual se escriben las afirmaciones de valor y de conocimiento, las transformaciones, y los registros. En la parte de abajo se escriben (pueden ser dibujos) los acontecimientos. Cabe destacar que una V puede no incluir este último elemento pues dependerá del problema. En la parte de en medio de la V se conforman las preguntas claves del problema.

La V de Gowin permite observar la interacción entre los conceptos en la construcción del conocimiento. Además, promueve utilizar tanto el pensar (la teoría) como el hacer (lo práctico), evitando así aplicar las fórmulas de forma algorítmica.

Escudero (1995) propone utilizar la V de Gowin simplificada para la construcción del conocimiento mediante la resolución de problemas al hacer que estos tengan más significado para los estudiantes mediante la reflexión de la composición del problema y su resolución por medio de la construcción de estrategias.

Figura 3.6 Diagrama de la V de Gowin simplificada (Escudero, 1995)

En la Figura 3.7 se muestra un problema de física resuelto mediante la V de Gowin. Las teorías utilizadas en este problema fueron la termodinámica y la geometría analítica plana. Los principios corresponden a cómo relaciona el estudiante los conceptos. La parte de registros involucra los datos que proporciona el problema, mientras que en la parte de acontecimientos corresponde a la gráfica que se obtiene a partir de los datos. En la afirmación de valor se escribe por qué es esencial resolver el problema y en la afirmación de conocimiento se escriben las respuestas a las preguntas claves. La justificación de las respuestas se escribe en la parte de transformaciones, es ahí donde el estudiante realiza el procedimiento para resolver el problema, utilizando los elementos de la parte teórica, los acontecimientos y los registros.

La V de Gowin es también utilizada como una herramienta para el análisis epistemológico de la resolución de problemas de física en Escudero y Moreira (1999). El motivo de utilizarla en esta investigación es para analizar la producción del conocimiento a través de la interrelación que existe entre los dos dominios de la V de Gowin (conceptual y metodológico) en la resolución de problemas.

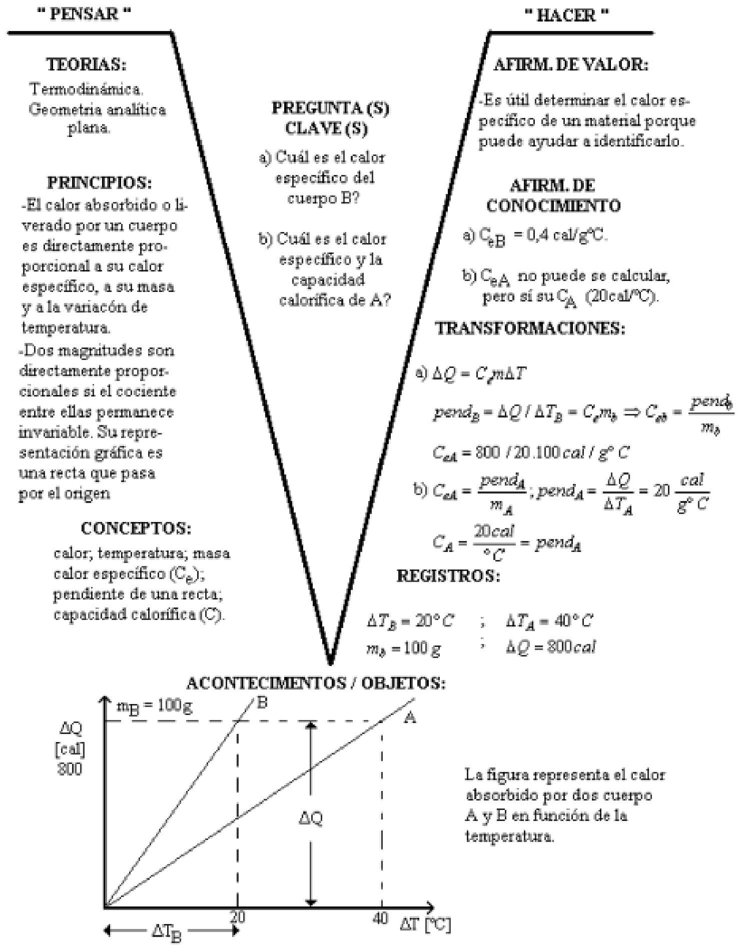


Figura 3.7 La V de Gowin en un problema de física (Escudero,1995)

Mapas conceptuales

El Mapa Conceptual es una red de conceptos ordenados jerárquicamente. Esta técnica fue desarrollada por Joseph Novak en 1972 mediante el sustento teórico de la teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel para la investigación de los estados cognitivos y psicológicos de los estudiantes. El objetivo principal es entablar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones de manera organizada, teniendo cierto orden, promoviendo el aprendizaje significativo y evitando el aprendizaje memorístico (Aguilar, 2006).

Como la mente humana organiza jerárquicamente la información se espera que esto se vea reflejado en el mapa conceptual, permitiendo conocer los conocimientos que los estudiantes tienen o los errores que existen en la forma de comprender un tema. Además, con los mapas conceptuales se logra esquematizar los principios básicos del aprendizaje significativo, los cuales son: organización jerárquica, diferenciación progresiva y la reconciliación integradora.

En la Figura 3.5 se muestra un mapa conceptual referente a la composición de este. En la parte superior se escribe el tema principal, posteriormente se desprenden conceptos acerca del tema, los cuales se conectan a través de palabras denominadas *conectores*.

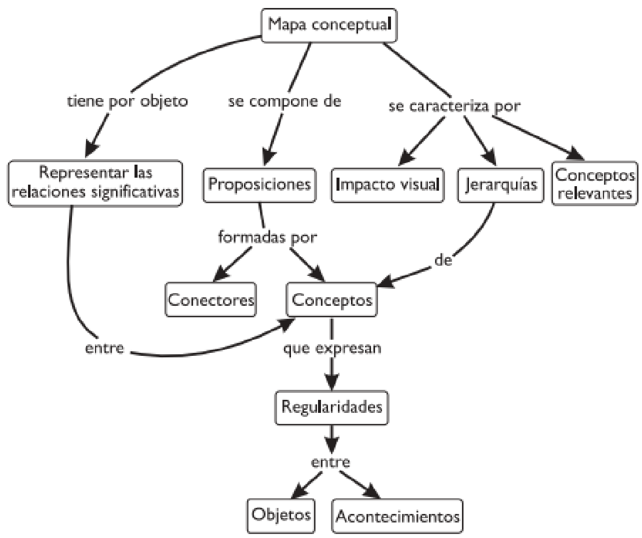


Figura 3.5 Mapa conceptual sobre el mapa conceptual (Aguilar, 2006)

3.1.7 Mapa conceptual híbrido

El MCH resulta de la combinación de la técnica del mapa conceptual, descrita anteriormente, y la técnica del diagrama de flujo. Este último describe qué operaciones y en qué orden se realizan para solucionar un problema dado. La Figura 3.8 es un ejemplo de un diagrama de flujo en química para la producción de benceno.

Con la combinación de estas dos técnicas, el MCH permite representar de manera esquemática una organización conceptual y un proceso de manera combinada, lo cual es útil para representar gráficamente la actividad matemática involucrada en la resolución de un problema.

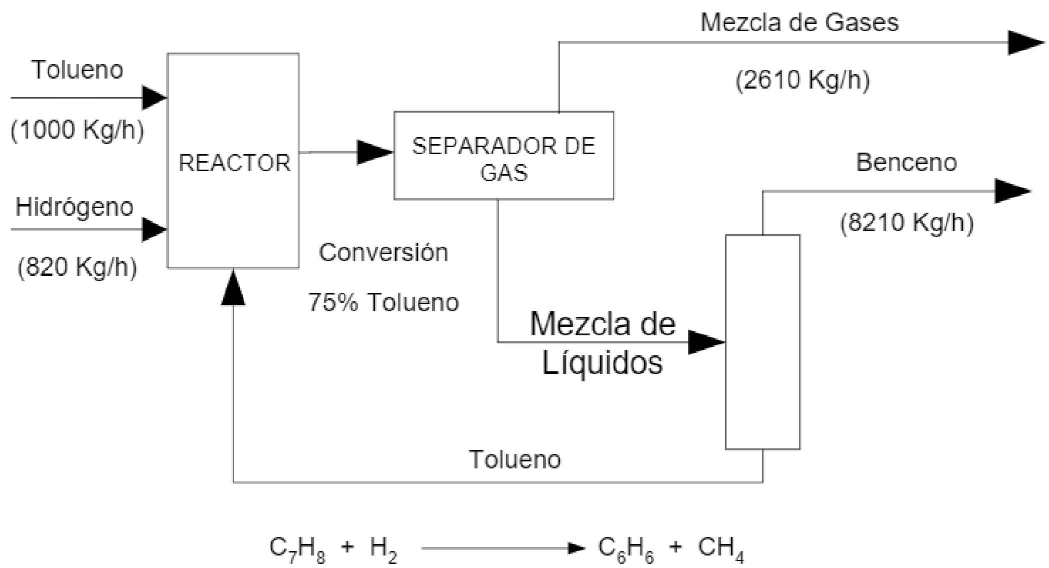


Figura 3.8 Diagrama de flujo de bloque para la producción de benceno (Pinto, 2019)

Actualmente, en la literatura el MCH no ha sido descrito a través de la Teoría del Aprendizaje Significativo de David Ausubel, pero sí se ha realizado desde la Teoría del Enfoque Ontosemiótico. Por ejemplo, en el artículo de Moreno, Zuñiga & Tovar (2018) se propone al MCH para la enseñanza de la cinemática, mientras que, en el artículo de Moreno, Angulo & Reducindo (2018) se plantea al MCH para la enseñanza de la física y matemática en el aula.

En la sección 3.2.7 se explica la interpretación del MCH desde el EOS. Por lo que desde ahora se hará referencia al MCH como MCH-EOS.

3.2 Enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática

El Enfoque ontosemiótico (EOS desde ahora) es un sistema inclusivo que busca articular diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza, con el fin de describir e investigar los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. En este escrito se presentan algunos de los componentes en los que está dividido el EOS.

3.2.1 Objeto matemático

Un objeto matemático es todo aquello que puede hacerse referencia para hacer, comunicar o aprender matemáticas (Blumer, 1982, citado por D'amore y Godino, 2007, p. 209).

Los objetos primarios y sus funciones matemáticas son:

1. *Lenguaje*. Se refiere a términos, expresiones, gráficos, entre otros, que se utilizan para describir objetos no lingüísticos.
2. *Situaciones*. Son problemas que inducen a la actividad matemática.
3. *Procedimiento.* Son las acciones que el sujeto realiza para resolver un problema matemático. Pueden ser operaciones, algoritmos, técnicas o procedimientos.
4. *Conceptos-reglas*. Son definiciones o descripciones.
5. *Propiedades*. Son los atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como proposiciones.
6. *Argumentaciones*. Sirven para validar las proposiciones y explicarlas.

3.2.2 Dimensiones de los objetos matemáticos

La dualidad *personal–institucional*

La realización de un ejercicio o una tarea por parte del estudiante es un objeto personal. Los libros de texto o las explicaciones del profesor durante la clase son objetos institucionales. Claro está, una misma expresión puede ser al mismo tiempo personal e institucional, dependiendo de las circunstancias contextuales.

La dualidad *elemental–sistémico*

Un objeto matemático puede ser considerado como una entidad unitaria, es decir, que se toma por visto previamente y que ya debe ser conocido, pero también puede ser descompuesto para ser analizado de manera sistémica (Godino, 2014).

La dualidad *ostensivo–no ostensivo*

Un objeto ostensivo es cuando es perceptible, es decir, cuando puede ser mostrado a otros. Lo no ostensivo es cuando no puede ser mostrado a otros. Entonces, un objeto ostensivo como una palabra escrita, un símbolo o una gráfica, también puede ser pensado por una persona o estar implícitamente en una expresión, y, por lo tanto, ser considerado no ostensivo.

La dualidad *ejemplar–tipo*

Un objeto ejemplar es un caso concreto mientras que un objeto tipo es un caso abstracto. Puede considerarse como lo particular y lo general.

La dualidad *expresión–contenido*

La relación que se establece entre los distintos objetos es mediante funciones semióticas. Se trata de una relación de correspondencia entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido), establecidas por un sujeto (personal o institucional) de acuerdo con un criterio de correspondencia.

3.2.3 Sistema de prácticas

Una práctica es lo que realiza un sujeto para la resolución de un problema matemático, lo cual incluye comunicar a otros la solución y validarla, y la generalización del problema a otros contextos. El objeto matemático surge de estas prácticas ligadas a la resolución de problemas matemáticos (Godino y Batanero, 1994).

Una *práctica personal significativa* es cuando el sujeto considera que la práctica le ayuda a desempeñar una función para lograr el objetivo en el proceso de la resolución de un problema y todo lo que esto conlleva (Godino y Batanero, 1994)

3.2.4 Función semiótica

La noción de función semiótica es adoptada de la teoría del lenguaje de Hjemsle, en la cual se denomina signo a la relación que existe entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Es decir, es la correspondencia entre una expresión y un contenido que establece un sujeto acorde a algún criterio de correspondencia. Pueden ser de tipo representacional, instrumental u operatoria, y componencial o cooperativa. Los objetos matemáticos se relacionan con el lenguaje y la actividad matemática por medio de estas funciones.

Godino (2003) describe los tipos de función semiótica que existen, los cuales son:

Significado lingüístico: se expresa al objeto final con un elemento lingüístico.

Significado situacional: el objeto final es una situación-problema.

Significado conceptual: cuando el contenido es un concepto o definición.

Significado proposicional: cuando el contenido es un atributo de un objeto. Es decir, es la relación entre conceptos.

Significado actuativo: su contenido es una operación o procedimiento.

Significado argumentativo: Cuando el contenido es una argumentación.

3.2.5 Procesos cognitivos

Dentro del EOS no se define generalmente qué es un proceso debido a que existen diferentes clases de procesos dentro de la actividad matemática. Por lo que en este apartado se incluyen los requeridos para la investigación.

Materialización-idealización: procesos asociados a la faceta ostensivo-no ostensivo debido a que para manipular objetos que son no ostensivos, se necesitan representaciones ostensivas

Particularización-generalización: procesos asociados a la faceta extensivo-intensivo debido a que un elemento extensivo es un objeto particularizado, mientras que un conjunto intensivo son todos los elementos.

Significación: es el significado que se asocia entre dos objetos matemáticos, por lo que tiene relación con la función semiótica.

3.2.6 Conceptualización en el EOS

En el EOS, la conceptualización se realiza por medio de los sistemas de prácticas y mediante la función semiótica.

De los sistemas de prácticas personales emerge el objeto personal. La emergencia del objeto es progresiva dado que es consecuencia de la experiencia y el aprendizaje, es decir, se desarrolla progresivamente a medida que el individuo resuelve problemas más generales. Esto es debido a que, al resolver nuevos problemas, las soluciones se extienden, se descubren nuevas propiedades, y los conceptos se generalizan (Godino y Batanero, 2004).

En los sistemas de prácticas sociales emerge un objeto institucional. Dado que las prácticas en las instituciones pueden variar, existe entonces una relatividad del objeto. La emergencia también es progresiva debido a que puede ser reconocido como tal objeto por cierta institución, pero sufrirá transformaciones progresivas según se va a ampliando el campo de problemas asociado (Godino, 2013).

La función semiótica permite analizar e interpretar cuál es el conocimiento y comprensión que tiene un individuo de un objeto. Cada función semiótica constituye un conocimiento, es decir, un significado. Dado que existe una gran diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer, resulta entonces una gran variedad de tipos de conocimientos (Godino, 2013).

3.2.7 Interpretación ontosemiótica del MCH

Hernández (2019) propone una unidad de análisis que permite realizar una interpretación de los MCH-EOS en física, específicamente sobre marco de referencia. Este constructo teórico ayuda a describir de una manera gráfica el sistema de prácticas que existen en la resolución de problemas. La unidad de análisis considera los procesos cognitivos del EOS tales como: interpretación, idealización, particularización, significación y materialización.

En la Figura 3.8 se muestra la unidad de análisis adaptada al tema de optimización. El proceso comienza en la letra C, con los objetos matemáticos que se presentan en un problema matemático que involucre a la optimización. Posteriormente, a través de la interpretación y la idealización de los objetos matemáticos que están involucrados dentro del problema y que se relacionan con el proceso de optimización, es cuando el estudiante particulariza con los objetos matemáticos que él tiene como conocimiento previo sobre el cálculo diferencial, por lo que significa los datos que relaciona. Finalmente, después de estos procesos el estudiante materializa de manera ostensiva el objeto que emerge, ya sea mediante una operación, un resultado, entre otros.

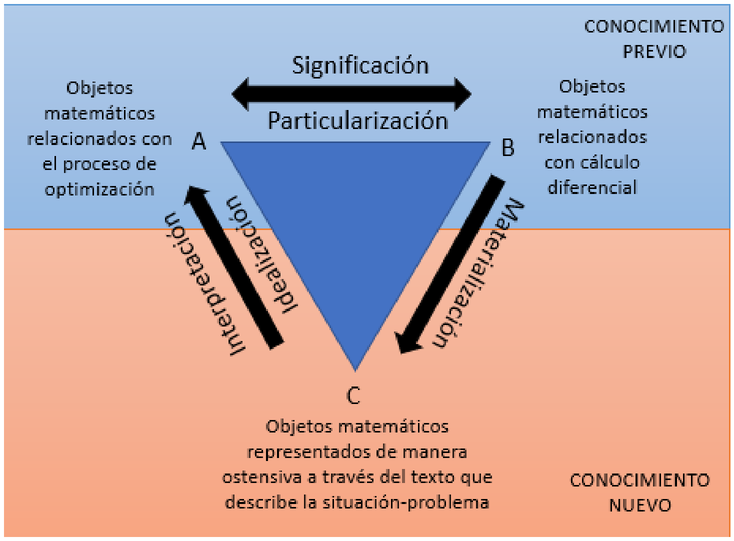


Figura 3.9 Unidad de análisis adaptada al tema de optimización (Hernández, 2019)

Debido a que se requiere conocer algunas de las concepciones de los alumnos acerca de la optimización en la resolución de un conjunto de problemas de cálculo diferencial, a partir de su esquematización mediante el MCH-EOS y la V de Gowin, se planteó un diseño de investigación que involucra un estudio de tipo cualitativo, el cual se describe en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA

Introducción

Con base en los objetivos específicos señalados anteriormente, se diseñó la siguiente metodología. Por lo que en este capítulo se describe la estrategia de indagación utilizada y las técnicas e instrumentos de recolección de datos. La técnica que se utilizó fue la entrevista, mientras que el instrumento utilizado fue un cuestionario con tres problemas que involucran optimización. Por último, se incluye el diseño y las fases de la investigación.

4.1 Investigación cualitativa

En esta investigación se utilizó la metodología cualitativa. Esta metodología proporciona datos descriptivos a los significados que los estudiantes le dan a los procesos y conductas. Además, permite saber cómo definen su realidad y cuáles son los constructos con los que están organizando su mundo (Quecedo y Castaño, 2002).

Quecedo y Castaño (2002) mencionan que mediante las descripciones que se obtienen al utilizar esta metodología permite explicar procesos, identificar principios genéricos y generalizar en cada caso, y así poder comparar distintos casos.

El procedimiento para recoger los datos es: observación participante, análisis de documentos y la entrevista en profundidad.

Para la observación participante se requiere que el investigador esté presente en el contexto de las personas que se van a investigar. Además, debe existir una interacción social con ellos. Por último, los datos se deben recoger de modo sistemático y no intrusivo.

En cuanto a los documentos para analizar, Quecedo y Castaño (2002) mencionan que estos pueden ser libros de texto, material de trabajo, diarios, entre otros. Por lo que en esta investigación se realizó un análisis de la producción oral y escrita de los estudiantes investigados ante la tarea de la resolución de un conjunto de problemas de Cálculo diferencial.

Finalmente, las entrevistas cualitativas tienen la ventaja de ser flexibles y dinámicas. No tienen una sola estructura, por lo que resultan ser entrevistas abiertas. Se mencionan tres tipos de entrevistas: historias de vida, dirigidas al aprendizaje sobre acontecimientos que no se pueden observar, y las orientadas a proporcionar un cuadro amplio de una gama de contextos, situaciones o personas. En esta investigación se utilizó la entrevista dirigida al aprendizaje sobre acontecimientos que no se pueden observar, esto debido a que los estudiantes describen su manera de resolver problemas matemáticos de optimización.

4.2 Estudio de caso

Esta estrategia permite estudiar grupos de individuos y, a través de la categorización de los resultados, obtener casos particulares que sobresalgan por su forma de resolver los problemas.

Martínez y Piedad (2006) mencionan que el estudio de caso permite dar respuesta a los fenómenos acerca de cómo y por qué ocurren. Además, permite explorar de forma más profunda sobre el fenómeno que investigamos y así obtener un conocimiento más amplio.

En esta investigación es de importancia entender y comprender qué es lo que están realizando los estudiantes entrevistados en la resolución de los problemas de optimización. Por último, dar énfasis en la interpretación del investigador permite realizar los esquemas del MCH-EOS y la V de Gowin.

4.3 Diseño de investigación

4.3.1 Sujetos de estudio

La población total de estudiantes elegidos para la investigación estuvo conformada por 45 estudiantes de quinto semestre del grupo D del Colegio de Bachilleres 03 ubicado en Cedral, San Luis Potosí.

De estos 45 estudiantes se seleccionó a una muestra de dos: un estudiante con soluciones correctas a los tres problemas y una estudiante con los tres problemas resueltos incorrectamente.

4.3.2 Material

El material utilizado consistió en:

- Cuestionario
- Lápiz
- Calculadora
- Smartpen

4.3.3 Duración

El cuestionario fue aplicado a los 45 estudiantes en la hora de clase. Fue aplicado el día 8 de diciembre de 2017. La duración fue de 50 minutos, en un horario de 8:00 am a 8:50 am.

Posteriormente, las entrevistas se realizaron los días 6 y 7 de febrero de 2018.

4.3.4 Recolección de datos

Elegir las técnicas y elaborar los instrumentos de investigación se considera un punto fundamental para la recolección de datos, debido a que de estos dependerán los resultados que se obtengan en una investigación.

El cuestionario es un conjunto de preguntas, las cuales pueden ser libres o cerradas. En la investigación de diseñó un cuestionario con tres problemas que involucran optimización, cada problema diferente uno de otro. Un problema fue de tipo algebraico, otro de tipo geométrico y el tercero situado en un contexto de economía. Se categorizaron las soluciones por parte de los estudiantes según los procedimientos o errores similares.

Además, se utilizó la entrevista como técnica para obtener información específica por medio de preguntas. El tipo de entrevista que se realizó fue *no estructurada*, la cual es flexible con sus procedimientos y preguntas, de tal manera que el estudiante responde con sus propias palabras. En la investigación se entrevistó individualmente a dos estudiantes los cuales fueron seleccionados después de realizar una categorización en base al procedimiento que realizaron en el cuestionario. La entrevista consistió en la resolución de los problemas previamente aplicados en el salón de clases. Se hicieron preguntas con respecto a sus procedimientos para que ellos explicaran paso a paso lo que realizaron para resolver los problemas y de esa manera saber qué significado le daban a lo que respondían.

4.4 Fases de la investigación

En la Figura 4.1 se muestra cómo se llevó a cabo la investigación. Primeramente, al seleccionar el problema de investigación se establecieron 7 fases.

Fase 1. Análisis de libros de texto

La primera fase (ver Figura 4.1, número 1) corresponde al análisis del tema de optimización en los libros de texto del nivel medio superior. El motivo del análisis fue para determinar el tipo de problemas que suelen presentarse y aplicar problemas no tan comunes. El tipo de problemas no típicos que se presentan en los libros de texto fueron algebraicos, geométricos y uno dentro del área de economía.

Fase 2. Diseño del cuestionario

Esta fase (ver Figura 4.1, número 2) consistió en el diseño del cuestionario con base a los problemas no tan comunes encontrados en la fase 1. Por lo cual se eligió un problema de cada tipo. Cada uno proporciona un razonamiento y procedimiento diferente, lo cual permitió dar paso a la fase 4.

Los problemas aplicados que involucran optimización fueron los siguientes:

1) *Expresa el número 60 como suma de tres números positivos de forma que el segundo sea el doble del primero. Si el producto de los tres es máximo, determina el valor de dicho producto.*

2) *Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos es 4 cm.*

3) *En condiciones de competencia perfecta, una empresa puede vender los artículos que produce a $500 por unidad. Si* $C(x) = 2x^2 + 40x + 1400$ *en pesos es el costo total de la producción diaria cuando se producen* x *artículos. Determine el número de unidades que deben producirse diariamente a fin de que la empresa obtenga la máxima ganancia total diaria.*

La solución a estos problemas se encuentra en el anexo 3.

Fase 3. Aplicación del instrumento

La tercera fase (ver Figura 4.1, número 3) consistió en la aplicación del cuestionario al grupo de quinto semestre del Colegio de Bachilleres del plantel 03. En total se aplicó a 45 estudiantes y fue resuelto sin la ayuda del libro de texto.

Fase 4. Categorización

En esta fase (ver Figura 4.1, número 4) se categorizó en grupos a los estudiantes con soluciones similares. El tipo de problemas elegidos y aplicados permitió obtener diversas soluciones, por lo cual, de esta manera se pudo categorizar acorde al procedimiento o los errores similares. En este caso se tomó en cuenta la interpretación del problema, errores procedimentales, aplicación de la primera y segunda derivada, y argumentación.

Fase 5. Entrevista a dos estudiantes

Esta fase (ver Figura 4.1, número 5) consistió en una entrevista individual a cada estudiante para recabar datos más descriptivos sobre lo que realizaron o tenían en mente al resolver los problemas. En la entrevista se pidió que justificaran cada paso que realizaron para tener una mejor idea sobre su razonamiento y sus concepciones.

Fase 6. Diseño de MCH-EOS y V de Gowin

En esta fase (ver Figura 4.1, número 6) se diseñó el MCH-EOS y la V de Gowin de cada estudiante y del procedimiento que realizaron del problema seleccionado. Esto con el fin de realizar un análisis minucioso sobre el procedimiento que realizaron y las conexiones conceptuales que hicieron.

Fase 7. Análisis de datos

Finalmente, en la fase 7 (ver Figura 4.1, número 7), con el MCH-EOS y la V de Gowin, se realizó el análisis con el apoyo de las teorías utilizadas en esta investigación, es decir, el MCH-EOS por medio del EOS, y la V de Gowin a través de la TAS.

El siguiente capítulo corresponde a la descripción de los resultados obtenidos en la fase 5, es decir, a la transcripción de las entrevistas realizadas a cada estudiante. Se muestra la producción oral y escrita de cada problema resuelto por los dos estudiantes. Es esencial dicha producción para dar paso al capítulo 6, el cual corresponde al análisis y discusión de los datos obtenidos.

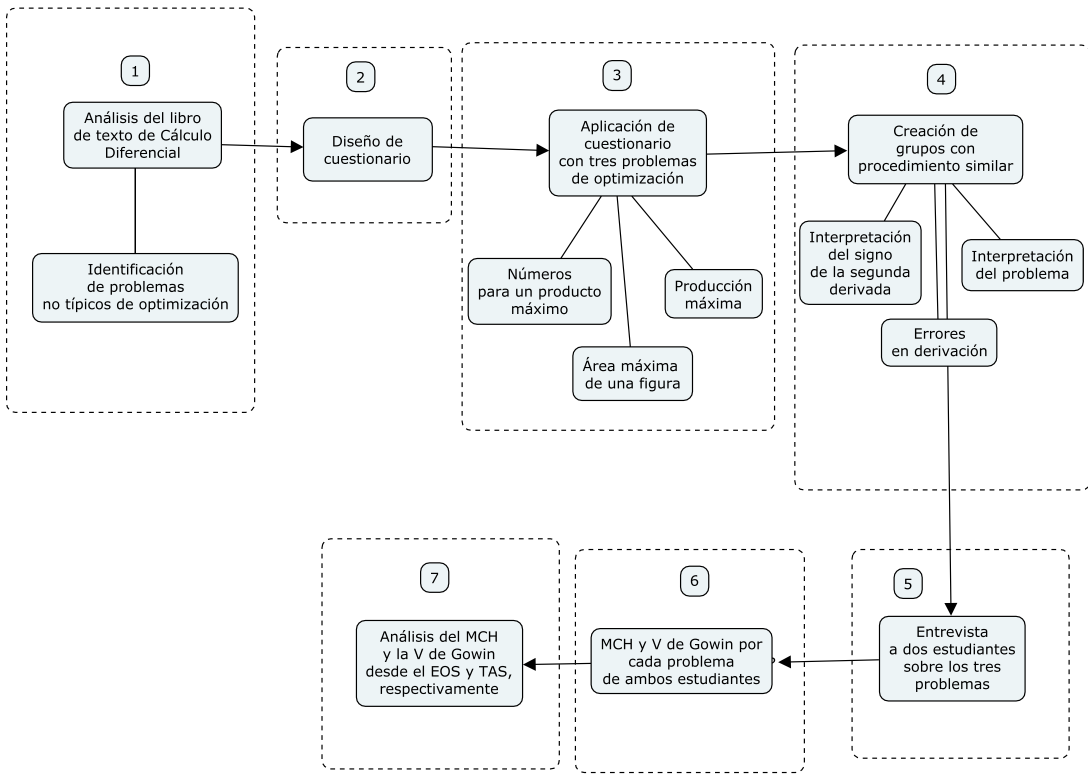


Figura 4.1 Fases de la investigación

CAPÍTULO 5
RESULTADOS

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

Introducción

En este apartado se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de tres problemas de optimización a dos estudiantes, nombrados A y B. El estudiante A es un alumno destacado que resolvió correctamente los problemas y la estudiante B resolvió incorrectamente los problemas. Los resultados muestran que el estudiante A realiza una actividad matemática adecuada en la que pone en juego todos los objetos matemáticos (conceptos, lenguaje, argumentos, proposiciones, procedimiento), mientras que la estudiante B solo resuelve los problemas de manera operativa.

En este capítulo se describe la producción oral y escrita de los estudiantes A y B al resolver los tres problemas planteado. La representación y análisis de la producción de los alumnos a través de las técnicas del MCH y la V de Gowin se deja para el siguiente capítulo.

5.1 Producción del estudiante A

5.1.1 Resolución del problema 1

La transcripción de la resolución del problema 1 por parte del estudiante A se muestra en la Figura 5.1. Desde el momento en que A leyó el enunciado, empezó a escribir los datos que proporciona el problema según las condiciones propuestas. Primeramente, escribió la suma de tres números positivos como $a + b + c$ (I), sin embargo, cuando leyó las condiciones que presenta el enunciado, escribió $2a$ en lugar de b (II). Posteriormente, juntó los términos semejantes para despejar el valor de c (III). Obtuvo el valor del producto expresado en términos de a (IV). Mencionó que esa función que obtuvo es la que debe maximizar (V). Por lo que realizó la primera derivada. Luego despejó el valor de a para saber si ese valor maximiza el producto (VI). Después dejó expresado el valor de a como $\frac{240}{18}$ (VII). Por último, sustituyó el valor de a en la función del producto que previamente estableció e indicó que ese es el producto máximo (VIII).

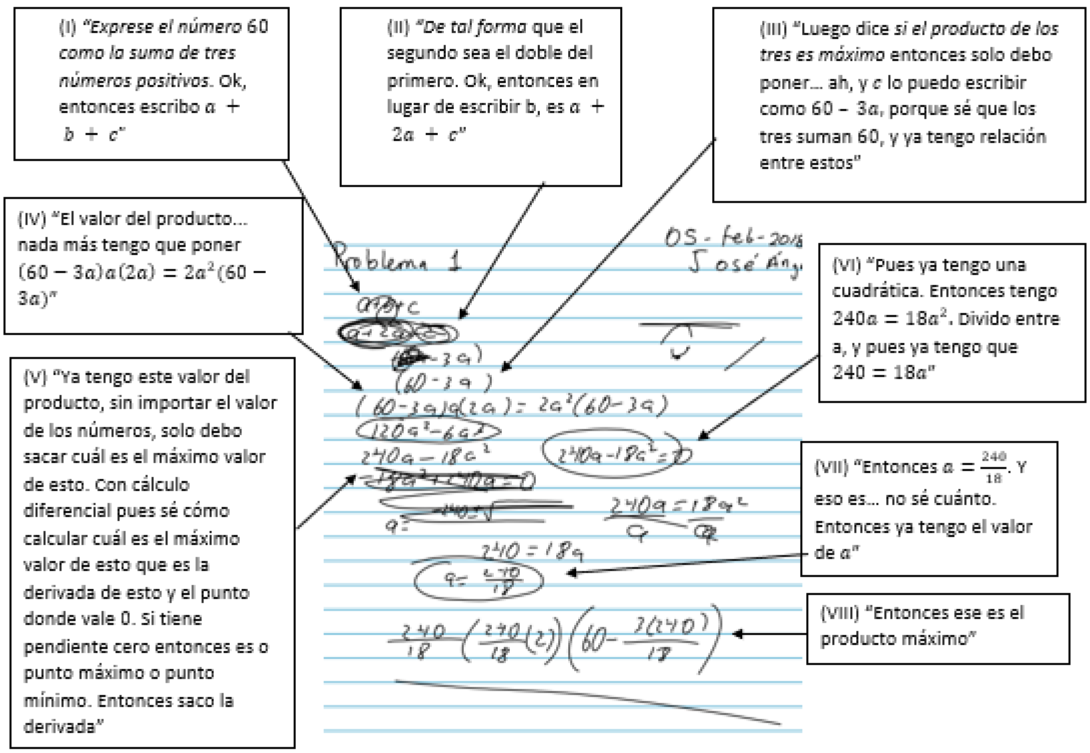


Figura 5.1 Producción oral (texto en recuadro) y escrita obtenida de la resolución del problema 1 por parte del estudiante A

5.1.2 Resolución del problema 2

En la Figura 5.2 se muestra la transcripción referente a la resolución del problema 2 por parte del estudiante A. Inicialmente, el estudiante mencionó que la primera idea que tuvo al leer el problema fue sobre la desigualdad de media aritmética y la media geométrica (I). Sin embargo, decidió resolverlo mediante cálculo diferencial porque el problema era referente a esta asignatura, por lo que comenzó dibujando un triángulo y denominó los lados como a y $4 - a$ (II). Posteriormente realizó el producto de los lados que resultó ser $4a - a^2$ y mencionó que debía obtener el valor máximo de este producto (III). Luego realizó la derivación del producto para obtener el valor en el que la derivada se hace cero, el cual es en $a = 2$, por lo que al sustituir el valor de a en $4 - a$ obtuvo que el otro lado del triángulo mide también 2 (IV). Finalmente sustituyó estos valores en la fórmula del área de un triángulo y concluyó que el área máxima es $\frac{2(2)}{2} = 2$ (V).

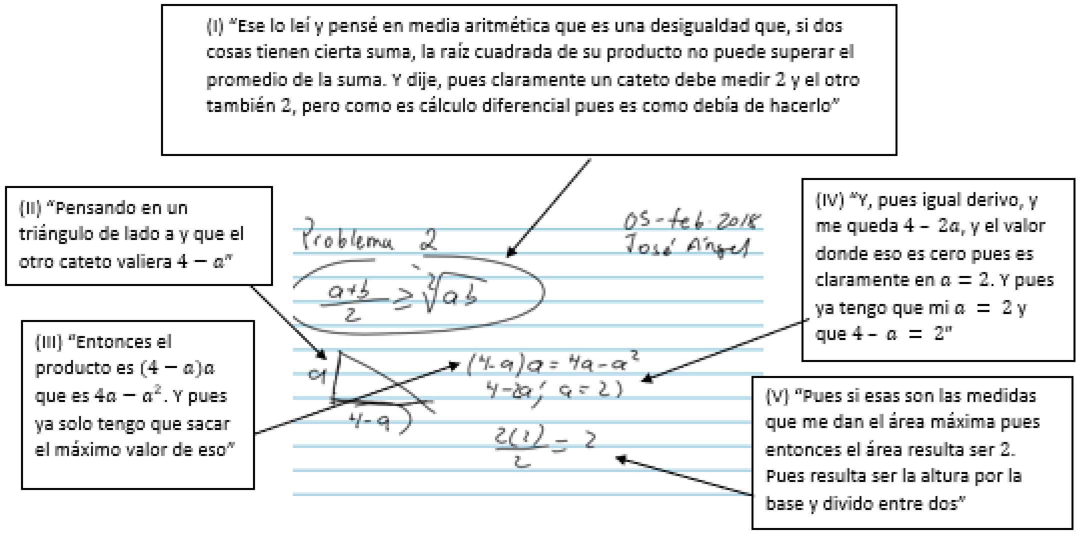


Figura 5.2 Producción oral (texto en recuadro) y escrita obtenida de la resolución del problema 2 por parte del estudiante A

5.1.3 Resolución del problema 3

La transcripción de la resolución del problema 3 por parte del estudiante A se muestra en la Figura 5.3. Primeramente, A utilizó el dato que proporciona el problema sobre que por unidad la empresa gana 500, él dedujo que la ganancia por x unidades es $500x$ (I). Utilizó la función del costo de producción (II) y dedujo que la ganancia máxima debe ser la cantidad que la empresa gana menos la que pierde (III). De tal manera que denominó a la verdadera función de ganancias como $p(x)$ (IV). Para obtener el valor máximo realizó la derivación de la función $p(x)$ (V) y despejó x para saber en cuál valor la derivada de la función es cero (VI), y finalmente concluyó que es en $x = 115$.

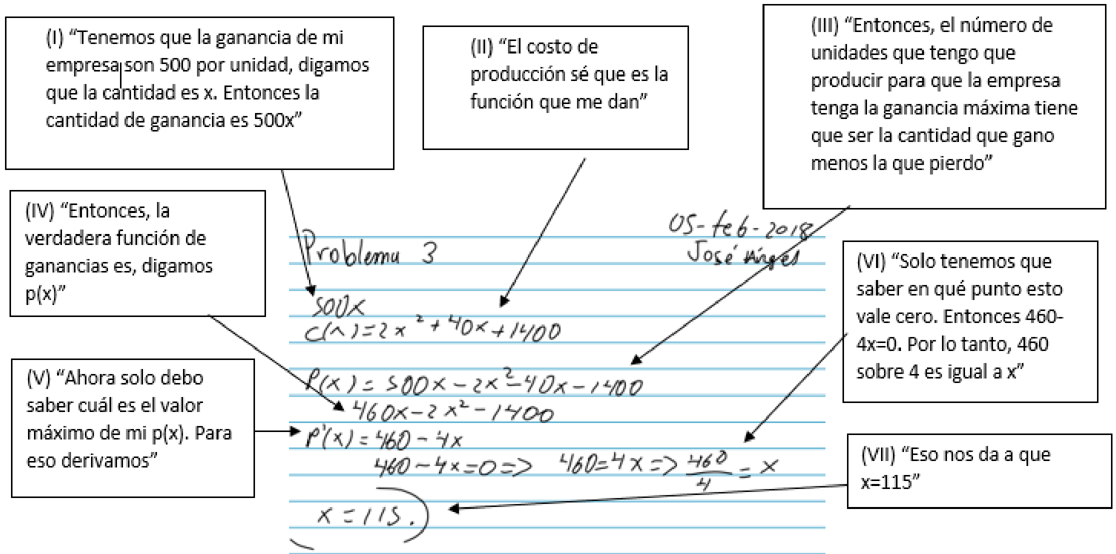


Figura 5.3 Producción oral (texto en recuadro) y escrita obtenida de la resolución del problema 3 por parte del estudiante A

5.2 Producción de la estudiante B

5.2.1 Resolución del problema 1

En la Figura 5.4 se muestra la producción de la estudiante B al resolver el problema 1. En este caso, la estudiante B acomodó los valores de los tres números con incógnitas diferentes e hizo caso omiso de la condición del problema sobre que b es el doble que a (I). Luego, realizó el despeje de b y dividió solamente el 60 sobre 2 de toda la expresión, debido a que llegó a la conclusión de que solo el 60 podía dividirse entre el 2, mientras que a y c no era divisibles entre 60 (II). Obtuvo que el valor de b es $30 - a - c$ (III). Para obtener el valor de a hizo otra función multiplicando la función que obtuvo en (II) por a (IV). Realizó la derivada de la función, sin embargo, ignoró el término ac y lo tomó como constante. Posteriormente despejó el valor de a y obtuvo que $a = -15$, por lo cual mencionó que significa que es máximo (V). Luego hizo una función para obtener el valor de c por lo que multiplicó el valor de b por c, sin embargo, cuando derivó la función volvió a ignorar el término ac (VI). Después despejó c y obtuvo que $c = -15$ (VI). Finalmente dedujo que el valor de b es 30, debido a que el problema menciona que b es el doble de a, y como obtuvo previamente que $a = -15$ entonces llegó a la conclusión de que $b = 30$ (VII).

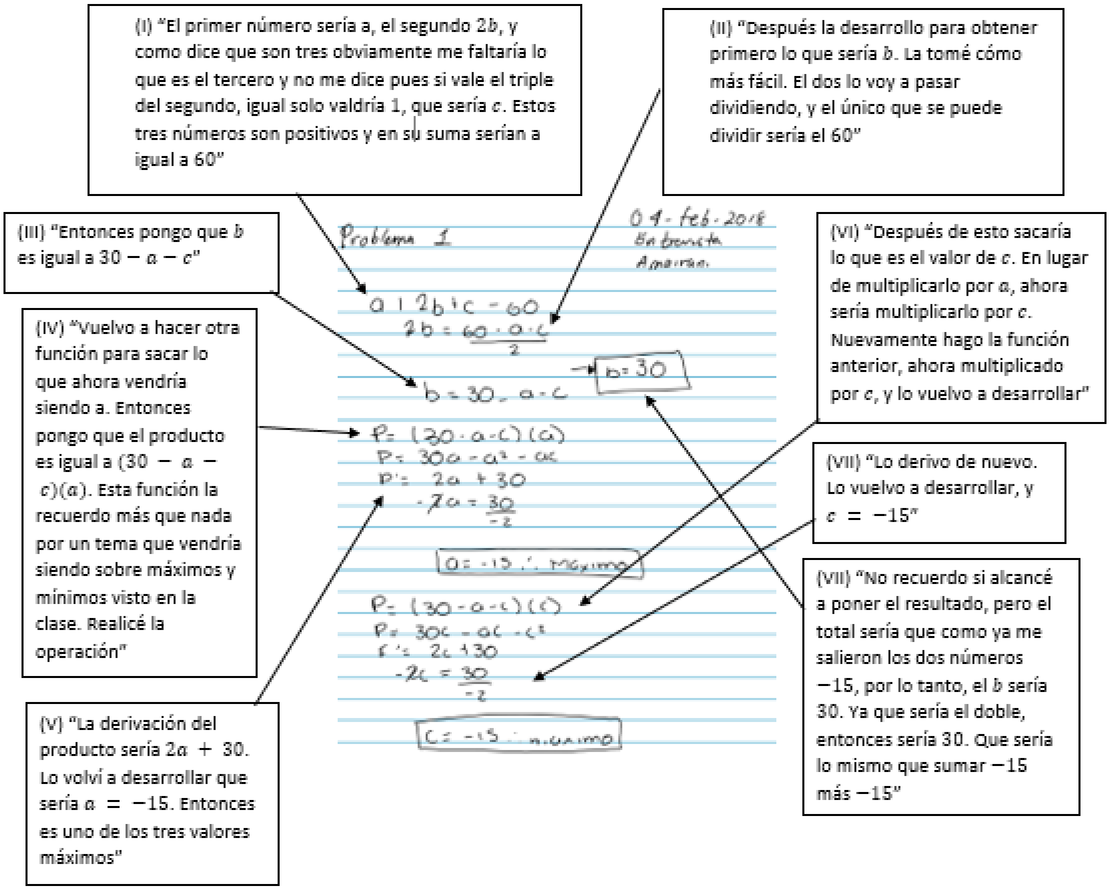


Figura 5.4 Producción oral (texto en recuadro) y escrita obtenida de la resolución del problema 1 por parte de la estudiante B

5.2.2 Resolución del problema 2

La Figura 5.5 corresponde a la resolución del problema 2 de la estudiante B. Ella hizo la representación gráfica del triángulo y con los datos que proporciona el problema dedujo que cada cateto vale 2 (I). Posteriormente mencionó que para obtener el área del triángulo tiene que multiplicar los catetos y dividir entre la hipotenusa (II). Como previamente dedujo que los catetos valen 2 cada uno, entonces llegó a la conclusión de que el área es $\frac{4}{hipotenusa}$ (II). Después hizo otra ecuación en la que la suma de las longitudes del triángulo es 4, por lo cual escribió que es $a + b + c = 4$ (III). Luego mencionó que $c = 4 - a - b$ (IV). Como anteriormente escribió que la fórmula del área es $\frac{4}{hipotenusa}$, entonces sustituyó el valor de c en la fórmula. Por lo que obtuvo que el área es $A = 4a + a^{-2} + b^{-3}$ (V). Sin embargo, concluyó que el área del triángulo es 4 (VI).

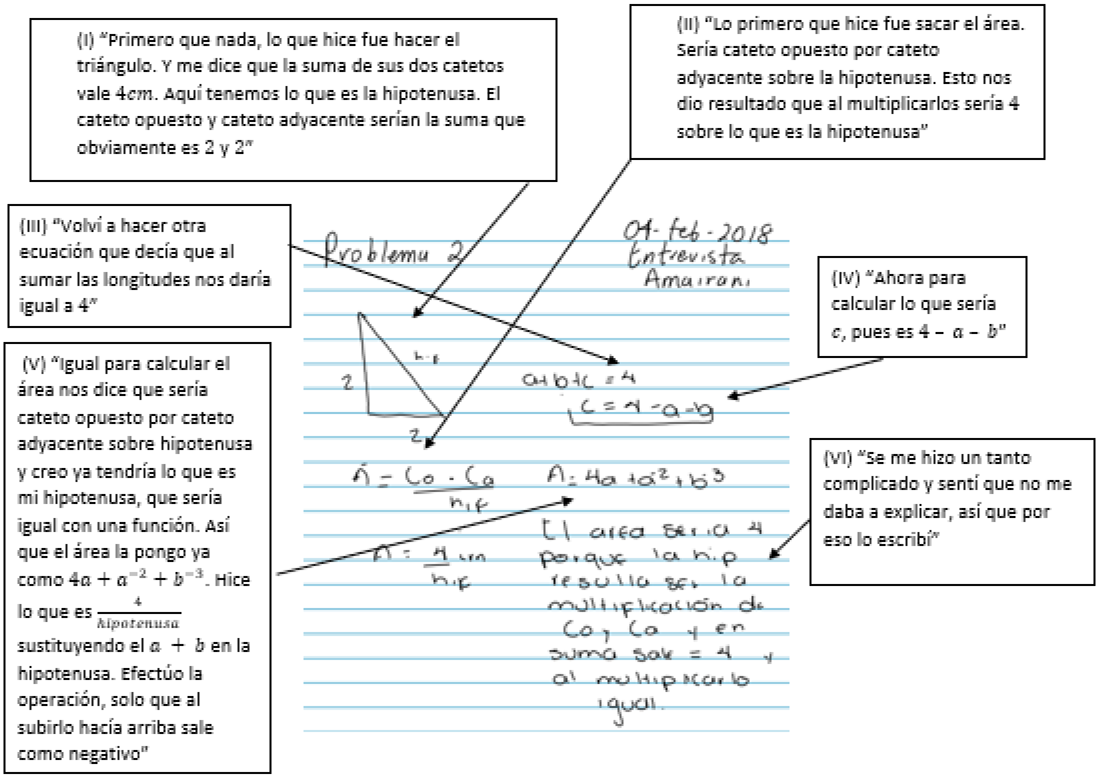


Figura 5.5 Producción oral (texto en recuadro) y escrita obtenida de la resolución del problema 2 por parte de la estudiante B

5.2.3 Resolución del problema 3

Finalmente, en la Figura 5.6 se muestra la producción del problema 3 de la estudiante B. Para la solución de este problema empezó utilizando la función que proporciona el enunciado (I) y la derivó (II). Posteriormente, en (III) despejó el valor de x de la derivada, obteniendo $x = -10$ (III). Cuando obtuvo el valor de x mencionó que dicho valor es la ganancia máxima en un día (IV). Luego, sustituyó el valor de x en la función original (V). Finalmente, concluyó que la ganancia máxima es 1200 (VI).

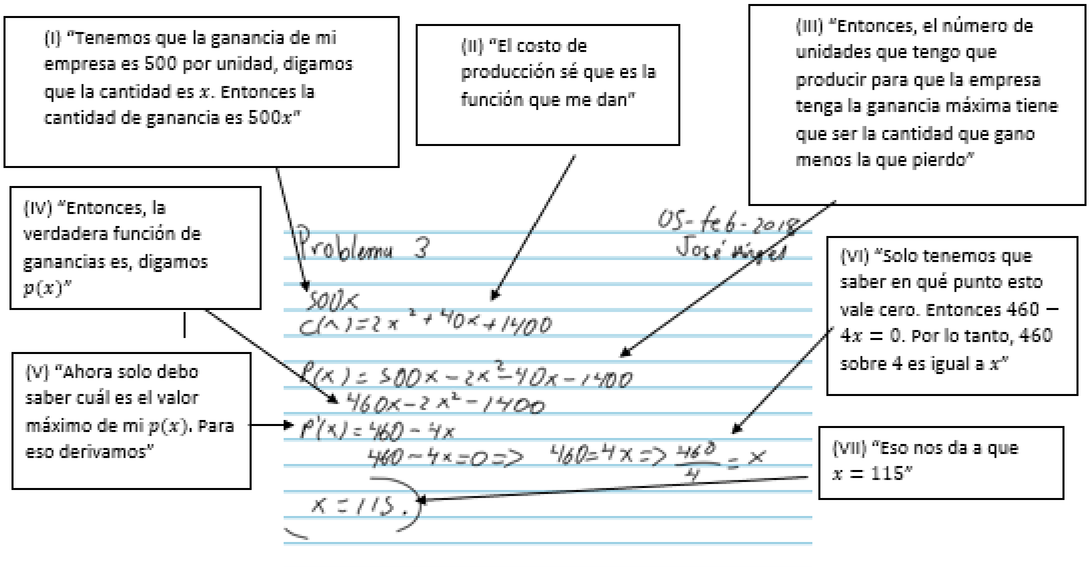


Figura 5.6 Producción oral (texto en recuadro) y escrita obtenida de la resolución del problema 3 por parte de la estudiante B

La elaboración de los MCH-EOS y de las V de Gowin se presentan en el siguiente capítulo, así como también se realiza el análisis y discusión desde el EOS y la TAS, respectivamente.

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

Introducción

En este capítulo se presenta el análisis y discusión de los resultados que se describieron en el capítulo anterior. El análisis se llevó a cabo a través del conjunto de elementos que es posible observar en las representaciones esquemáticas de la V de Gowin (teorías, principios, afirmaciones, transformaciones, registros y acontecimientos) y del MCH (lenguaje, conceptos, procedimiento, argumentos y propiedades).

Para cada producción de los estudiantes se elaboró la V de Gowin y el MCH correspondiente. El análisis de la actividad matemática se llevó a cabo mediante la interpretación de la V de Gowin a través de la teoría del aprendizaje significativo (Ausubel, 1983), y del MCH desde el EOS (Godino, 2002). El análisis desde ambas herramientas gráficas nunca se contrapone, más bien se complementan. La construcción de cada V de Gowin se llevó a cabo siguiendo el procedimiento que presentan Gil, Solano, Tobaja & Monfort (2013). Mientras que la construcción de las trayectorias entre los elementos de la V de Gowin, se construyeron siguiendo el procedimiento de Escudero y Moreira (1999). Por otro lado, el diseño de los MCH se realizó siguiendo la construcción que describe Moreno, Zuñiga & Tovar (2018) y Hernández (2019).

6.1 Análisis y discusión de la producción del estudiante A

En la Figura 6.1 se presenta la V de Gowin correspondiente a la producción del estudiante A al resolver el problema 1, ver la Figura 5.1 en la sección 5.1.1.

De acuerdo con la Figura 6.1, el estudiante muestra haber realizado un ASR a través de las siguientes acciones: números positivos representados como a, b, c; expresar al número sesenta como la suma de tres números positivos $a + b + c$; al expresar el segundo número como el doble del primero; al sumar términos semejantes $a + 2a$ que le permitió expresarlo como $3a$; expresar el producto de los tres números como $\frac{240}{18}\left(\frac{240}{18}\right)(2)\left(60 - 3\,\frac{240}{18}\right)$; entre otros.

Además, el estudiante muestra haber realizado un ASC al realizar lo siguiente: al derivar $120a^2 - 6a^3$ para calcular el máximo; despejar a de $240a - 18a^2 = 0$ en lugar de resolverlo mediante la fórmula general.

El ASP se observa cuando el estudiante expresa el producto de los tres números positivos como $\frac{240}{18}\left(\frac{240}{18}\right)(2)\left(60 - 3\frac{240}{18}\right)$.

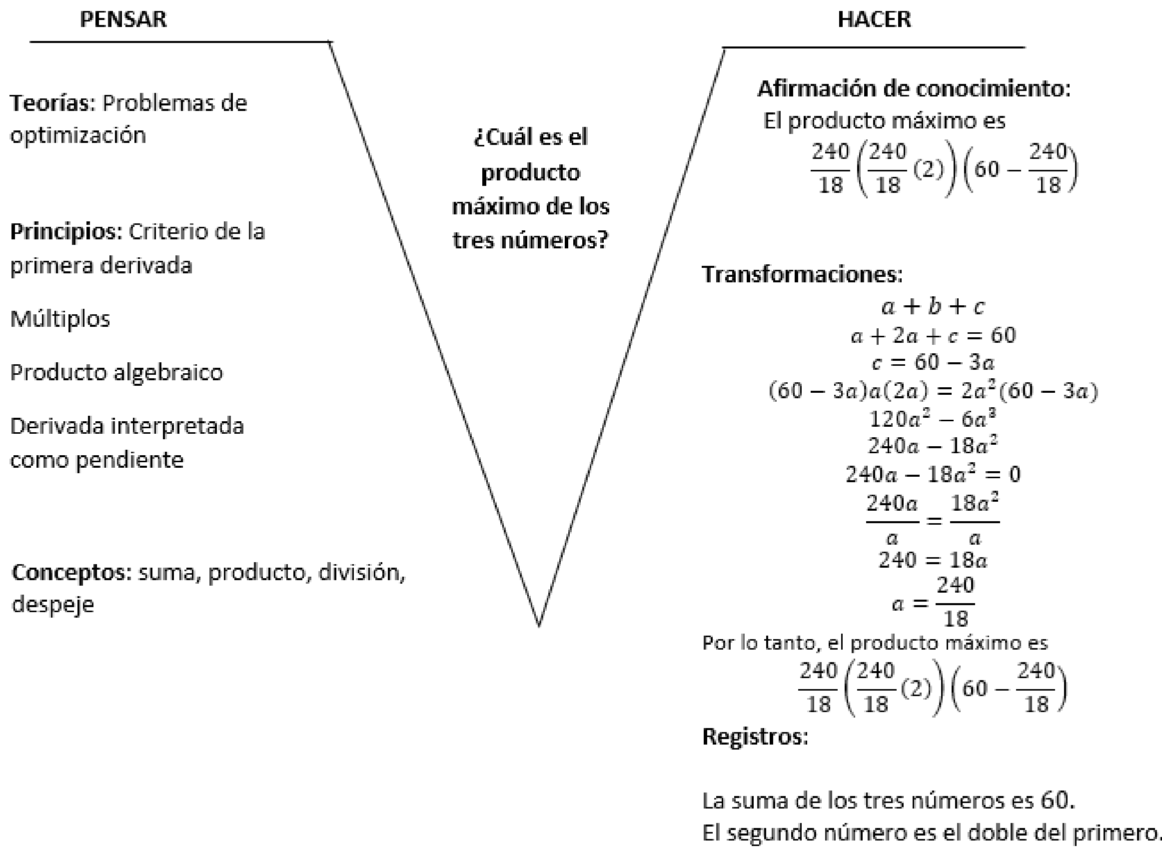


Figura 6.1 V de Gowin correspondiente a la producción del alumno A en la resolución del problema 1

Por otra parte, en la Figura 6.2 se describe la ruta que utilizó el estudiante para resolver el problema. Esta ruta puede ser enmarcada como una secuencia adecuada que refleja la comprensión del problema. Se puede notar la interrelación que el estudiante establece entre los elementos de la V de Gowin. En este caso, el estudiante utiliza los datos que proporciona el problema para utilizar las propiedades adecuadas y realizar las transformaciones necesarias para justificar la respuesta que obtiene. Por lo que es fácil ver que el estudiante ha activado sus conocimientos teóricos y procedimentales para resolver de forma exitosa el problema**.**

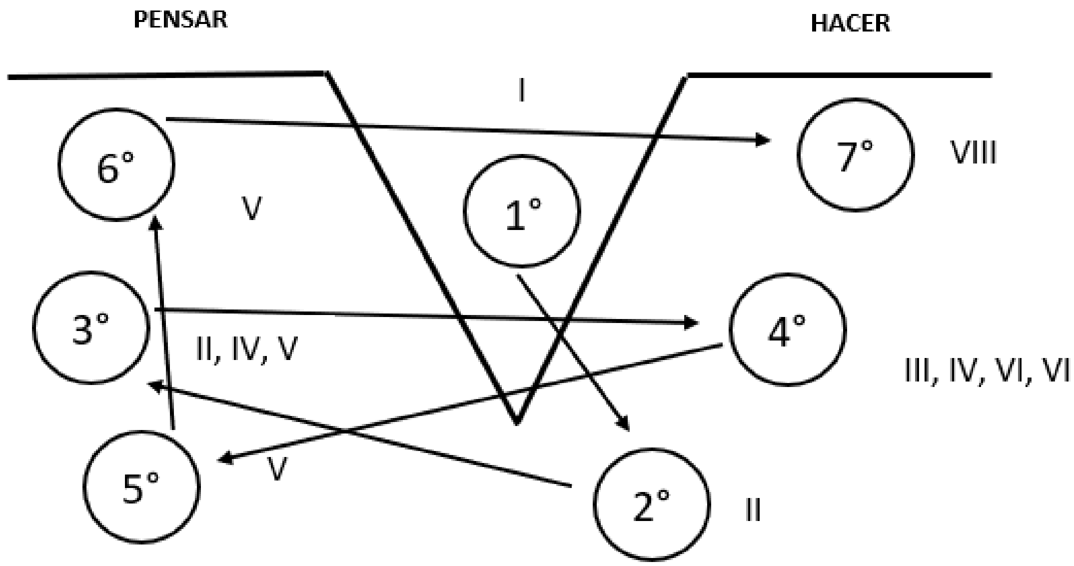


Figura 6.2 Ruta de resolución del problema 1 por parte del estudiante A

En la V de Gowin se muestra que el estudiante hizo uso de la optimización después de realizar la multiplicación de los tres números, derivar tal producto e igualar a cero, y finalmente despejar la variable a. Fue con ese valor con el que concluyó que se obtenía el producto máximo de los tres números.

La Figura 6.3 muestra el MCH-EOS correspondiente a la resolución del problema 1 del estudiante A. Partiendo de la idea de que en el EOS el significado del conocimiento se considera como conocimiento en uso, el significado que el estudiante asocia a la optimización tiene que ver con ¿cómo aplica la optimización?, ¿cuándo la aplica? y ¿dónde la aplica? En este sentido el uso que el estudiante le da a la optimización inicia desde las dos primeras prácticas, es decir, mediante estas dos prácticas el estudiante tiene la intención de construir una expresión algebraica que relacione P (producto) con alguna de las variables "a", "b" o "c" para posteriormente utilizar los criterios de optimización mediante la derivada. Mediante la primera práctica A se refleja la lectura y la interpretación del problema al identificar las variables a, b, c y P, y sus relaciones, por ejemplo, $b = 2a$ (ruta A5-A8-A9). Mediante la segunda práctica el estudiante se plantea la tarea de elaborar una expresión algebraica que relaciona P con solo una de las variables.

Una vez que el estudiante encontró la relación funcional entre P y una de las variables, en este caso a (ruta B21-B22-B23), en la tercera práctica el estudiante lleva a cabo un proceso algorítmico en el que deriva la expresión e iguala a cero y encuentra las soluciones, sin embargo, concluye que una solución no existe (ruta C35-C39). Además, el estudiante no realizó la segunda derivada debido a que probablemente no vio la necesidad de realizarla, dando por hecho que la solución que obtuvo era la óptima.

En la práctica A, se observa cómo la unidad de análisis está presente cuando el estudiante lee e interpreta el problema, así como también idealiza a los números con letras como a, b, c. Posteriormente, él en sus conocimientos previos sobre Cálculo diferencial reconoce que para derivar es necesario una función de una sola variable, por lo que el segundo término lo cambia en términos de a, según indica el problema. Es ahí cuando el estudiante está particularizando y significando. Finalmente materializa al escribir a la suma de los tres números como $a + 2a + c = 60$.

En la práctica B, el estudiante interpreta la parte del problema donde se señala el producto de los tres números. Por lo que el estudiante idealiza el producto como $a * b * c$, sin embargo, teniendo en mente que la función a derivar debe ser de una sola variable, el estudiante obtiene el valor de c en términos de a, por lo que significa este valor, lo cual conlleva a la materialización del producto de los tres números en términos de a.

En la práctica C, el estudiante interpreta la parte del problema donde menciona que necesita obtener el valor máximo del producto, por lo que lo idealiza con la derivada del producto que obtuvo anteriormente, donde menciona que es el punto en donde vale cero. Lo relaciona con sus conocimientos previos de cálculo diferencial sobre la derivación, así que él deriva el producto, despeja y obtiene el valor de a. Él significa este valor como el máximo por lo que lo materializa al escribir el producto de los tres números con dicho valor.

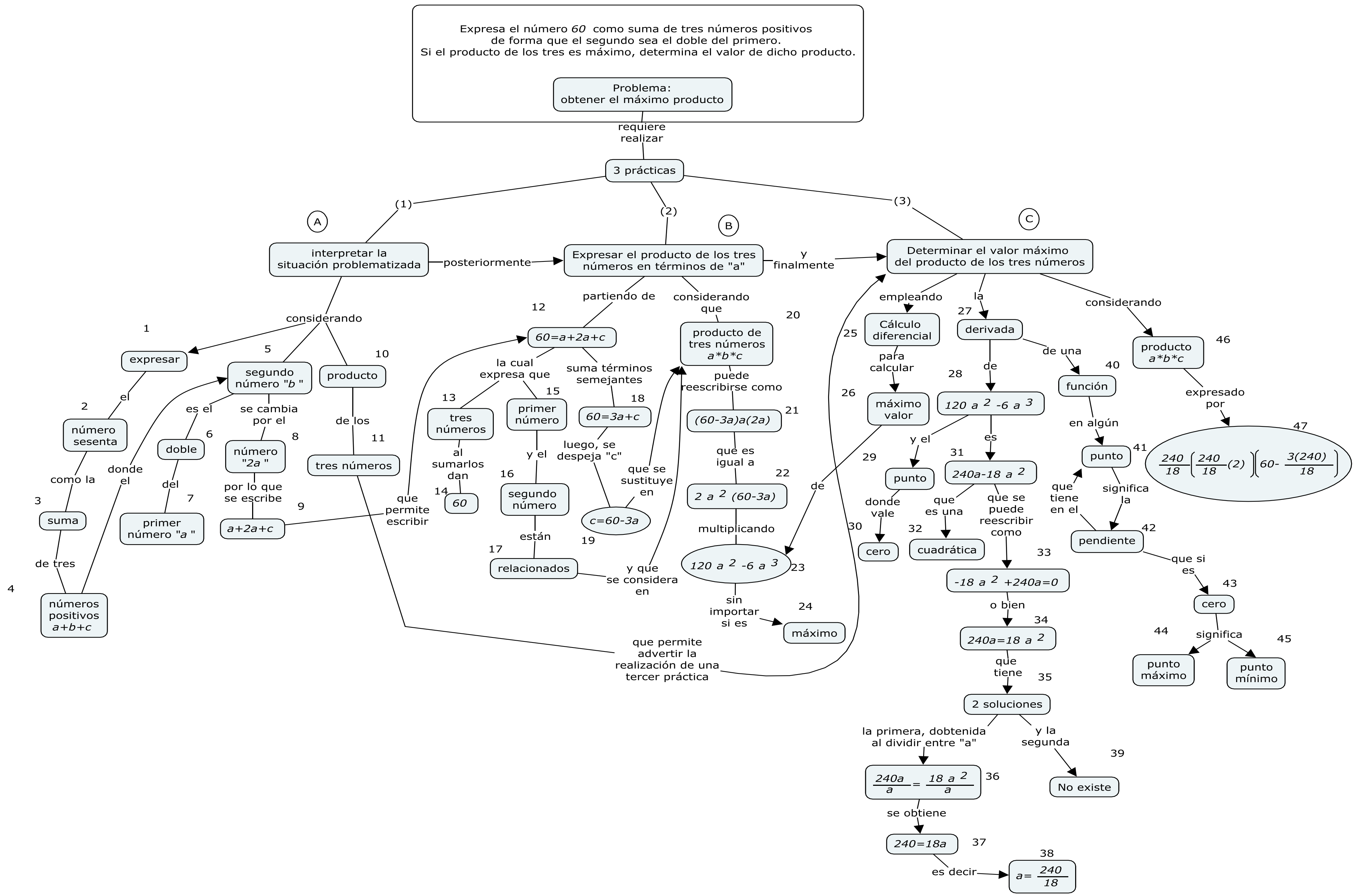


Figura 6.3 MCH-EOS de la resolución del problema 1 por parte del estudiante A

En la Figura 6.4 se muestra la V de Gowin correspondiente a la producción del estudiante A al resolver el problema 2, ver la Figura 5.2 en la sección 5.1.2.

El estudiante muestra haber logrado el ASR al representar gráficamente el triángulo rectángulo, y al expresar los lados del triángulo como a y $4-a$.

El ASC en el estudiante se puede observar en el estudiante con las siguientes acciones: al derivar el producto de $(4-a)a$, y al despejar a de la expresión $4-2a$.

Finalmente, el ASP aparece al sustituir los valores de los lados del triángulo en la fórmula del área para obtener la respuesta al problema.

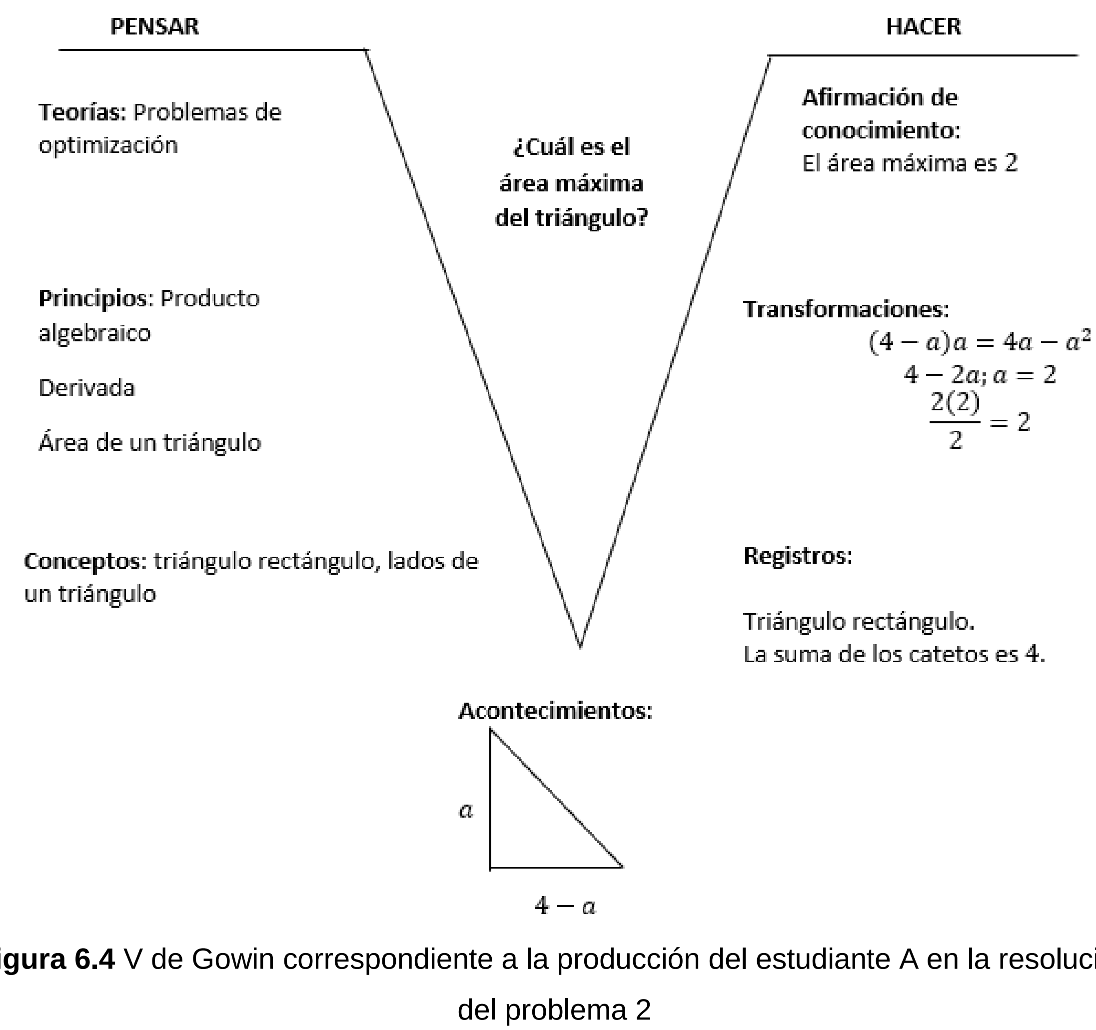


Figura 6.4 V de Gowin correspondiente a la producción del estudiante A en la resolución del problema 2

En la Figura 6.5 se presenta la ruta que el estudiante siguió para la resolución del problema 2. La secuencia que realizó puede considerarse adecuada debido a que realiza una correspondencia adecuada entre los elementos de la V de Gowin, tanto conceptuales como metodológicos. El estudiante utiliza primeramente los acontecimientos, la teoría, las propiedades y los conceptos para realizar las transformaciones adecuadas y obtener a una respuesta correcta, lo que determina que el estudiante ha logrado una buena comprensión del tema.

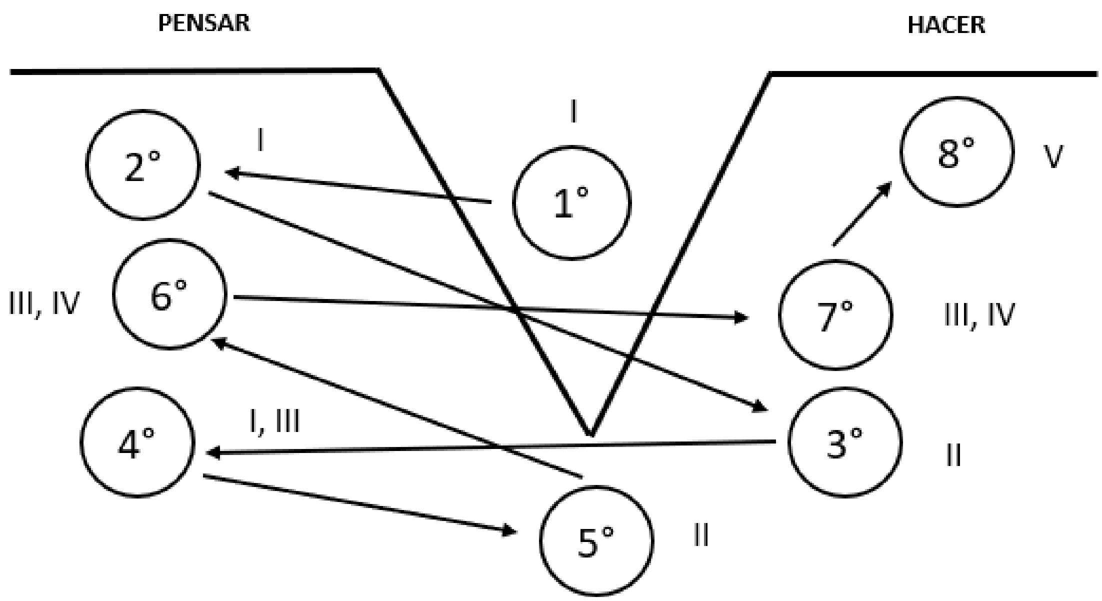


Figura 6.5 Ruta de resolución del problema 2 por parte del estudiante A

> En la V de Gowin correspondiente a este problema, la optimización se observa en el despeje del valor de a (lado del triángulo) de la derivada del producto de los lados del triángulo. El valor que el estudiante obtuvo lo consideró como el óptimo que proporciona el área máxima.

En la Figura 6.6 se muestra el MCH-EOS correspondiente a la resolución del problema 2 del estudiante A. En este problema, nuevamente el uso de la optimización inicia desde las prácticas A y B. Debido a que el motivo de estas primeras dos prácticas es también construir una función derivable para aplicarle los criterios de la derivada y resolver el problema. Por ejemplo, la ruta A12-A13-A14-A15 tiene como finalidad obtener los datos que necesita para crear la función. Dicha función la construye en la ruta B16-B17-B18, en donde el estudiante realiza el producto de los catetos del triángulo rectángulo para obtener el máximo valor de este.

Para determinar el área máxima del triángulo, el estudiante deriva el producto de los catetos, obteniendo que es $4 - 2a$. Posteriormente iguala a cero la derivada para obtener el valor en donde se hace cero, el cual resulta ser en $a = 2$, ver ruta C23-C24-C25-C26. A partir de este dato, el estudiante sustituye el valor de a en los lados del triángulo, teniendo como resultado que ambos lados miden 2, ver ruta C28-C29. De tal manera que concluye que el área máxima del triángulo es igual a 2, pues menciona que resulta ser de $\frac{(2)(2)}{2} = 2$, ver ruta C31-C32.

En la práctica A, la unidad de análisis se ve presente cuando el estudiante interpreta e idealiza el triángulo con los datos que proporciona el problema. Lo relaciona con el conocimiento previo sobre que para derivar se necesita la función con los mismos términos. Debido a esto, el estudiante particulariza y significa el valor de los catetos, terminando en materializarlos como a y $4 - a$.

En la práctica B, el estudiante interpreta que es necesario realizar el producto de los catetos para obtener el máximo valor, por lo que particulariza el producto y lo materializa escribiéndolo como$4a - a^2$.

En la práctica C, la idealización ocurre cuando el estudiante idealiza el área máxima como la derivación del producto, por lo que particulariza y deriva, despeja el término a y significa como el valor de un lado nada más por lo que necesita saber cuál es el valor del otro lado. Finalmente, materializa el valor de los dos lados y realiza el producto, obteniendo así el área máxima.

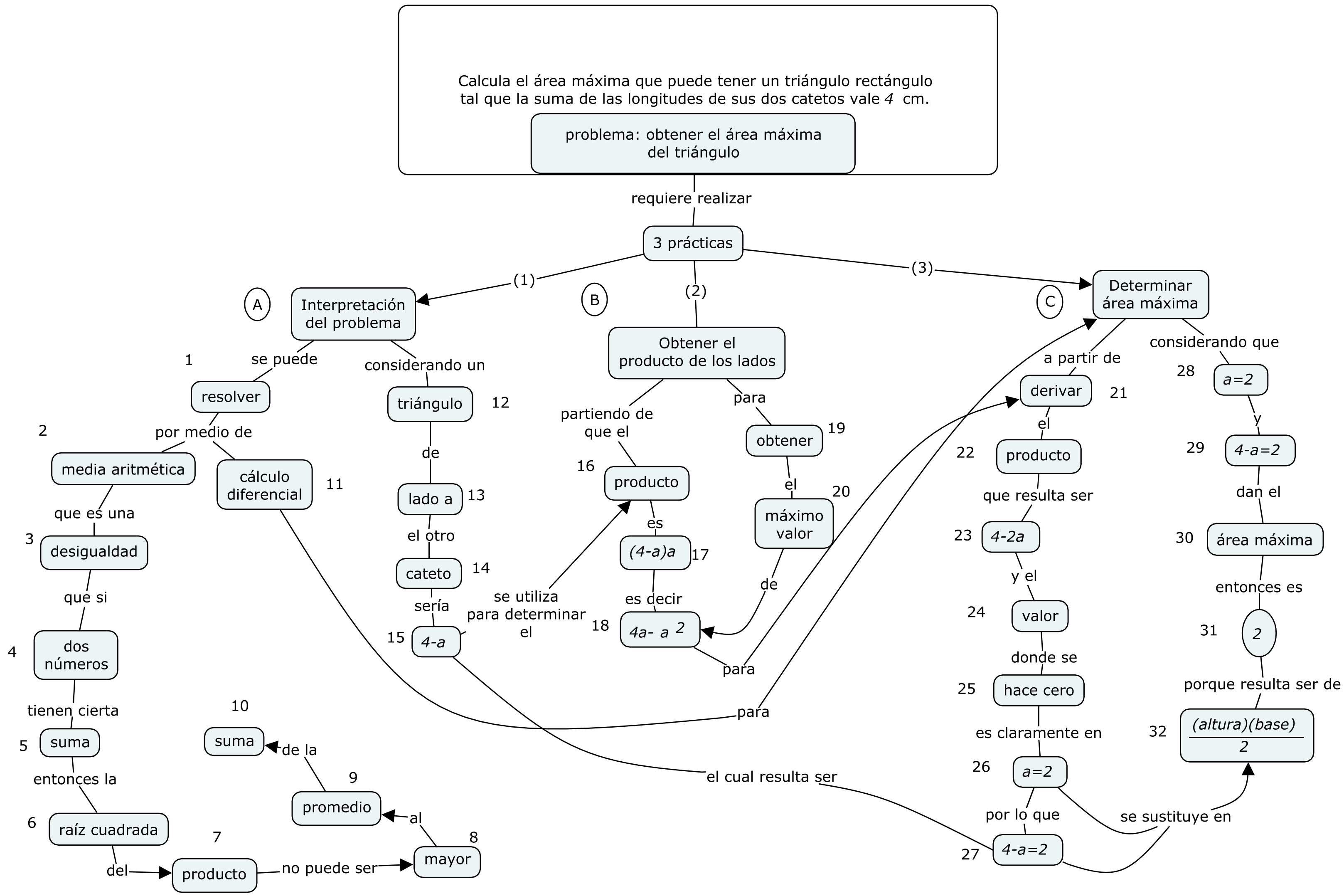


Figura 6.6 MCH-EOS de la solución del problema 2 por parte del estudiante A

En la Figura 6.7 se presenta la V de Gowin correspondiente a la producción del estudiante A al resolver el problema 3, ver la Figura 5.3 en la sección 5.1.3.

El ASR en el estudiante se observa al realizar las siguientes acciones: expresar la cantidad de productos vendidos como x; expresar la ganancia como $500x$; sumar términos semejantes en la expresión $500x - 2x^2 - 40x - 1400$ que le permitió expresarla como $460x - 2x^2 - 1400$; expresar la cantidad de productos que producen la ganancia máxima como $x = 115$.

El estudiante muestra haber realizado un ASC al crear una función de ganancia máxima al restarle el costo de producción a la ganancia que se obtiene en x productos; derivar la función $460x - 2x^2 - 1400$; realizar el despeje de x de la expresión $460 - 4x = 0$.

Además, el ASP se observa en el estudiante al expresar la cantidad de productos que debe vender la empresa para obtener la ganancia máxima como $x = 115$.

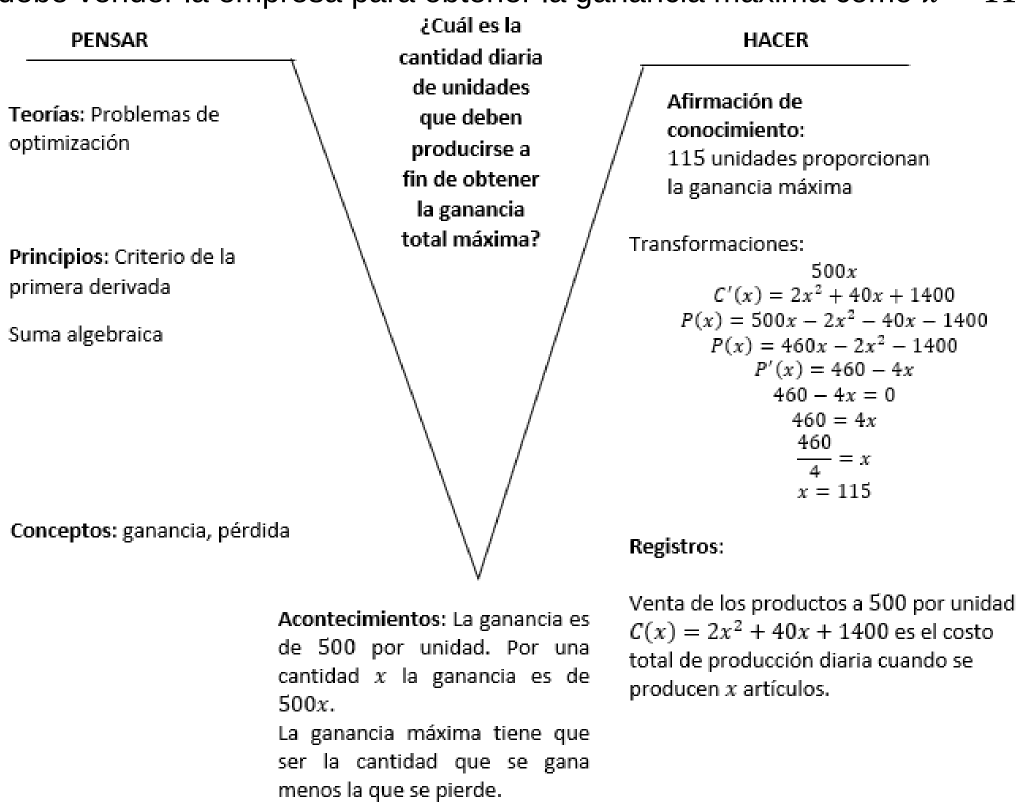


Figura 6.7 V de Gowin correspondiente a la producción del estudiante A en la resolución del problema 3

En la Figura 6.8 se presenta la V de Gowin correspondiente a la ruta que realizó el estudiante para resolver el problema 3. En la secuencia que llevó a cabo se puede observar un dominio conceptual alto al generar inmediatamente ideas para obtener una función derivable y así resolver el problema. Por lo que la interacción entre las componentes teóricas y metodológicas denotan una comprensión alta del tema, la cual es necesaria para la producción del conocimiento.

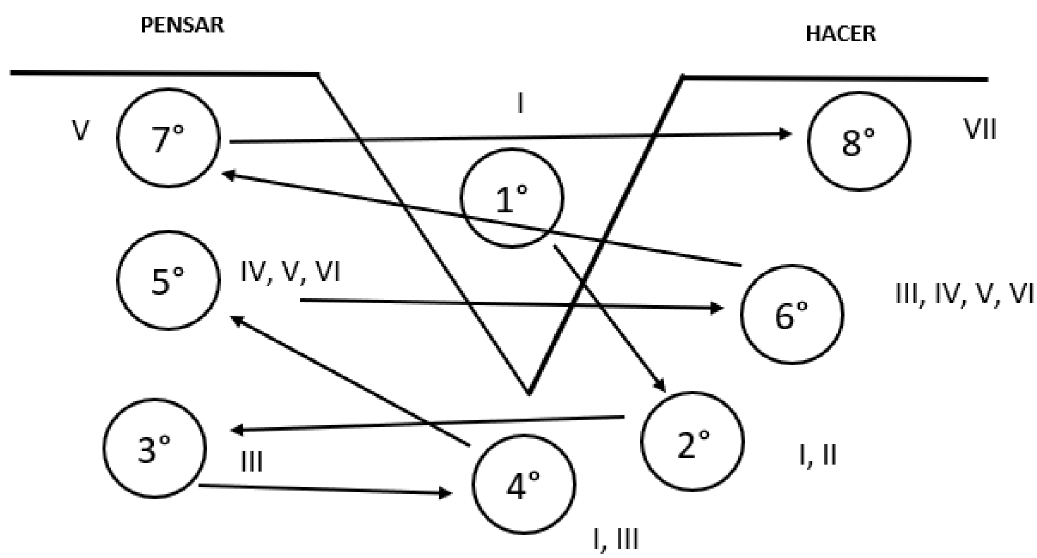


Figura 6.8 Ruta de solución del problema 3 por parte del estudiante A

La V de Gowin en este problema refleja que el estudiante hace uso de la optimización al derivar y despejar la función $P(x)$, que se refiere a la ganancia en x productos. El valor de x que obtiene lo consideró como el que proporciona la ganancia máxima.

En la Figura 6.9 se muestra el MCH-EOS correspondiente a la solución del problema 3. El uso de la optimización se ve también claramente en las primeras dos prácticas. En este problema, a pesar de que uno de los datos es una función, el estudiante menciona que la verdadera función de ganancia máxima debe ser la ganancia de x productos menos la función del costo de producción, ver ruta B20-B21-B22-B23.

Por lo que la finalidad de la segunda práctica es crear esta función para derivarla y aplicar los criterios de la derivada. La cual construye en la ruta B24-B25.

Una vez teniendo la función de la ganancia máxima, el estudiante realiza algorítmicamente el siguiente procedimiento para saber la cantidad de productos que debe vender la empresa en un día. Deriva la función (ruta C28-C29-C30) para igualarla a cero y así obtener el valor en donde se hace cero, el cual resulta ser en $x = 115$.

En la práctica A, la unidad de análisis se ve presente cuando el estudiante empieza interpretando el problema considerando los datos que el problema menciona. Idealiza que tanto la ganancia por x productos como el costo de producción son funciones. Posteriormente, particulariza para este caso cómo son las funciones, y materializa escribiéndolas cada una.

En la práctica B, el estudiante interpreta que es necesario tener una función que determine la cantidad de productos para obtener la ganancia máxima. Por lo que materializa la función como la resta de la ganancia por x productos menos el costo de producción, a la cual denomina como $p(x)$.

En la práctica C, el estudiante interpreta que para obtener la cantidad de productos que den la ganancia máxima es necesario saber el valor máximo de $p(x)$. Posteriormente utilizando sus conocimientos previos sobre derivación, deriva la función, despeja y significa el valor que obtiene. Por último, materializa este valor como el que proporciona la ganancia máxima.

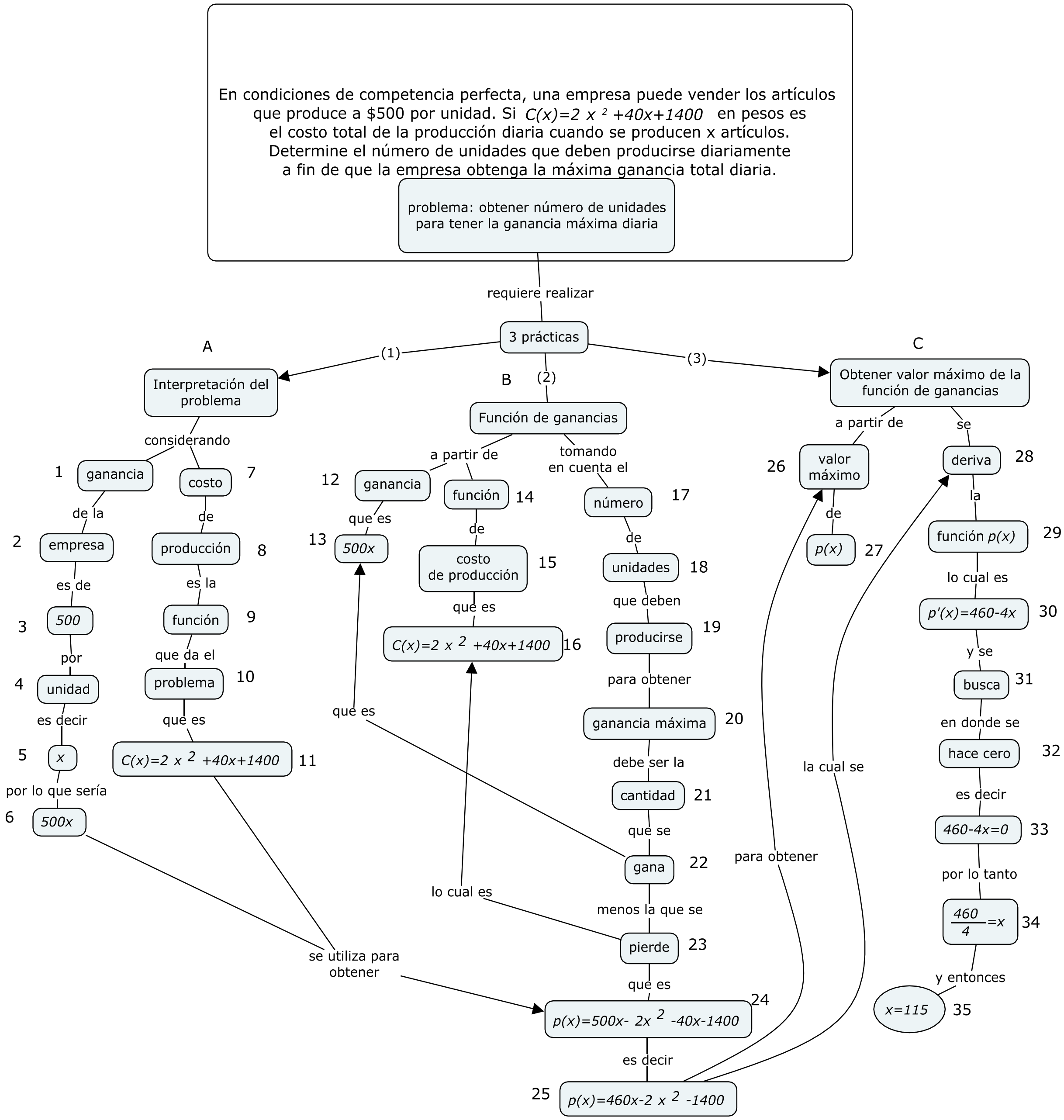


Figura 6.9 MCH-EOS de la solución del problema 3 por parte del estudiante A

6.2 Análisis y discusión de la producción de la estudiante B

En la Figura 6.10 se presenta la V de Gowin correspondiente a la producción de la estudiante B al resolver el problema 1, ver la Figura 5.4 en la sección 5.2.1.

La estudiante muestra haber realizado un ASR al representar la suma de los tres números positivos como $a + 2b + c$.

El ASC se ve presente en la multiplicación $(30 - a - c)(a)$ y $(30 - a - c)(c)$ al aplicar la propiedad distributiva, y al realizar la división de $\frac{30}{-2} = -15$ y utilizar la ley de los signos en la división.

No se ve presente un ASP debido a que el procedimiento que realizó no justifica el valor que obtuvo de b.

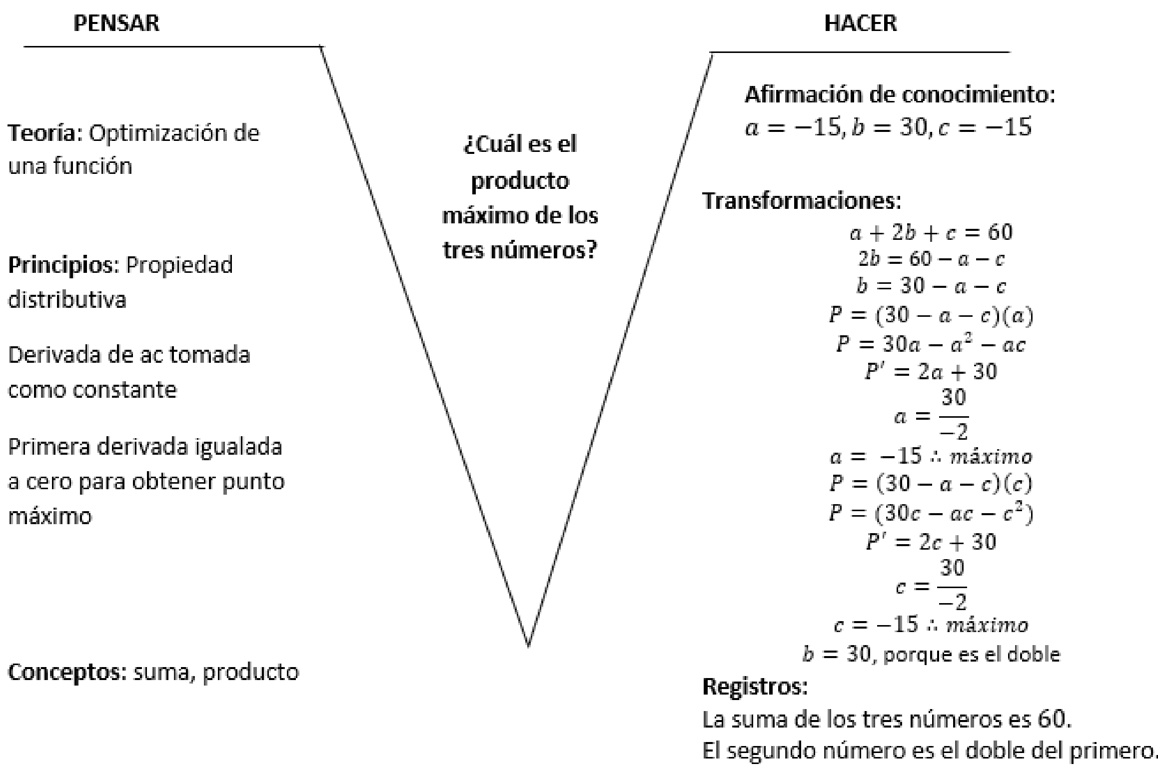


Figura 6.10 V de Gowin correspondiente a la producción de la estudiante B en la resolución del problema 1

En la Figura 6.11 se muestra la ruta de caminos que realizó la estudiante B en la solución del problema 1. La secuencia a simple vista podría parecer correcta, sin embargo, como se observó en la Figura 6.11, la estudiante no realizó procedimientos adecuados y tampoco obtuvo la respuesta correcta. En este análisis se concluye que realizó pasos algorítmicos, es decir, derivar una función e igualarla a cero para despejar la variable y obtener el valor en donde la derivada se hace cero.

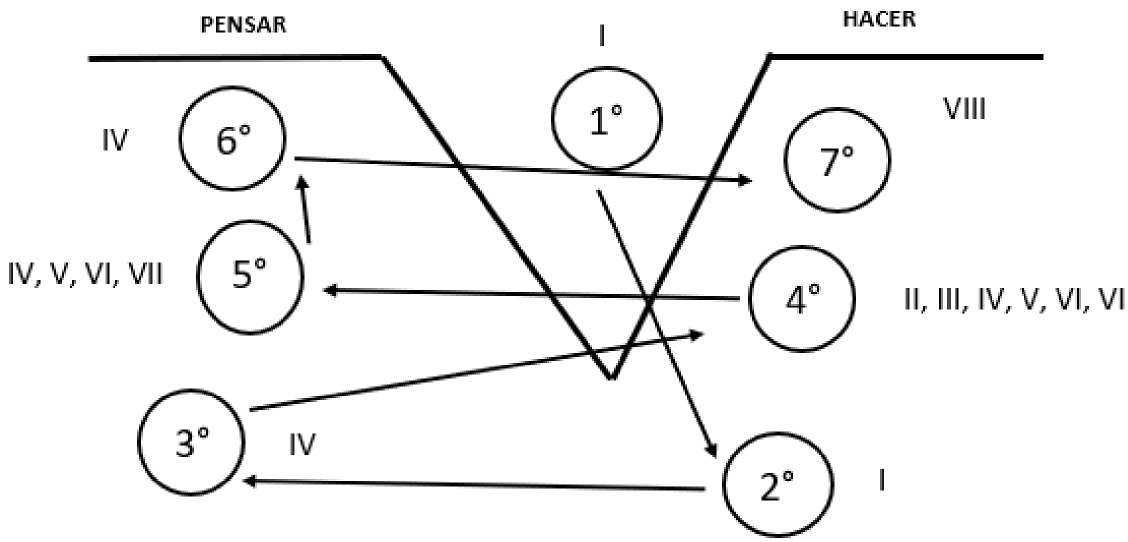


Figura 6.11 Ruta de resolución del problema 1 por parte de la estudiante B

En este problema, la estudiante emplea la optimización para obtener el valor de cada número. Sin embargo, solo realiza el producto de dos números, y al derivar, considera en dos ocasiones al término ac como constante por lo que lo hace cero.

La Figura 6.12 muestra el MCH-EOS correspondiente al problema 1 de .la estudiante B. En comparación con el estudiante A, las prácticas de la estudiante B no tuvieron como finalidad construir una función derivable para maximizar. En la primera práctica A, la estudiante interpreta el problema y obtiene los datos para expresar la suma de los tres números positivos como $a + 2b + c = 60$ (ruta A6-A7-A8). De esta expresión despeja la variable b. Al realizar el despeje menciona que el término $a - c$ no puede ser dividido entre 2, por lo que solo realiza la división de $\frac{60}{2}$, de manera que concluye que $b = 30 - a - c$, ver ruta A10-A11-A12-A13-A14. Las siguientes prácticas B, C y D tienen como finalidad obtener los valores de a, b, c. Para obtener el valor de a, la estudiante multiplica el valor de b por a, es decir, $(30 - a - c)(a)$, ver ruta B15-B16. Posteriormente deriva el producto y despeja la variable a, el cual es $a = -15$, ver ruta B17-B16. En la práctica C hace lo mismo pero multiplicando $(30 - a - c)(c)$, el cual deriva, despeja c, y obtiene que $c = -15$. En la última práctica utiliza los valores de a y c para obtener el valor de b. Además, argumenta que debido a que b es el doble, entonces b tiene que ser 30. Incluso menciona que es lo mismo que sumar $(-15) + (-15)$.

En este caso, desde la práctica A la estudiante no tomó en cuenta la información que proporciona el problema, esto se observa en el concepto A3, debido a que menciona que el segundo número es $2b$, sin embargo, el problema expresa que b es el doble de a. Además, el procedimiento que realiza tampoco es el correcto. Por ejemplo, en la ruta A16-A17 donde realiza la derivada del producto, la estudiante maneja el término ac como constante por lo que al derivarlo lo hace cero. Esto ocurre también en la ruta C27-C28. También, al obtener los valores de $a = -15$ y $b = -15$, no considera la indicación que menciona el problema sobre que los tres números son positivos. Por último, cuando obtiene el valor de b, la estudiante menciona que es el doble de -15, sin embargo, hace caso omiso del signo negativo y concluye que $b = 30$. Además, la suma de -15 más -15 no es 30, como ella mencionó que lo era. Por lo tanto, las respuestas que dio no son correctas, así como tampoco respondió lo que el problema pedía, el cual era el producto máximo de los tres números.

En la práctica A, la unidad de análisis está cuando la estudiante interpreta el problema. En ese caso, ella expresa los números como $a, 2b, c$. Sin embargo, es una interpretación incorrecta que la lleva a no realizar los siguientes procesos de forma correcta.

En la práctica B, la estudiante idealiza a como otra función, para la cual es necesario realizar el producto de los números. Para este caso, ella realiza solo el producto de dos números. Por lo que el valor que obtiene de la derivación y despeje, lo significa como máximo. Cabe destacar que, al no tener los conocimientos previos necesarios, realiza de manera incorrecta la derivación por lo que no particulariza de forma exitosa. Finalmente, materializa el valor de a escribiéndolo como uno de los tres valores máximos.

En la práctica C, nuevamente realiza lo mismo para obtener el valor c. Realizando otra vez solo el producto de dos números. Sigue el mismo procedimiento que en la práctica B.

En la práctica D, la estudiante interpreta que el segundo número es el doble del primero, por lo que lo particulariza como la suma de -15 mas-15. Sin embargo, significa el valor de manera incorrecta pues lo materializa como 15.

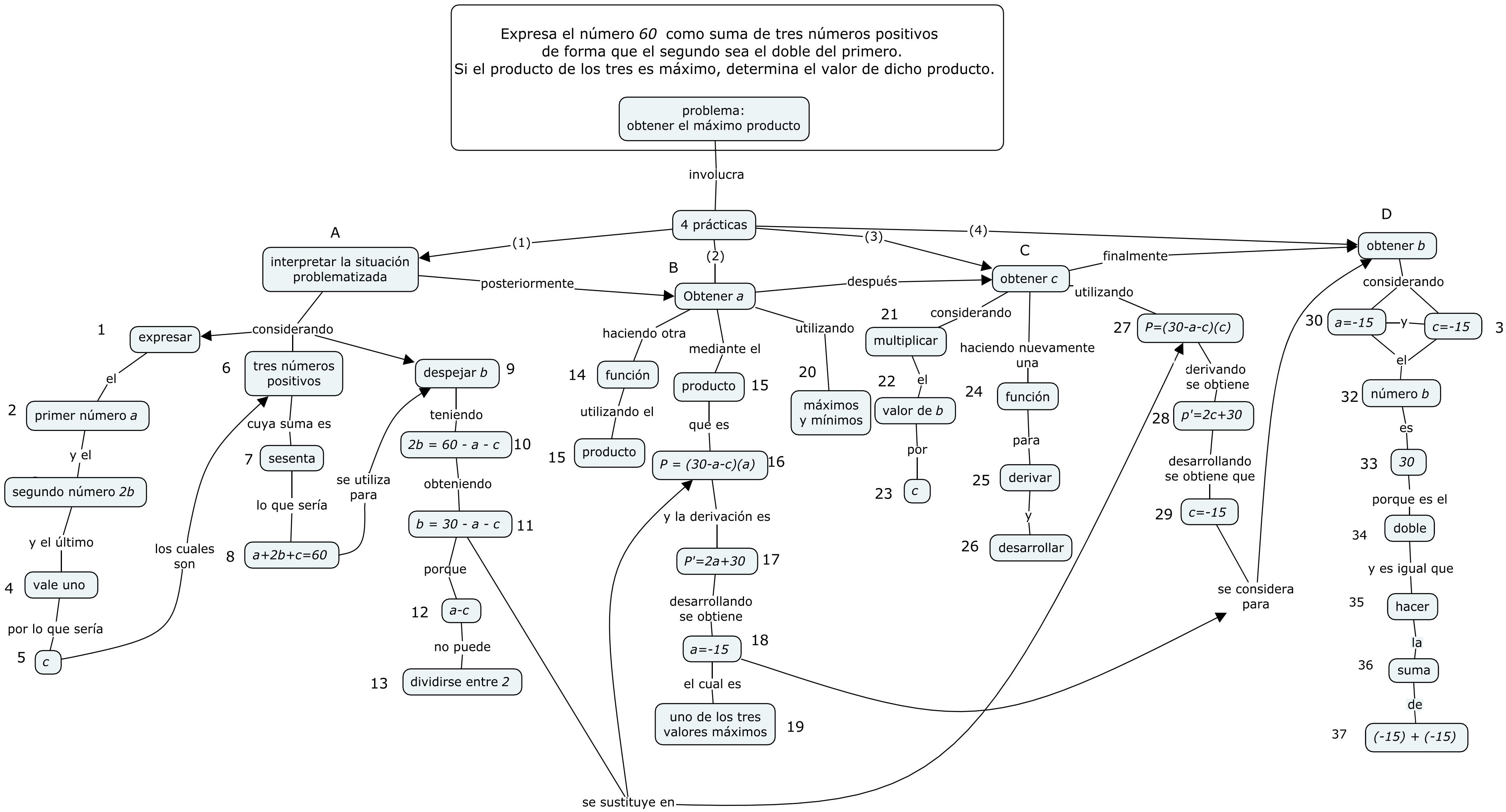


Figura 6.12 MCH-EOS correspondiente al problema 1 por parte de la estudiante B

En la Figura 6.13 se presenta la V de Gowin correspondiente a la producción de la estudiante B al resolver el problema 2, ver la Figura 5.5 en la sección 5.2.2.

La estudiante muestra haber realizado un ASR al representar la suma de los catetos como $CO + CA = 2 + 2$.

No se observa un ASC dentro de la solución de la estudiante. Por ejemplo, está empleando incorrectamente la fórmula del área de un triángulo.

Por último, tampoco se presenta un ASP debido a que no argumentó en su procedimiento por qué el área del triángulo es igual a 4.

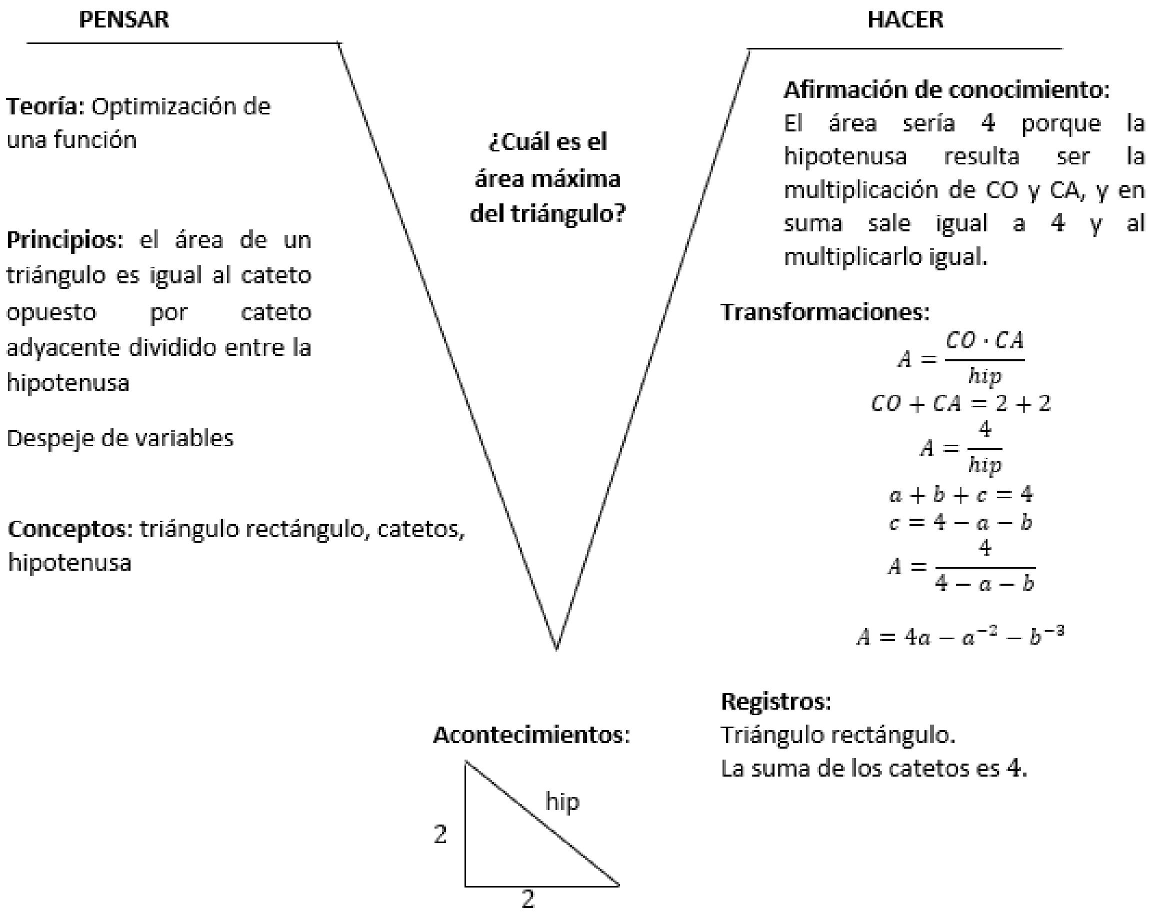


Figura 6.13 V de Gowin correspondiente a la producción de la estudiante B en la resolución del problema 2

La Figura 6.14 muestra la ruta que llevó a cabo en la resolución del problema 2. En este caso la estudiante no utilizó la parte de la teoría debido a que en ningún momento construyó una función a optimizar ni aplicó los pasos correspondientes para hacerlo.

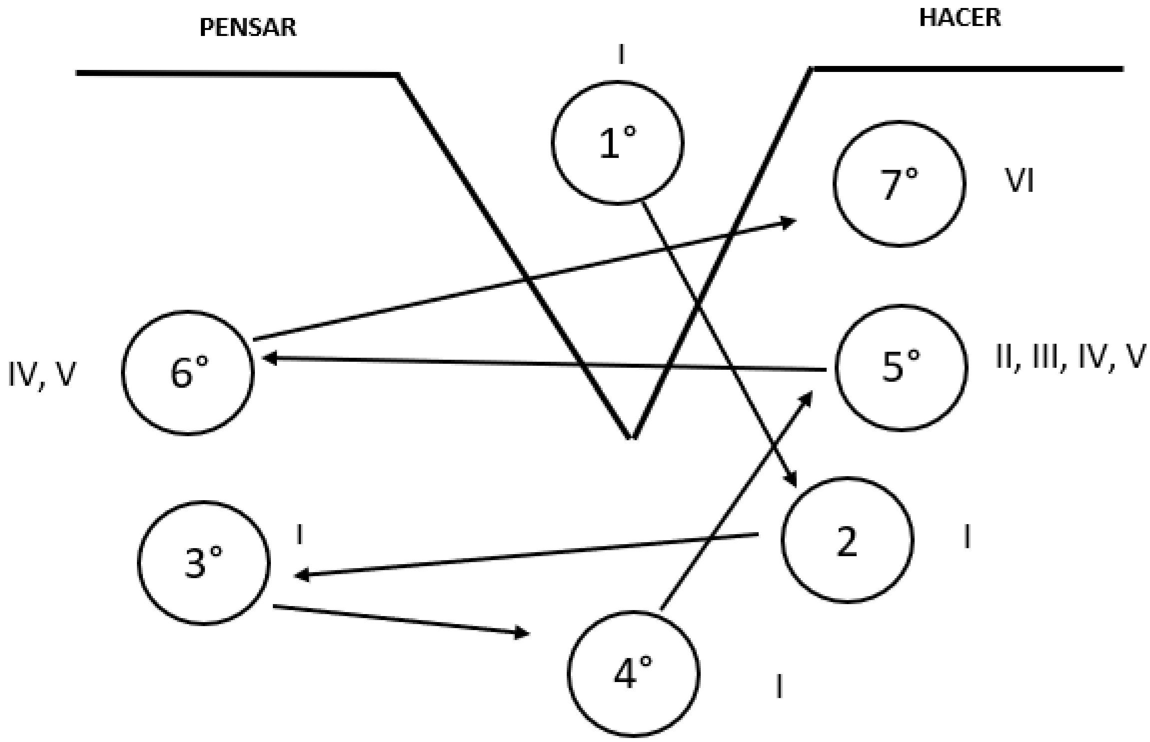


Figura 6.14 Ruta de resolución del problema 2 por parte de la estudiante B

En este problema no se observa el uso de la optimización. No es fácil determinar el procedimiento que la estudiante realizó, sin embargo, en ningún momento realizó alguna derivada o algún otro proceso para optimizar.

La Figura 6.15 muestra el MCH-EOS correspondiente al problema 2 de la estudiante B. En este problema, nuevamente no se observa el uso de la optimización. En la primera práctica A de interpretación del problema, la estudiante considera los datos que proporciona el problema acerca de la suma de los catetos que es 4. Por lo que concluye que la suma es 2+2. Posteriormente, en la práctica B, sustituye estos valores en la fórmula del área que ella propone, es decir, multiplicar los catetos y dividir entre la hipotenusa. Como resultado, obtiene que el área es $\frac{4}{hipotenusa}$. La siguiente práctica tiene como finalidad comprobar el área del triángulo considerando que la suma de las longitudes es 4, es decir, $a + b + c = 4$ para despejar el valor de la hipotenusa que le hace falta en la fórmula del área (concepto B17). Por lo que despeja la variable c como $c = 4 - a - b$, la cual sustituye en la fórmula del área (concepto B27). El cual lo pasa al denominador y obtiene como resultado que el área es $A = 4a + a^{-2} + b^{-3}$, sin embargo, argumenta que el área es igual a 4 debido a que resulta de la multiplicación de los catetos y a que al sumarlos también es 4, ver ruta C33-C34-…-C38.

La respuesta a este problema también es errónea. Primeramente, la estudiante consideró el área como la multiplicación de los catetos dividida entre la hipotenusa (concepto B12), lo cual no es correcto. Posteriormente, en la práctica C considera la suma de las tres longitudes como 4 (ruta C19-C20-C21-C22), sin embargo, el problema menciona que solamente la suma de los catetos es 4. Finalmente, su argumento sobre por qué el área es 4 tampoco es válido, ver ruta C33-C34-…-C38.

En la práctica A, la unidad de análisis se observa cuando la estudiante al interpretar el problema considera que la suma de los catetos es cuatro. Sin embargo, particulariza y materializa a cada cateto como $2 + 2$.

En la práctica B, la estudiante idealiza a la fórmula del triángulo como $\frac{(cateto\ opuesto)(cateto\ adyacente)}{hipotenusa}$. Particulariza la fórmula que propone considerando los datos que previamente obtuvo. Materializa la expresión como $\frac{4}{hipotenusa}$.

En la práctica C, la estudiante idealiza la suma de los lados del triángulo como $a + b + c = 4$. Esto con el fin de obtener el valor de la hipotenusa, el cual particulariza como c. Significa este valor y lo materializa en la fórmula que escribió en la práctica B. Sin embargo, dentro de esta práctica es posible notar que la unidad de análisis vuelve a estar presente. Esto ocurre cuando la estudiante idealiza a la multiplicación de los catetos como el área. Por lo que este valor lo significa y materializa como el área máxima.

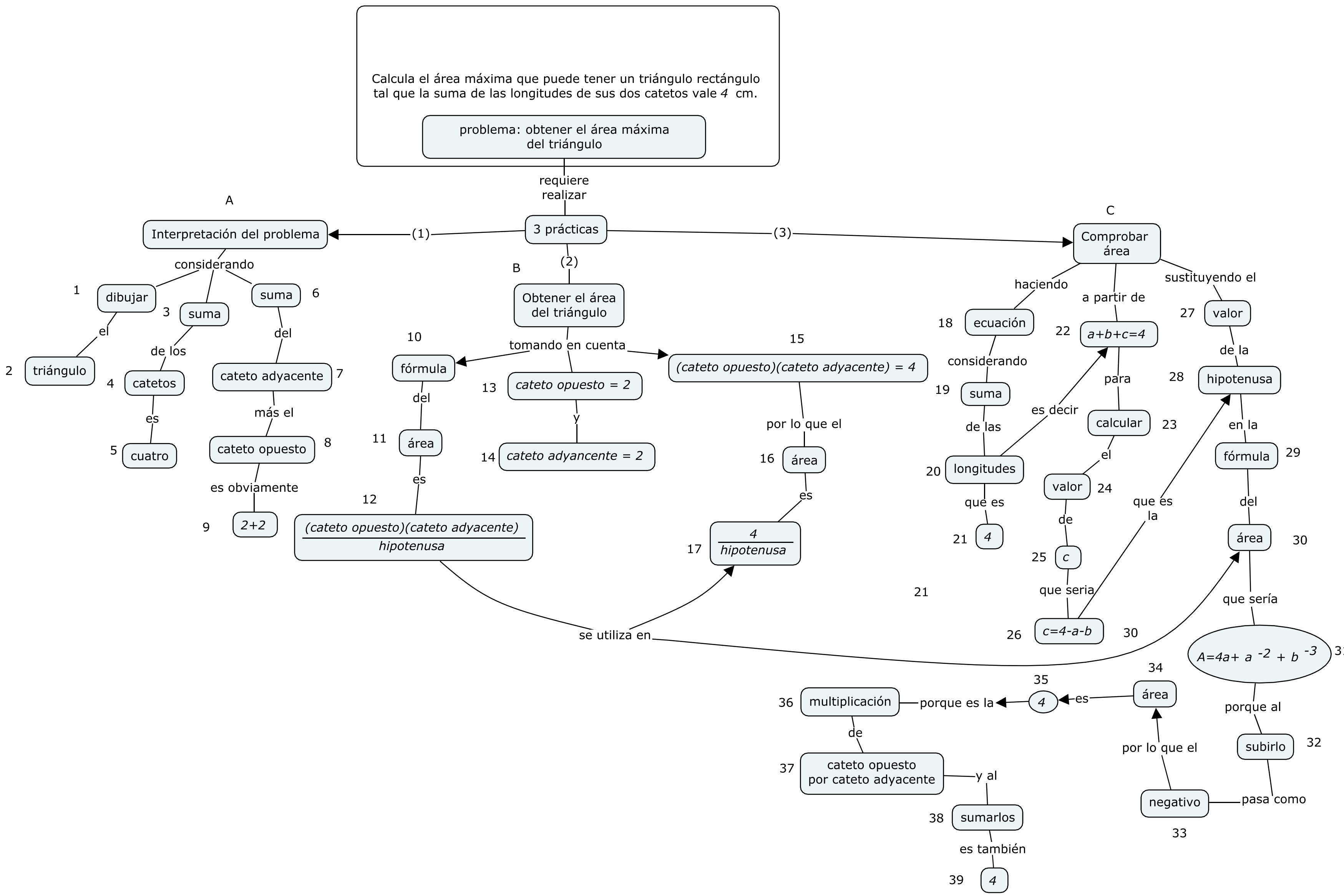


Figura 6.15 MCH-EOS correspondiente al problema 2 de la estudiante B

En la Figura 6.16 se presenta la V de Gowin correspondiente a la producción de la estudiante B al resolver el problema 3, ver la Figura 5.6 en la sección 5.2.3.

La estudiante B muestra haber realizado un ASC al derivar la función $C(x) = 2x^2 + 40x + 1400$; al realizar el despeje de la variable x de $c'(x) = 4x + 40$; al sustituir el valor de $x = -10$ en $c(x) = 2x^2 + 40x + 1400$.

Por otra parte, se observa un ASP erróneo debido a que los argumentos de su respuesta no son correctos.

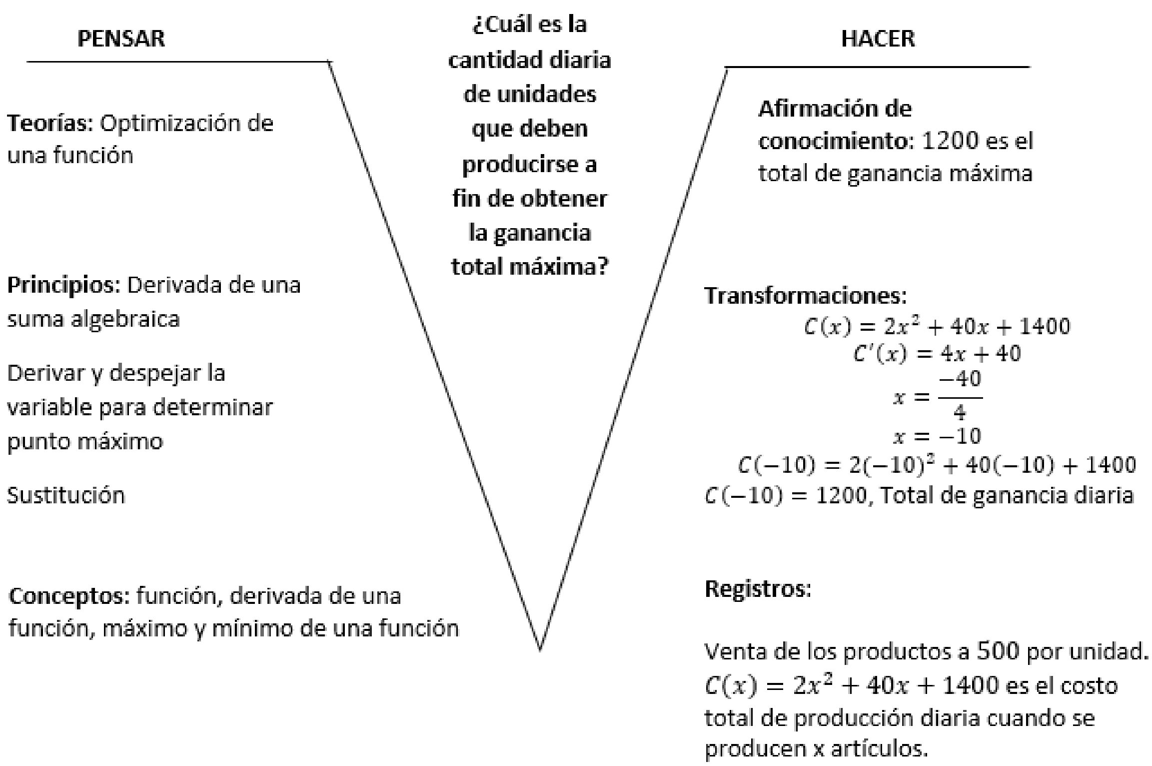


Figura 6.16 V de Gowin correspondiente a la producción de la estudiante B en la resolución del problema 3

En la Figura 6.17 se presenta la ruta que llevó a cabo para resolver el problema. En este problema la estudiante sí realizó las interacciones entre la parte conceptual y procedimental, sin embargo, al no considerar un valor que proporciona el problema obtuvo un resultado incorrecto. Las rutas trazadas hacen que parezca que la resolución no fue mecánica, sin embargo, la estudiante realiza ciegamente el procedimiento para optimizar sin percatarse de datos fundamentales para una solución correcta.

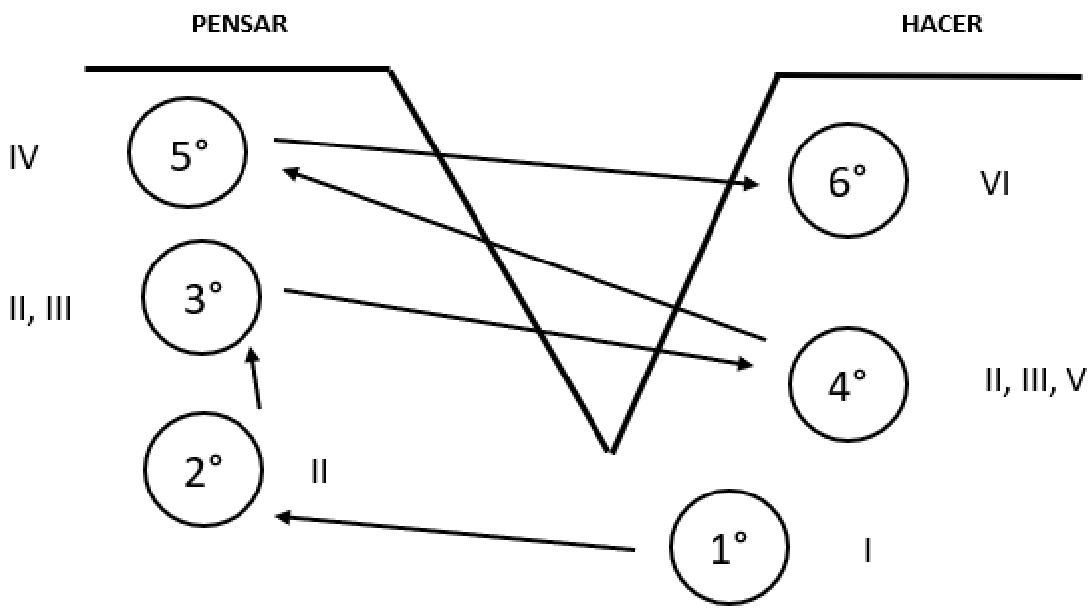


Figura 6.17 Ruta de resolución del problema 3 por parte de la estudiante B

En este problema la estudiante realizó correctamente la derivada y los pasos siguientes para optimizar. Sin embargo, no utilizó un dato importante que menciona el problema, por lo que el resultado es erróneo. Además de que confundió ganancia diaria con unidades para obtener la ganancia máxima.

La Figura 6.18 muestra el MCH-EOS correspondiente al problema 3. En este caso, la primera práctica A no es sobre la interpretación del problema, debido a que su finalidad es saber la ganancia máxima de un día utilizando la función que proporciona el problema. Para esto, la estudiante deriva la función del costo de producción para posteriormente despejar la variable x, del cual obtiene que $x = -10$ (ruta A7-A8), y considera que es la ganancia máxima de un día. La finalidad de la siguiente práctica es obtener la ganancia máxima. Por lo cual, utiliza el valor de x que obtuvo en A8 para sustituirlo en la función del costo de producción, de manera que obtiene que la ganancia máxima es 1200, ver ruta B13-B14.

La respuesta a este problema es también errónea. La función que el problema proporciona es solamente del costo de producción, por lo que la estudiante no consideró el dato de que la empresa obtiene $500 por cada producto vendido, sino que llevó a cabo un procedimiento algorítmico al ver una función y derivarla, despejar la variable y obtener su valor.

En la práctica A, la unidad de análisis se observa cuando la estudiante interpreta que la función que menciona el problema es la ganancia máxima de un día. Por lo que utilizando sus conocimientos previos sobre cálculo diferencial, deriva la función. Posteriormente despeja el valor de x y lo significa y materializa como la ganancia máxima de un día.

En la práctica B, particulariza al sustituir el dato de x, que obtuvo previamente, dentro de la función que menciona el problema. El valor que obtiene lo significa como la ganancia máxima.

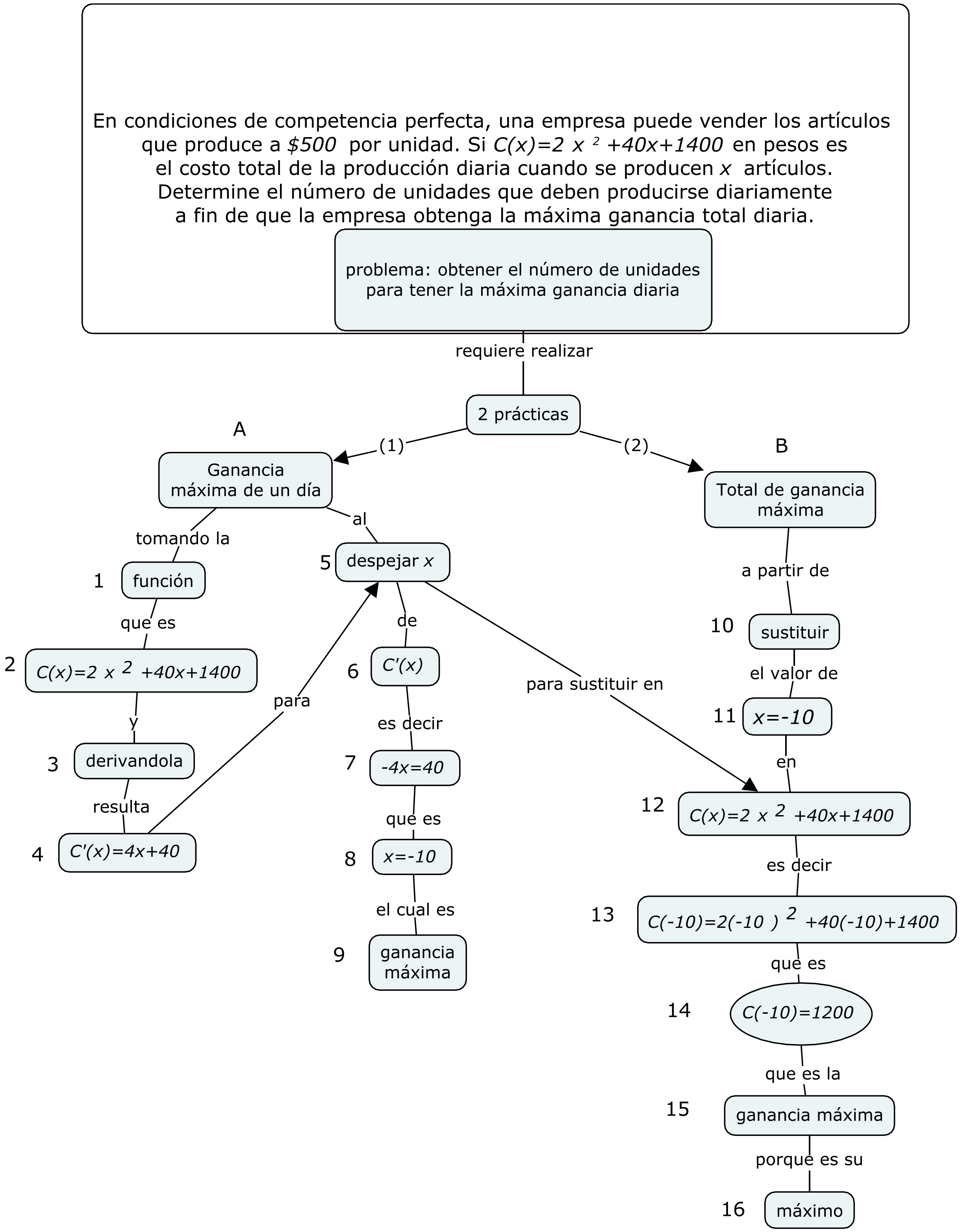


Figura 6.18 MCH-EOS correspondiente al problema 3 por parte de la estudiante B

6.3 Aportaciones de la TAS y el EOS al estudio de la optimización

La V de Gowin, que tiene como sustento la Teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel, ha permitido analizar la actividad matemática implicada en la resolución de problemas que involucran optimización. Entre los aportes se tiene que permite observar las trayectorias entre los elementos que señala la TAS. Permite ver la interacción entre la parte conceptual y procedimental de la V de Gowin. Si bien se ha señalado que la resolución algorítmica de un problema está relacionada con la trayectoria registro-transformaciones-afirmación de conocimiento (Escudero y Moreira, 1999), en el caso de la estudiante B que resolvió de manera algorítmica el problema 3, la trayectoria luce distinta a la reportada por Escudero y Moreira (1999) ya que la trayectoria (ver figura 6.17) relaciona los distintos elementos de la V de Gowin mostrándose como un esquema que corresponde a un aprendizaje significativo.

Cabe señalar que la V de Gowin correspondiente a la solución experta siempre se apoya en los elementos principios y teorías (ver Figura 6.5) por otro lado, la V de Gowin correspondiente a la alumna B no siempre considera la teoría (ver Figura 6.14). Sin embargo, no es posible observar un patrón de trayectorias característico de una solución experta o de un novato.

Por otro lado, mediante el MCH-EOS es posible representar a detalle las conexiones entre los distintos objetos matemáticos primarios (lenguaje, argumentos, procedimiento, proposiciones, conceptos) a lo largo del sistema de prácticas implicadas en la resolución de los problemas. Permite identificar de forma clara el sistema de prácticas realizado por un experto (estudiante A) del sistema de prácticas realizado por un novato (estudiante B).

Es importante señalar que la V de Gowin representa de manera separada y organizada los elementos que participan en la actividad matemática (transformaciones, afirmaciones de conocimiento, registros, acontecimientos, propiedades, conceptos, teoría), sin embargo, las partes que constituyen los elementos que figuran en la V de Gowin aparecen aglutinadas. Por ejemplo, el elemento transformación aglutina los distintos algoritmos llevados a cabo en la resolución de problemas; en el elemento principios se presentan todas las propiedades del proceso de solución del problema; en el elemento conceptos se presentan agrupados todos los conceptos. De manera que no es posible identificar a través de las trayectorias de la V de Gowin qué propiedad o concepto fue empleado en cierto momento del procedimiento.

En contraste, en el MCH-EOS se presenta en forma desmenuzada al objeto procedimiento en las distintas prácticas, así también es posible identificar en qué momento del proceso de resolución fue empleado cierto concepto o propiedad.

Así mismo, a diferencia de la V de Gowin, mediante el MCH-EOS es posible advertir la realización de ciertos procesos cognitivos tales como el de idealización, interpretación, particularización, significación y materialización. Por ejemplo, en el caso de la V de Gowin en el elemento transformación no es posible advertir el proceso de argumentación que permite justificar cada uno de los pasos que conforman el procedimiento.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

CAPÍTULO 7
CONCLUSIONES

Introducción

En este capítulo se presentan las conclusiones obtenidas en esta investigación de acuerdo con el análisis y discusión que se presentó en el capítulo anterior. En primer lugar, se presentan en orden las preguntas de investigación con la respuesta correspondiente a cada una y finalmente se incluyen las conclusiones del trabajo.

7.1 Respuestas a las preguntas de investigación

Primera pregunta de investigación: *¿Qué característica presenta la práctica de resolución de problemas que involucran optimización?*

La V de Gowin correspondiente a cada producción de los estudiantes A y B muestran las características que a continuación se mencionan. En primer lugar, las rutas de ambos estudiantes pueden parecer a simple vista similares. Ambos realizan una buena interacción entre ambas partes de la V de Gowin, es decir, entre lo operativo y lo teórico. Sin embargo, los procedimientos y resultados entre ambos estudiantes son totalmente distintos. Esto podría considerarse acorde a las respuestas correctas que dio el estudiante A, pues se muestra un conocimiento más amplio sobre el tema. En el caso de la estudiante B, en el problema 3 (ver Figura 6.16 de la sección 6.2) se observa una falta de interpretación del problema. Al ignorar un dato esencial del enunciado, se muestra que su resolución es meramente mecánica. Es decir, derivar la función que proporciona el problema, igualar a cero y despejar la variable.

Por otro lado, mediante el MCH-EOS, haciendo uso de la unidad de análisis se puede observar lo siguiente. En cuanto al estudiante A en la Figura 6.3 de la sección 6.1, en la práctica interpretativa se observa que en la ruta A5-A7 en donde se menciona que el segundo número es el doble del primero, el estudiante particulariza este dato y lo escribe como $2a$, para finalmente materializar la expresión completa como $a + 2a + c = 60$ (ver A8-A9). Posteriormente, en la práctica B, en la ruta B20-B23 el estudiante interpreta el dato del enunciado acerca del producto de los tres números, por lo que lo idealiza como $a * b * c$ para particularizarlo utilizando los valores que obtuvo previamente de cada número en términos de una sola variable, después significa la expresión que obtiene y la materializa de manera ostensiva.

En la práctica C, el estudiante reúne los conceptos nuevos que obtuvo en las prácticas anteriores para idealizar la expresión que debe derivar utilizando los objetos relacionados con la optimización y que necesita para obtener el valor óptimo, finalmente lo particulariza en C31 al escribir la derivada de la expresión (ver ruta C27-C31).

En cuanto a la estudiante B, en el problema 1 (ver Figura 6.12 de la sección 6.2), no realiza una interpretación adecuada del problema, por lo que las funciones semióticas que establece son inadecuadas. Por ejemplo, en la práctica A que es de interpretación, en la ruta A1-A5, la estudiante considera que el segundo número es $2b$ y que el último número vale uno por lo que lo escribe como c. Esto trae como consecuencia que no establezca una significación entre los objetos relacionados con el problema y con los objetos relacionados a la optimización. Es decir, con los datos del problema se pretende construir una expresión de una sola variable para aplicar el procedimiento correspondiente a la optimización. Sin embargo, al realizar una interpretación incorrecta del problema, la estudiante no puede realizar el procedimiento que se requiere para obtener un resultado correcto.

Segunda pregunta de investigación: *¿Qué significado asocian a la optimización en el contexto de problemas de Cálculo Diferencial de tipo numérico, geométrico, y sobre economía?*

Desde el EOS se tienen dos perspectivas: función semiótica y sistema de prácticas. En cuanto a la función semiótica, en el caso de la estudiante B se observa que en los tres problemas no asocia el resultado con el procedimiento siguiente. En el problema 1 (ver Figura 6.12 de la sección 6.2), la estudiante en A6 considera que son tres números positivos, sin embargo, en B16 utiliza solo dos números, y en B18 obtiene un valor negativo para uno de estos tres números, dejando por un lado que los números son positivos. Realiza lo mismo en C28 y C29.

En el problema 2 (ver Figura 6.15 de la sección 6.2), la estudiante significa de forma incorrecta la fórmula del área de un triángulo (ver B11-B12), y al utilizar esta fórmula obtiene el resultado que se muestra en C30, sin embargo, lo deja a un lado y en C34 da como respuesta que el área es 4.

Por otro lado, el estudiante A sí asocia el resultado que obtiene con el procedimiento siguiente. Por ejemplo, en la Figura 6.3 de la sección 6.1, el estudiante asocia el hecho de que el segundo número es el doble del primero, por lo que en el siguiente procedimiento lo reescribe de la manera en la que corresponde (ver A8). Posteriormente, al obtener el valor del tercer número (ver B19) lo sustituye en el procedimiento siguiente. Además, el estudiante expresa que el primer y segundo número están relacionados (ver B17 y B20) por lo que puede expresar el producto de los tres números de una manera más conveniente en términos de una sola variable.

En el problema 3 (ver Figura 6.9 de la sección 6.1) el estudiante obtiene la expresión de la ganancia por unidad (ver A6), la cual asocia en un procedimiento posterior para obtener la expresión de la ganancia máxima (ver B24).

Desde el sistema de prácticas se observa cómo ambos estudiantes utilizan solamente el criterio de la primera derivada, por lo que el valor que obtienen le dan el significado de que es máximo o mínimo, sin necesidad de utilizar el criterio de la segunda derivada.

Esto puede observarse en la Figura 6.3 de la sección 6.1 en la ruta C27-C39, el estudiante A realiza la primera derivada, iguala a cero y despeja la variable. El resultado que obtiene lo considera como el óptimo que resuelve el problema. Lo mismo ocurre en la Figura 6.6 de la sección 6.1, en la ruta C21-C27 menciona que el área máxima se determina a partir de derivar el producto y de obtener el valor donde se hace cero, y en la Figura 6.9 de la sección 6.1 en la ruta C28-C35 deriva la función de la ganancia máxima, iguala a cero y despeja la variable. El resultado que obtiene lo considera como el óptimo sin hacer una segunda derivada.

Lo mismo ocurre con la estudiante B. En la Figura 6.12 de la sección 6.2, para obtener los valores que indica el problema, la estudiante realiza el producto de dos números, después lo deriva, iguala a cero y despeja la variable (ver B15-B19). Incluso cuando obtiene el valor de una variable ella menciona que es uno de los tres valores máximos (ver B19). En la Figura 6.18 de la sección 6.2, la estudiante vuelve a aplicar el mismo procedimiento. Es decir, en A5-A9 despeja la variable de la primera derivada, después iguala a cero y obtiene el valor de la variable. En A9 incluso menciona que ese valor es la ganancia máxima.

Desde la TAS se aplica la definición de aprendizaje significativo. En un primer momento, el enunciado del problema puede ser considerado conocimiento nuevo. La forma en la que relaciona dicho conocimiento con el conocimiento previo tiene que ser con el aprendizaje significativo. Por ejemplo, el estudiante A en el problema 1 (ver Figura 6.1 de la sección 6.1) se indica que el segundo número es el doble del primero, por lo que el estudiante relaciona ese nuevo conocimiento con el conocimiento previo sobre escribir expresiones algebraicas con términos semejantes. En el problema 2 (ver Figura 6.4 de la sección 6.1) el estudiante relaciona la información nueva sobre que la suma de los catetos es igual a 4 con la utilización de incógnitas, por lo que el escribe los valores de los dos catetos como a y $4 - a$. En el problema 3 (ver Figura 6.7 de la sección 6.1) el nuevo conocimiento tiene que ver con la información que presenta el problema sobre que la ganancia por unidad es de 500. Él relaciona este conocimiento con el conocimiento previo que posee sobre la ganancia máxima, mencionando que debe ser la cantidad que se gana menos la que se pierde. Estos procedimientos anteriores pudieran no tener relación con la optimización, sin embargo, todo es parte del proceso de construir una expresión derivable para optimizar.

Por otra parte, la estudiante B muestra un aprendizaje significativo incorrecto en la resolución de los problemas. Esto se puede observar en el problema 1 (ver Figura 6.10 de la sección 6.2), el enunciado del problema menciona que el segundo número es el doble del primero, sin embargo, ella expresa el segundo número como $2b$ por lo que obtiene una expresión con tres variables diferentes. En el problema 2 (ver Figura 6.13 de la sección 6.2) para obtener el área del triángulo la estudiante utiliza la fórmula $A = \frac{CO \cdot CA}{hip}$, la cual es una expresión errónea. Esto quiere decir que la estudiante significó de manera incorrecta la fórmula de un triángulo. En el problema 3 (ver Figura 6.16 de la sección 6.2) la estudiante hace caso omiso de la nueva información sobre la ganancia por unidad, por lo que tal información la hace a un lado y no la utiliza para resolver el problema.

7.2 Conclusiones

Tanto la V de Gowin como el MCH-EOS permiten representar de manera esquemática todo lo que hacen los estudiantes al resolver problemas que involucran optimización. La V de Gowin proporciona una vista acerca de las propiedades que utilizan los estudiantes para resolver el problema de una forma más organizada. Sin embargo, no permite visualizar cómo están utilizando tales propiedades en el procedimiento. Es decir, como se pudo observar en la V de Gowin con las rutas de cada estudiante, a simple vista pareciera que ambos resolvieron correctamente los problemas debido a que la interacción entre las partes de la V de Gowin es buena, sin embargo, los resultados de cada estudiante fueron muy distintos.

Por otra parte, utilizando el MCH-EOS se puede lograr una perspectiva panorámica del sistema de prácticas implicadas en la resolución de cada problema. Permite analizar cómo se conectan los objetos matemáticos primarios en todo el proceso de la resolución. De cierta forma presenta la información aún más organizada, siguiendo la organización de las prácticas. Es decir, se observa cuándo utiliza alguna propiedad o surge un nuevo objeto matemático y cómo lo relaciona dentro del mismo procedimiento.

Se puede decir finalmente que la concepción que tienen los estudiantes de la optimización es la siguiente. Para el estudiante A, la optimización ocurre hasta la primera derivada. En los tres problemas A solo realizó la primera derivada y concluyó que el valor que la hace cero era el óptimo, sin necesidad de realizar la segunda derivada.

Para la estudiante B, se pudo observar cómo realizó procedimientos algorítmicos. Es decir, tener una función, derivar, igualar a cero y buscar los valores en donde la primera derivada se hace cero. Fue un procedimiento ciego debido a que B no se detenía a analizar los datos de los problemas y tampoco tomaba en cuenta que la función a optimizar debía estar en términos de una sola variable.

Bibliografía

Aguilar, T. (2006). El mapa conceptual una herramienta para aprender y enseñar. *Plasticidad y restauración neurológica*, *5*(1), 62-72. Recuperado de: https://bit.ly/2xB8LbA

Ausubel, D. (1983). Teoría de Aprendizaje Significativo. Fascículos de CEIF, 1.

Balcaza, T., Contreras de la Fuente, A., y Font, V. (2017). Análisis de libros de texto sobre la optimización en el bachillerato. *Boletim de Educacao Matemática*, *31*(59), 1061-1081.

Colegio de Bachilleres (2016). Programa de asignatura: Matemáticas V. Disponible en: https://bit.ly/2XoGQd4

D'Amore, B., y Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10* (2), 191-218.

Dawkins, P. (2007). Calculus I. Lamar University. Recuperado de: https://bit.ly/2V9w74O

Escudero C. (1995). La resolución de problemas en física: herramienta para reorganizar significados. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, *12* (2).

Escudero, C., y Moreira, M. (1999). La V epistemológica aplicada a algunos enfoques en resolución de problemas. *Enseñanza de las ciencias*, *17* (1), 61-68.

Gil, J., Solano, F., Tobaja, L., y Monfort, P. (2013). Propuesta de una herramienta didáctica basada en la V de Gowin para la resolución de problemas de física. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, *35*(2), 2402.

Godino, J. D (2003). *Funciones semióticas. Un enfoque ontológico – semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Godino, J. (2013) Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, San José, 11, 111-132.

Godino, J., y Batanero, C. (1994). Significado personal e institucional de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (3), 325-355.

Guardian, B. y Ballester, A. (2011). UVE de Gowin instrumento metacognitivo para un aprendizaje significativo basado en competencias. IN. *Revista Electrònica d’Investigació i Innovació Educativa i Socioeducativa*, *3*(1), 51-62. Recuperado en: https://bit.ly/2UIctNU

Hernández, L. (2019). *Un estudio acerca de las concepciones de la noción física de marco de referencia en ingeniería* (tesis de pregrado). Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí. Disponible en: https://bit.ly/2Ktd6FO

Malaspina, J. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática* (tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Recuperado de: https://bit.ly/2GqVmaF

Malaspina y Font (2015). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*. Disponible en: https://bit.ly/2KYs1aq

Martínez, C. y Piedad, C. (2006). El método de estudio de caso: estrategia de la investigación científica. *Pensamiento & Gestión*, *20*, 165-193. Disponible en: https://bit.ly/28A2pVs

Morales, E. (2011). La V de Gowin como estrategia para favorecer la construcción del conocimiento matemático en estudiantes de ingeniería. Universidad Nacional Experimental Politécnica "Antonio José de Sucre". Disponible en: http://www.laccei.org/LACCEI2011-Medellin/published/EUEE056_Morales.pdf

Moreira, A. (2003). Lenguaje y Aprendizaje Significativo. Conferencia de cierre del IV Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo. Maragogi, AL, Brasil.

Moreira, A. (2010). ¿Por qué conceptos ¿Por qué aprendizaje significativo? ¿Por qué actividades colaborativas? ¿Por qué mapas conceptuales? *Revista Curriculum*, *23*, 9-23.

Moreira, A. y Greca, M. (2003). Cambio conceptual: Análisis crítico y propuestas a la luz de la teoría del aprendizaje significativo. *Ciencia y Educación*, 9, 301-315.

Moreira, M., Caballero, C. y Rodríguez, L. (1997). *Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo.* Burgos, España. 19-44

Moreno, N., Angulo, R. y Reducindo, I. (2018). Mapas conceptuales híbridos para la enseñanza de la física y matemática en el aula. *Investigación e innovación en matemática educativa*. *3*(1), 113-130. Disponible en: https://bit.ly/2MWdhv8

Moreno, N., Zuñiga, S. y Tovar, D. (2018). Una herramienta gráfica para la resolución de problemas de cinemática. *Revista Latinoamérica de Física Educativa*. *12*(4). Disponible en: https://bit.ly/2WASXDu

Novak, J. y Gowin, B. (2004). Aprendiendo a aprender. Barcelona, Martínez Roca.

Pinto. E. (2016). Tipos de diagrama de procesos [Dispositivas de PowerPoint] Recuperado el 27 de septiembre de 2019, de https://bit.ly/2mmanmU

Quecedo, R. y Castaño, C. (2002). Introducción a la investigación cualitativa. *Revista de Psicodidáctica, 14*, 5-39. Disponible en: https://bit.ly/2HYOZh8

Rodríguez, L. (2004). *La teoría del aprendizaje significativo*. En la primera conferencia internacional de mapas conceptuales. Conferencia llevada a cabo en Pamplona, España. Recuperado de: https://bit.ly/1NIXk5r

Rondero, C. y Font, V. (2010). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *33*(2), 29-49.

SEP. (2017). Programa de estudios del componente básico del marco curricular común de la educación medio superior. Disponible en: https://bit.ly/2FkftX1

Ylé, A., Juárez, J. y Vizcarra, F. (2012). Cálculo I para Bachillerato. Recuperado de: https://bit.ly/2VWUq32

Anexos

Anexo 1. Instrumento

Nombre: _________________________________Grado:___Grupo:___Fecha:______

Contesta lo que se te indica y justifica tu respuesta.

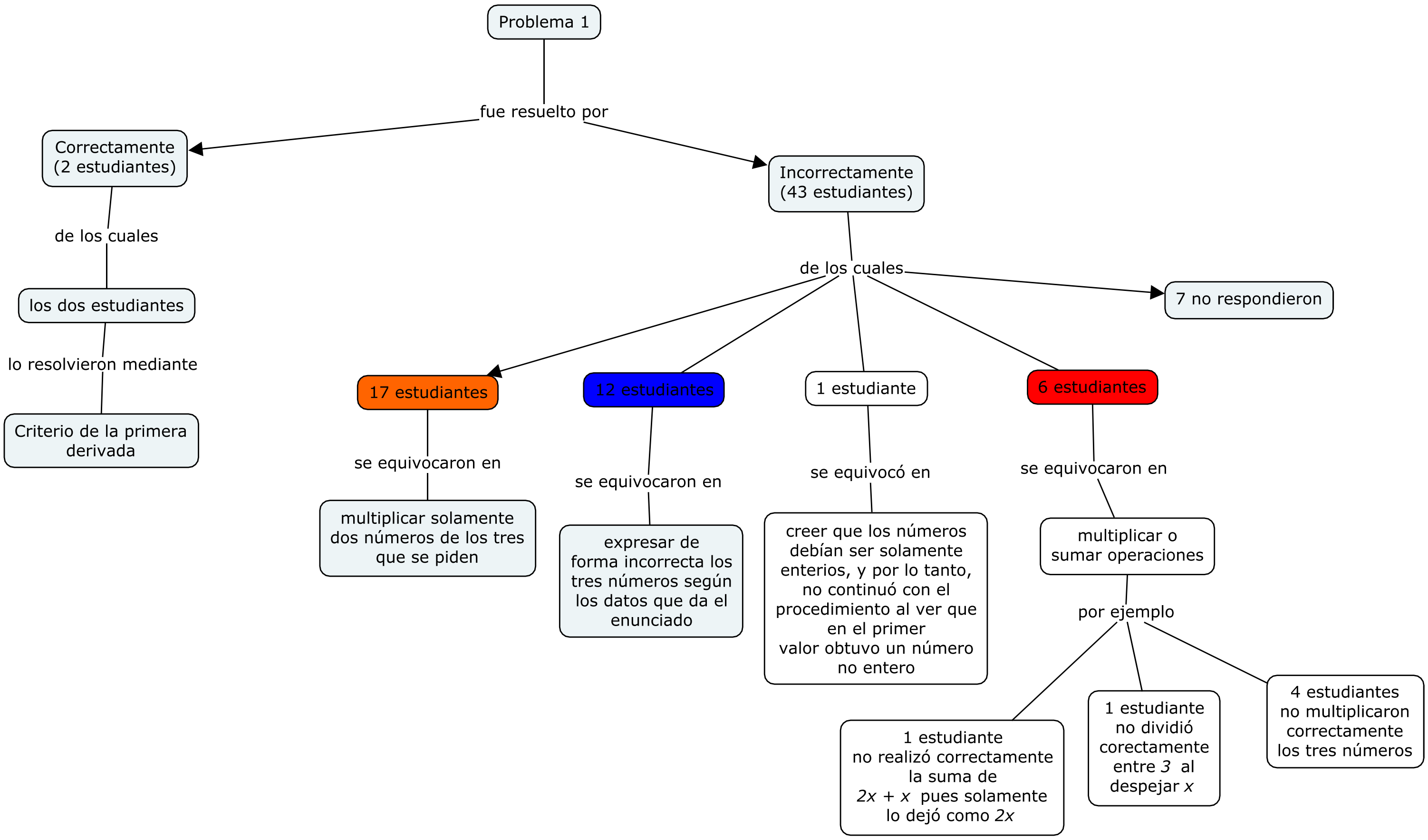
1.- Expresa el número 60 como suma de tres números positivos de forma que el segundo sea doble del primero. Si el producto de los tres es máximo, determina el valor de dicho producto.

2.- Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos es $4\ cm$.

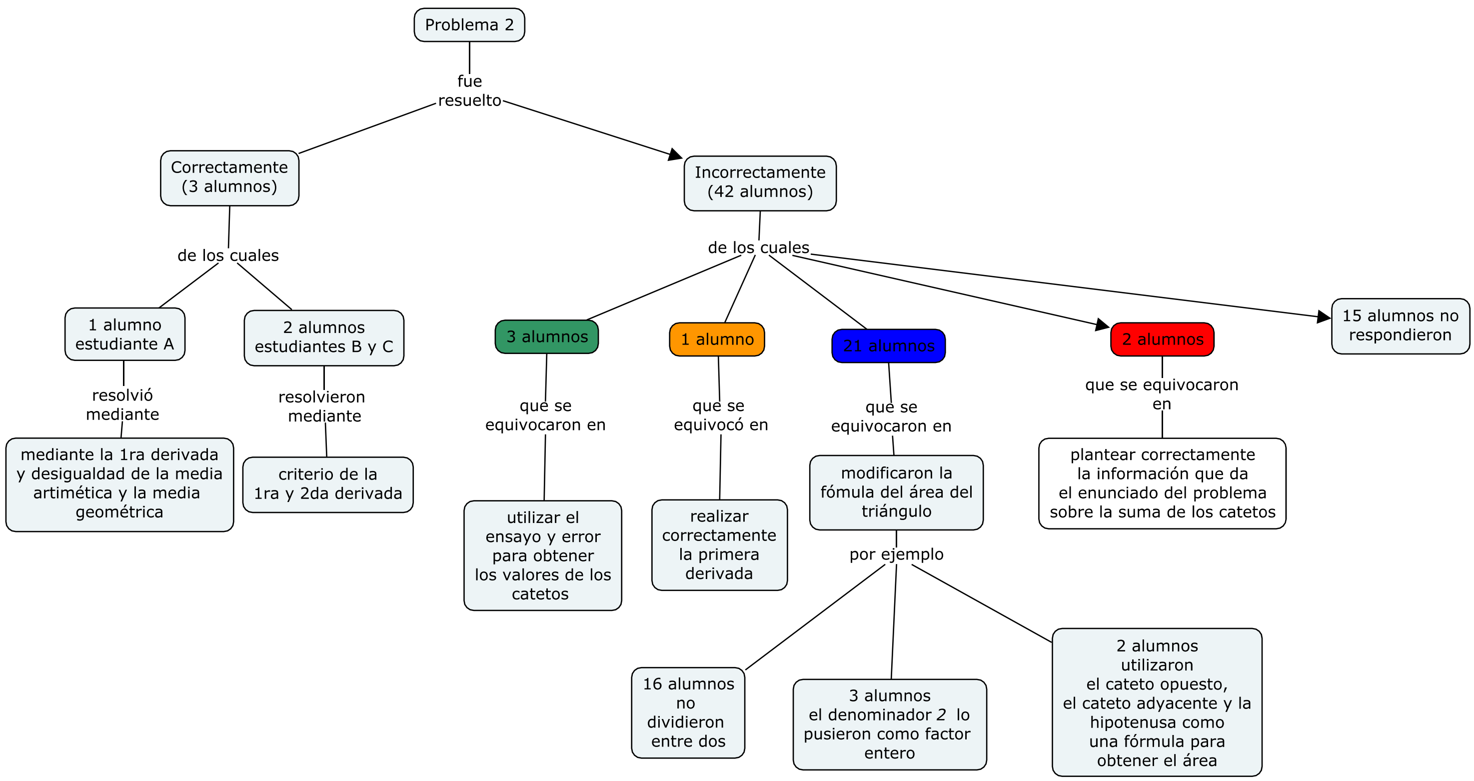
3.- En condiciones de competencia perfecta, una empresa puede vender los artículos que produce a $\$500$ por unidad. Si $C(x) = 2x^2 + 40x + 1400$ en pesos es el costo total de la producción diaria cuando se producen x artículos. Determine el número de unidades que deben producirse diariamente a fin de que la empresa obtenga la máxima ganancia total diaria.

Anexo 2. Categorías de resoluciones de los problemas

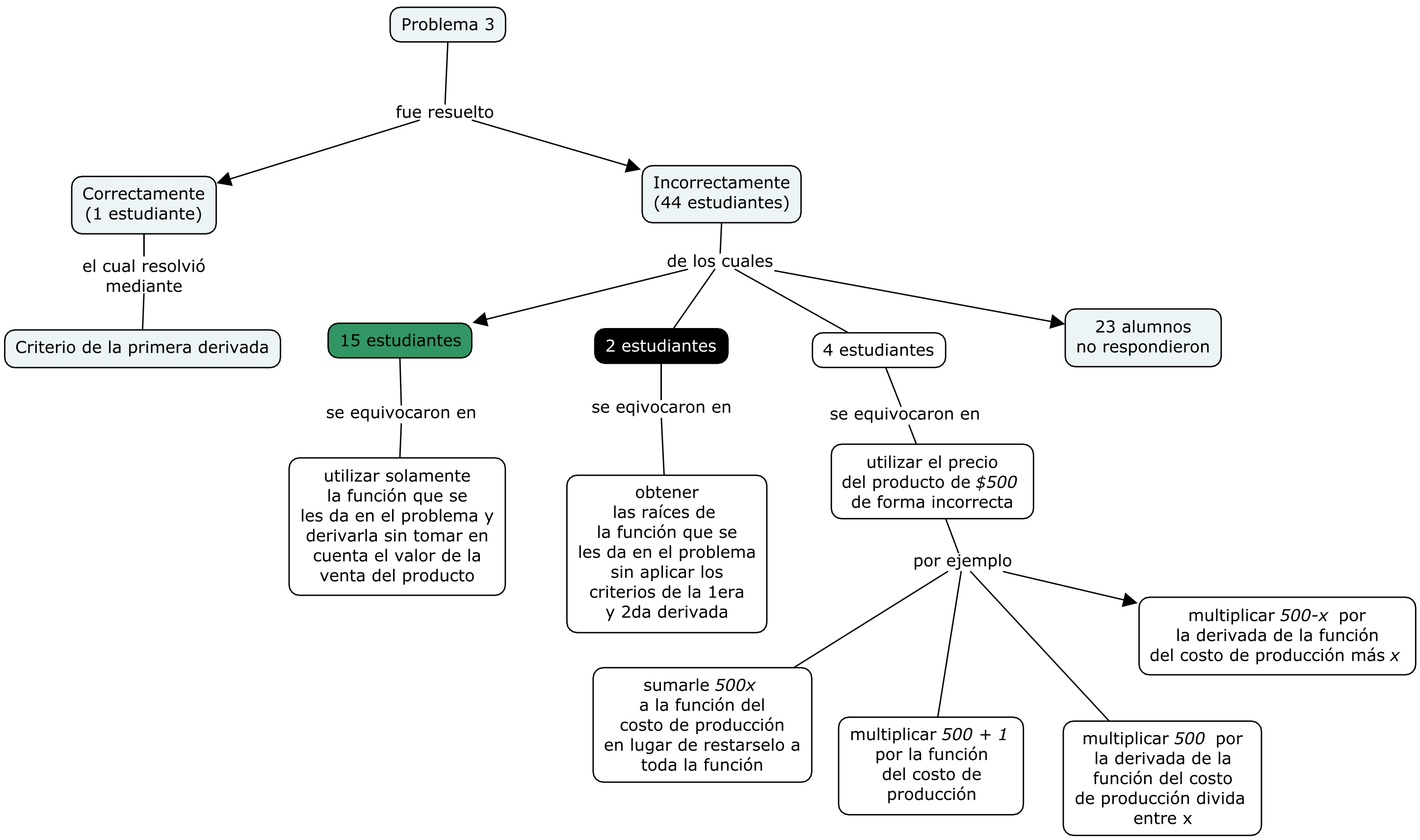
a) Problema 1



b) Problema 2


Problema 2
fue resuelto
Correctamente (3 alumnos)
Incorrectamente (42 alumnos)
de los cuales
1 alumno estudiante A
2 alumnos estudiantes B y C
resolvió mediante
resolvieron mediante
mediante la 1ra derivada y desigualdad de la media artimética y la media geométrica
criterio de la 1ra y 2da derivada
de los cuales
3 alumnos
1 alumno
21 alumnos
2 alumnos
15 alumnos no respondieron
que se equivocaron en
que se equivocó en
que se equivocaron en
que se equivocaron en
utilizar el ensayo y error para obtener los valores de los catetos
realizar correctamente la primera derivada
modificaron la fómula del área del triángulo
plantear correctamente la información que da el enunciado del problema sobre la suma de los catetos
por ejemplo
16 alumnos no dividieron entre dos
3 alumnos el denominador 2 lo pusieron como factor entero
2 alumnos utilizaron el cateto opuesto, el cateto adyacente y la hipotenusa como una fórmula para obtener el área

c) Problema 3



Problema 3
fue resuelto
Correctamente (1 estudiante)
Incorrectamente (44 estudiantes)
el cual resolvió mediante
Criterio de la primera derivada
de los cuales
15 estudiantes
2 estudiantes
4 estudiantes
23 alumnos no respondieron
se equivocaron en
utilizar solamente la función que se les da en el problema y derivarla sin tomar en cuenta el valor de la venta del producto
se eqivocaron en
obtener las raíces de la función que se les da en el problema sin aplicar los criterios de la 1era y 2da derivada
se equivocaron en
utilizar el precio del producto de *$500* de forma incorrecta
por ejemplo
multiplicar *500-x* por la derivada de la función del costo de producción más *x*
sumarle *500x* a la función del costo de producción en lugar de restarselo a toda la función
multiplicar *500 + 1* por la función del costo de producción
multiplicar *500* por la derivada de la función del costo de producción divida entre x

Anexo 3. Solución de un experto a los problemas de optimización

Problema 1

Expresa el número 60 como suma de tres números positivos de forma que el segundo sea doble del primero. Si el producto de los tres es máximo, determina el valor de dicho producto.

Solución:

Sean a, b, c los números.

Se sabe que $b = 2a$; y que $a + b + c = 60 => 3a + c = 60 => c = 60 - 3a$

El producto de los tres números es:

$$P = abc = a * 2a * (60 - 3a) = -6a^3 + 120a^2$$

El producto en función de a es: $P(a) = -6a^3 + 120a^2$

Este producto es máximo en los valores de a que cumplen que $P'(a) = 0$ y $P''(a) > 0$

$$P'(a) = -18a^2 + 240a = 6a(-3a) + 40 = 0 => a = 0; a = \frac{40}{3}$$

Como $P''(a) = -36a + 240$ se tiene que $P''^{\left(\frac{40}{3}\right)} = -120 < 0$. Por lo tanto, el producto será máximo cuando $a = \frac{40}{3}$.

Los otros dos números son $b = 2a = \frac{80}{3}$; $c = 20$.

El producto máximo es $P = \frac{40}{3}\frac{80}{3}(20) \approx 7111.11$

Problema 2

Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos es $4\ cm$.

Solución:

Consideramos $a = 1°\ cateto\ (base)$ y $b = 2°\ cateto\ (altura)$

Tenemos la relación $a + b = 4 => b = 4 - a$

Función: $f(a, b) = \frac{a*b}{2} => f(a) = \frac{a(4-a)}{2} = \frac{4a-a^2}{2}$

Derivamos la función y obtenemos que $f'(a) = \frac{4-2a}{2}$

Igualamos a cero dicha derivada para calcular los posibles máximos o mínimos de la función

$f'(a) = 0 => \frac{4-2a}{2} = 0 => 4 - 2a = 0 => a = 2$ posible máximo o mínimo de la función.

Realizamos la segunda derivada para determinar si es un máximo o mínimo

$f''(a) = \frac{-2}{2} = -1$, sustituyendo $a = 2$, tenemos que $f''(2) = -1 < 0$, por lo tanto, es máximo.

Entonces $a = 2$ y $b = 4 - 2 = 2$ y el área máxima es $A = \frac{2*2}{2} = 2cm^2$.

Problema 3

En condiciones de competencia perfecta, una empresa puede vender los artículos que produce a $\$500$ por unidad. Si $C(x) = 2x^2 + 40x + 1400$ en pesos es el costo total de la producción diaria cuando se producen x artículos. Determine el número de unidades que deben producirse diariamente a fin de que la empresa obtenga la máxima ganancia total diaria.

Solución:

La función del costo de producción diaria es $C(x) = 2x^2 + 40x + 1400$, sin embargo, la función de la ganancia total de la producción es

$$G(x) = 500x - (2x^2 + 40x + 1400) = -2x^2 + 460x - 1400$$

Realizando la derivada de la función e igualando a cero obtenemos lo siguiente

$$G'^{(x)} = -4x + 460 => -4x + 460 = 0 => x = \frac{-460}{-4} = 115$$

Realizamos la segunda derivada y obtenemos que

$G''(x) = -4 < 0$, por lo tanto, $x = 115$ es máximo.

El número de unidades que deben producirse diariamente a fin de que la empresa obtenga la máxima ganancia total diaria es 115.