UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

**FACULTAD DE CIENCIAS**

# "*Una aproximación socioepistemológica al Teorema de Pitágoras*"

**TESIS PROFESIONAL**

Para obtener el grado de:

**Licenciado en Matemática Educativa**

Presenta:

**Marcelino Alvarado García**

Director de tesis:

**Dr. Nehemías Moreno Martínez**

San Luis Potosí, S.L.P. 9 de marzo 2018

# Índice

## FORMATO DE AUTORIZACIÓN PARA LA IMPRESIÓN FINAL DE LA TESIS

## SECRETARIA GENERAL

## FACULTAD DE CIENCIAS

**Nombre:** Marcelino Alvarado García

**Clave:** 0602425

**Fecha:** 23 de febrero del 2018

**Carrera:** Lic. Matemática Educativa

**Especialidad:**

**Generación:** 2013

**Título de la Tesis:**
"Una aproximación socioepistemológica al teorema de Pitágoras"

**Asesor:** Nehemías Moreno Martínez

**Adscripción del Asesor:** Facultad de Ciencias de la UASLP

**SINODALES ASIGNADOS**

**Presidente:** Dra. Rita Angulo Villanueva.

**Secretario:** Dr. Nehemías Moreno Martínez

Vocal: Dr. Ricardo Cantoral

Suplente: Dr. Flavio Vigueras

**Por medio de la presente atestiguamos que después de leer el documento de tesis puesto a nuestra consideración, no tenemos recomendaciones o sugerencias a su contenido y damos nuestra aprobación para que se impriman las versiones finales del mismo.**

Firmas:

Sinodal Presidente

Sinodal Secretario

Sinodal Vocal

Sinodal Suplente

Vo.Bo.

Secretario General

SECRETARIA
GENERAL

# *Agradecimientos*


Agradezco primeramente a Dios por haberme acompañado durante éste largo camino, lleno de experiencias y aprendizajes que han servido para convertirme en una mejor persona. Por ayudarme en momentos donde parecía que todo se terminaba y esos momentos de debilidad se convertían en fortaleza.

Dedicatoria especial  para una persona qué se quedó en el camino, sin embargo su apoyo en las buenas y en las malas nunca me faltó, y siempre estuvo a mi lado. Hasta donde estés *Mi Viejo,* Marcelino Alvarado Zavala, ejemplo de padre y amigo.

A la persona que prácticamente fue la responsable de que todo esto sucediera y un sueño se convirtiera en realidad, mi madre Ma. De Jesús García Jaramillo. Gracias por todo, pero todo el apoyo que me diste en este camino tan difícil para ambos. Eres ejemplo de mujer, madre y amiga, simplemente la mejor.

Para la persona que me acompaño siempre en mis desvelos, miedos y problemas. Esa persona que siempre me dijo que sí se puede y lo vas a lograr, la madre de mis retoños, mi esposa Angélica Acosta. Gracias por sacar  nuestros hijos adelante durante mi ausencia.

Para mis retoños Adalhy y Tadeo, por comprenderme en los momentos que necesitaron de mí y no pude atenderles. Por  su apoyo incondicional y tolerar mis regaños a consecuencia de mis ocupaciones académicas. Esto es por ustedes mis hijos.

Para mis hermanas Marcela y Ruby Alvarado, gracias por su apoyo a pesar de la enorme distancia que nos separa. Por servirme como ejemplo de mujeres trabajadoras, pero sobre todo ejemplo de mujeres de familia.

También para mis amigos a los que yo considero hermanos, por su apoyo en aquellas noches de trabajo y desvelos, por aguantar las veces que les falle y las veces que estuve ausente, para el abogado (Roberto), mi compadre (José), meño (Manuel), primo Day (David), Lacho (Horacio), Buú (Esaú) y Pulido (Luis)

Agradezco infinitamente a la empresa Pailería San Luis S.A. de C.V. por darme la oportunidad de realizar parte de este trabajo de investigación en sus instalaciones, al Ing. Jesús Santos Reina y Juvenal Montoya por sus atenciones. Principalmente a los paileros de esta empresa por brindarme la oportunidad de aprender de ellos y con ellos las bases del presente trabajo de investigación.

No podrían faltarme los autores intelectuales que formaron parte de mi formación académica y responsables de toda esta aventura. A los que con cariño llamo Dr. Chavira, Dra. Lilia, Dr. Flavio, Prof. Noé, Prof. Emiliano, Dr. Montejano, Prof. Sergio, Prof. Barrios, Profa. Clementina, Mtra. Miriam, Prof. Pantoja, Dra. Compéan, Prof. Neil, Prof. Angulo y Mtra. Zermeño.

Por otro lado, existen personas a lo largo de tu vida ya sea personal o académica que dejan huella y simplemente forman parte de ti. Gracias a la Dra. Rita Angulo Villanueva por todo su apoyo, experiencias compartidas y sus enseñanzas vividas dentro y fueras del aula de clases. Para el Prof. Alejandro Corpus Cordero por sus enseñanzas, experiencias y apoyo incondicional en momentos realmente complicados en mi vida. Para mi director de tesis, maestro y amigo Dr. Nehemías Moreno Martínez, gracias por llegar en el momento adecuado y ser parte fundamental en este trabajo de investigación. Por ser partícipe de mis experiencias personales, académicas y comprenderme en momentos de angustia, estrés y felicidad. Por ser fuente de inspiración académica, pero sobre todo por ser un buen amigo.

Para todos ustedes gracias...

*Marcelino Alvarado García*

# RESUMEN


El presente trabajo de investigación aborda uno de los conceptos más complejos en el campo de las matemáticas en el nivel básico, el teorema de Pitágoras. Esto porque el análisis realizado en nuestra investigación acerca del tratamiento que se le ha dado al teorema de Pitágoras en los libros de texto, la manera en que los profesores abordan en clase el teorema y las propuestas realizadas en algunos trabajos de investigación, muestran que siguen una estrategia de tipo operativa y presentan al teorema de Pitágoras como un objeto acabado mediante una definición y una fórmula.

Es importante mencionar que en el presente trabajo no pretende investigar una forma alternativa de abordar el teorema de Pitágoras en el aula, sino más bien, se analizan los mecanismos cognitivos que influyen para que el estudiante identifique la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo, por simplicidad "RP", señalada por el teorema de Pitágoras. Nos apoyamos en una postura socioepistemológica y se parte de la idea de que el contexto y las prácticas sociales que realiza cierta comunidad norman la construcción del conocimiento y que los saberes que ahí emergen son tan legítimos como cualquier otro, a saber, el conocimiento escolar, científico, entre otros.

En esta dirección, se decidió realizar un estudio en el contexto de la industria de la pailería en el que se analizaron las técnicas utilizadas en los diferentes tipos de construcción de estructura metálicas, y concretamente, usamos y adaptamos al aula la práctica de construcción de tolvas mediante el diseño de una situación variacional. La realización de esta práctica en el aula, permitió a los estudiantes la identificación y resignificación de la RP mediante la utilización de estrategias variacionales. El análisis de los resultados obtenidos mediante la implementación de la situación variacional permitió identificar una unidad de análisis la cual fue relevante para que los estudiantes del nivel básico secundaria resignificaran la RP.

# INTRODUCCIÓN

La matemática escolar por mucho tiempo ha sido considerada como un saber que ostenta mucha complejidad, no sólo por los distintos procesos cognitivos que exige la actividad matemática, sino que también en la manera en que dicho saber incide en otras áreas como la física, la química o la biología, lo cual causa temor e incertidumbre en la mayoría de los estudiantes de los distintos niveles educativos. Antes de introducir directamente al tema de la investigación se considera pertinente describir el enfoque sobre el cual se apoya el presente trabajo.

La investigación que se describe a continuación fue desarrollada a la luz de una teoría proveniente de la Matemática Educativa, la Socioepistemología. Según esta perspectiva, es posible diferenciar “tres tipos de matemáticas”: *la matemática disciplinar*, *la matemática escolar* y *la matemática educativa*. La primera es aquella que posee el saber erudito de axiomas, teoremas corolarios, demostraciones, hipótesis, etc. La segunda es la matemática que se trabaja en el ámbito escolar, aquella que ha sido derivada de la matemática disciplinar, y por consecuencia ha sido adaptada para que sea amena a los estudiantes, mientras que la matemática educativa, es entendida como una disciplina que estudia fenómenos didácticos ligados al saber matemático, considerando lo didáctico no solo en el ámbito escolar. Es en ésta última disciplina en la que se enfoca el presente trabajo de investigación, de manera que no se intenta justificar ni demostrar teoremas, sino más bien se busca información adecuada que permita reorganizar las prácticas docentes y del alumnado en la clase de matemáticas.

Por otro lado, el presente trabajo de investigación surge de la necesidad de abordar la problemática escolar que plantea el aprendizaje del teorema de Pitágoras en el nivel educativo básico. Es importante mencionar que a lo largo del trabajo no nos referimos al objeto de la matemática escolar teorema de Pitágoras, el cual se presenta a través de la expresión $a^2 + b^2 = c^2$en el aula de clases y en los libros de texto, más bien se analizan los mecanismos que influyen para que el estudiante identifique y comprenda la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo, a la cual se ha convenido llamar Relación Pitagórica (RP a partir de ahora), que prácticamente es la relación a la que se refiere el teorema.

Como se presenta más adelante, esta problemática proveniente en gran medida del tratamiento que realizan los libros de texto de matemáticas donde se presenta al teorema de Pitágoras como un objeto matemático acabado mediante una definición y una fórmula. Los docentes muchas veces quizás por desconocimiento y apoyándose en la temática de los libros, realizan este mismo tratamiento en el aula, lo que perfila hacia una comprensión del teorema de Pitágoras de una manera memorística u operativa carente de utilidad para los estudiantes. Por ello, se considera importante la realización de un estudio que permita comprender los mecanismos cognitivos y los contextos donde se llevan a cabo dichos mecanismos involucrados en la comprensión de la RP.

Partiendo de la idea de que las prácticas que realizan las comunidades o grupos de personas influyen directamente en la manera en que éstos construyen y comunican su propio conocimiento, se analiza el caso de la industria pailera, poniendo especial atención en la técnica utilizada para la construcción de diferentes tipos de tolvas, y posteriormente, se realiza una adaptación intencionada de dicha práctica al ámbito escolar con el objeto de que los estudiantes logren una resignificación de la RP.

Para ello se realizó un estudio de las prácticas que se realizan en el área de producción de una empresa de Pailería de San Luis Potosí, debido a que los productos o estructuras metálicas que se elaboran en dicha área tienen un impacto en nuestra sociedad ya sea directa o indirectamente. En dicho contexto, se observó que los conceptos matemáticos que ahí se manejan son diversos: Teorema de Pitágoras, teorema de tales, perpendicularidad, paralelismo, radio, plano cartesiano, ángulos, perímetro, diámetro, π, por mencionar algunos. Estos conceptos son manejados por los trabajadores paileros de manera implícita a través del empleo de artefactos rudimentarios con mucha precisión y naturalidad. Un aspecto importante de dicha comunidad es que los trabajadores paileros, a lo más, cuentan con estudios de primaria, sin embargo, son capaces de construir estructuras metálicas de gran complejidad.

El siguiente trabajo se encuentra organizado en diez capítulos, los cuales brindan una perspectiva más amplia de la investigación. En el capítulo uno se describe de manera general el origen de los primeros trabajos con metales y el origen de la industria pailera en México. En el capítulo dos se describen algunas prácticas que se realizan en la industria de la pailería, resaltando las técnicas de construcción y conceptos matemáticos que ahí se utilizan. En el capítulo tres se mencionan diferentes trabajos de investigación que han abordado el teorema de Pitágoras desde otros enfoques y perspectivas. En el capítulo cuatro se menciona la problemática, el objeto de estudio, las hipótesis, preguntas y objetivos de investigación que guiaron el trabajo. En el capítulo cinco se mencionan los constructos teóricos de la Socioepistemología que guían y justifican el trabajo de investigación. En el capítulo seis se menciona la metodología y el diseño de investigación que se utilizaron en el desarrollo de la investigación. En el capítulo siete de describe el desarrollo de la situación variacional donde se mencionan los tiempos en que se llevó a cabo, los instrumentos que se utilizaron y a los estudiantes que se aplicó dicha situación. En el capítulo ocho y nueve se mencionan los resultados y el análisis que son derivados de la situación variacional con la mirada de la Socioepistemología respectivamente. Y por último, en el capítulo diez se mencionan las conclusiones y reflexiones a las que se llegaron con el implemento y desarrollo a lo largo de todo el trabajo de investigación.

# LA PAILERÍA

## CAPÍTULO I

## Capítulo 1

## PAILERÍA

### Introducción

En este capítulo se presentan diferentes aspectos del oficio de la pailería partiendo de la definición, el origen y la evolución de la industria pailera en México. También se describe la importancia de la pailería en nuestra sociedad, se describen algunas prácticas que realizan los paileros en la construcción de estructuras metálicas, se describe el nivel de estudios, conocimientos y aspectos personales del obrero pailero, los cuales han permitido la cohesión de las diversas prácticas que se llevan a cabo en la industria pailera, convirtiéndola en una comunidad de prácticas.

### 1.1 ¿Qué es la pailería?

La palabra pailería proviene del nombre de un recipiente llamado "paila", del latín *patella* "Padilla", cuyo significado según la Real Academia Española es "Vasija grande de metal redonda y poco profunda (Real Academia Española, 2001)". La pailería es una actividad que se lleva acabo para la fabricación de estructuras metálicas que demandan diferentes sectores industriales. Esta técnica consiste en el ensamble de piezas metálicas a partir de diferentes cortes o dobleces realizados en láminas o placas que tienen al hierro como principal componente, sin embargo, para proyectos especiales se pueden utilizar otro tipo de metales.

La actividad de la pailería se remonta hacia el año 3000 a.c. según algunos objetos encontrados por arqueólogos en Egipto, si bien, varios siglos atrás, las personas ya trabajaban con diferentes metales que se encontraban en estado puro como el cobre, fue en esta época cuando surgió uno de los oficios que daría origen muchos años después a lo que hoy se conoce como pailería, "La forja". Esta técnica consistía en el modelado del hierro a partir de golpes cuando éste era maleable a través del calor aplicado. Los principales trabajos realizados en esta época fueron armas, herramientas, vasijas, adornos domésticos y religiosos. Poco después cuando se descubrieron algunas aleaciones como la del cobre-estaño (bronce), así como algunos metales preciosos, produjeron coronas, collares y algunos otros objetos de uso personal (ACERTEC, 2017).

## 1.2 El origen del trabajo con metales en el México antiguo

En el México antiguo, alrededor de los años 200 d.C. y 900 d.C. abarcando los periodos clásico y postclásico, diversas culturas como los mayas, zapotecas, toltecas, mixtecas, etc. se encontraban en una etapa de estabilidad social y algunas se encontraban en campañas de expansión de su poderío y requerían del desarrollo de objetos con propósitos religiosos y para la vida cotidiana. Es desde estos tiempos que datan los primeros vestigios de objetos de metal forjados a mano encontrados hasta nuestros días. El metal más utilizado en esta época fue también el cobre, ya que se podía encontrar en la superficie muy fácilmente, se han encontrado objetos de oro, plata y algunas aleaciones aunque estos en menor cantidad (Cecytebc, 2017).

La forma de exploración para la búsqueda del metal en aquella época era muy sencilla y sólo se buscaban los metales en las vetas que se encontraban sobre la superficie de las montañas. La mayoría de los objetos de metal encontrados eran ornamentales como collares, pulseras y coronas, puesto que las herramientas utilizadas en aquella época eran la piedra, huesos y madera (UNAM, 2017). El perfeccionamiento de los trabajos con metales en el México antiguo, se cree que surgió a partir del contacto con otras culturas de occidente como las de Chipícuaro, Teuchitlán y Guachimontones, así como con culturas de Colombia y Ecuador.

## 1.3 Evolución del trabajo con los metales

Con el paso del tiempo, el trabajo con metales se fue perfeccionando y no fue hasta en los años de 1760 y 1850 en Inglaterra, con el impulso y a la par de la revolución industrial, donde la formalidad de esta práctica cobra sentido, porque es donde se generaron distintos aparatos y maquinaria para satisfacer las necesidades industriales, de comunicación, de transporte y de almacenamiento. Sin embargo, la mayoría de las piezas que demandaron una gran cantidad de hierro y otros metales en esta época fueron forjadas a mano (Claudio, 2017).

### 1.4 La industria metálica en México

México, como parte del desarrollo que se llevaba a cabo en otros países, también se vio beneficiado hacia los años de 1940 y 1950 con un crecimiento en los sectores de transformación, construcción y agrícolas. Estos a su vez demandaban a la industria metálica una gran cantidad de productos como equipos para la industria azucarera, extracción del petróleo, componentes para equipos metalúrgicos, estructuras, tuberías de gran diámetro o de alta precisión y recipientes de alta y baja presión. Las empresas dedicadas a la industria metálica (pailería) se fortalecieron y crecieron rápidamente de tal manera que para el año de 1987 en México existían más de 20 empresas establecidas en todo el país, las cuales cubrían la demanda de producción anual de 155,500 toneladas aproximadamente (Geografía, 2017). Esto dio lugar a la formación de empresas dedicadas a la construcción de estructuras metálicas. En relación con la empresa pailera donde se recabaron los datos de la presente investigación, como parte de la demanda que se generó en el centro geográfico de la república mexicana, en 1986 se creó en San Luis Potosí la empresa “Pailería San Luis S.A. de C.V.”, especializada en la fabricación de estructuras metálicas, pailería en general y procesos (Bernal, 2017). Desde su creación y hasta la actualidad, la estructura de la compañía permite manejar todos los proyectos de manera integral operando bajo la siguiente organización:

- **Dirección general,** la cual toma todas las dediciones de importancia y es la que se encarga del control total de la empresa,
- **El área comercial** se encarga de la relación con los clientes así como el abastecimiento de los productos necesarios para la realización de proyectos,
- **El área administrativa** es la encargada de manejar los recursos humanos existentes, procesamiento de documentos y asuntos generales.

Las cuales operan en la misma área de trabajo (ver 2 en la Figura 1.1) lo que permite una relación directa con los proveedores y personal externo a la planta.

- **El área de producción** es la que se encarga de convertir los insumos primarios en proyectos especiales. Esta a su vez se encuentra dividida en 2 sub-áreas conformadas por los ***gerentes de producción*** los cuales son los encargados de los procesos para lograr la eficiencia y calidad de un producto y ***los paileros*** los cuales son los responsables de realizar todas las labores de medida, corte y ensamblaje hasta el final del ciclo para la generación del producto.

El área de trabajo (ver 3 y 4 en la Figura 1.1) es compartida entre gerentes de producción y paileros debido a la relación que existen entre ambas áreas para la elaboración de las estructuras metálicas.

En la Figura 1.1 se observa la distribución espacial del personal en la empresa por área de trabajo. En particular, el área de trabajo del pailero (ver 4 en la Figura 1.1) y su contigüidad a la gerencia de producción (ver 3 en la Figura 1.1), muestra que la gerencia se ocupa de la planificación y diseño de las estructuras, mientras que el área de la pailería se encarga de la ejecución y desarrollo de las estructuras. Lo que conduce a una relación entre áreas muy directa de modo que los ingenieros y los paileros deben de concebir el mismo lenguaje de comunicación que permita el intercambio de ideas. Esto se ve reflejado en la conformación de una comunidad con lenguaje, técnicas y procedimientos propios, que a su vez es distante de las otras áreas de trabajo tanto en lo espacial como en las vías de comunicación.

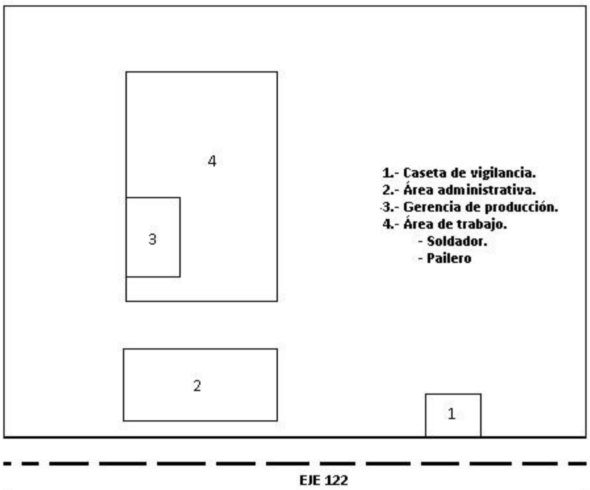



Figura 1.1 Esquema que muestra la distribución interna del personal.

Por otra parte, en relación con los productos que se elaboran, uno de los proyectos especiales que ha realizado la empresa de Pailería San Luis ha sido la estructura de metal del estadio de futbol de las chivas rayadas del Guadalajara el Omnilife, Figura 1.2, en Jalisco México,

Figura 1.2 Estadio Omnilife.

También participaron en la construcción de las estructuras que brindan soporte al gran telescopio milimétrico en la Sierra Negra, Figura 1.3, en el estado de Puebla México,


Figura 1.3 Telescopio Milimétrico.

La empresa Pailería San Luis también participó en la fabricación y montaje de las columnas y la estructura poliédrica del techo del Museo del Acero, Figura 1.4 en Monterrey Nuevo León, México.

Figura1.4 Estructura metálica al interior del Museo del Acero.

También han participado en la construcción de otras estructuras metálicas a solicitud expresa de otros países como Estados Unidos, Argentina, Panamá, Arabia Saudita, entre otros.

### 1.5 La pailería y su importancia en la sociedad

Como parte del crecimiento y la evolución de la sociedad, se ha requerido cada vez más de los productos que elabora la industria de la pailería, prácticamente la sociedad depende de las estructuras metálicas que ahí se trabajan. Las estructuras elaboradas a partir de dichos materiales permiten satisfacer un sin fin de necesidades colectivas e individuales. Los grandes rascacielos donde trabajan miles de personas, los puentes de metal que comunican ciudades con otras, las máquinas que producen millones de vehículos para necesidades específicas y estructuras para fines diversos, (alimentos, electricidad, cementeras, hidroeléctricos, petroquímicos, gas, termoeléctricos, naval, construcción, etc.) son estructuras que han sido desarrolladas en el seno de la industria pailera, teniendo así un impacto significativo en nuestras vidas. El desarrollo y perfeccionamiento de las técnicas utilizadas en este campo, han permitido que las tareas que realizamos diariamente sean más fáciles de efectuar como el simple hecho de transportarnos de un lugar a otro ya sea en automóvil, autobús, avión o tren. Hemos llegado a un punto en donde la industria pailera se ha infiltrado en todos los aspectos en los que estamos involucrados como sociedad.

### 1.6 Los paileros y algunas prácticas que desarrollan

Una de las áreas más importantes dentro de la producción en pailería es la que corresponde a los paileros, aunque de manera jerárquica ocupan el último nivel por su área de trabajo, son pieza clave para el funcionamiento de cualquier planta pailera.

En pailería, los paileros son aquellos obreros que se encargan de realizar los trazos y cortes en placas de metal para después ser ensambladas con otras piezas y de esta forma generar algún producto.

Las herramientas que utilizan los paileros para realizar los trazos son el compás, Figura 1.5 (a), del cual algunos paileros señalan que *"Sirve para mover distancias de un lugar a otro y para mantener una distancia alrededor de un punto"* regla, Figura 1.5 (b) "*Sirve para trazar líneas derechitas*" y el ángulo de centro, Figura 1.5 (c) *"Sirve para verificar que una línea está a escuadra con respecto a un punto de la circunferencia"*, también utilizan flexómetro y lápiz de cera.

(a) (b) (c)

Figura 1.5 Herramientas compás (a), regla (b) y ángulo (c).

Por otro lado, en la industria pailera, la población de paileros se encuentra dividida. Concretamente, en la empresa donde se realizó el estudio, la población se divide en tres áreas específicas dependiendo su especialización: corte, soldadura y ensamble. No obstante, un pailero aunque se desempeñe en una sola área debe saber realizar las tres tareas. Como se observa en la Figura 1.1, su área de trabajo es verdaderamente amplia porque se requiere de un espacio adecuado para fabricar estructuras de enormes dimensiones.

Los paileros no tienen un nivel de estudio superior al de secundaria e incluso no es un requisito el tener títulos técnicos o universitarios por parte de los empleadores para ejercer este oficio, la mayoría de los paileros no tienen un estudio básico y pueden desempeñar este trabajo sin ningún problema. Sin embargo, se requieren de otras habilidades personales y físicas que facilitan el desempeño en esta área.

Una planta de pailería puede llegar a ocupar de 5 a 40 paileros dependiendo la dimensión de la misma, en esta planta se cuenta actualmente con 19 paileros para satisfacer una producción anual de más de 10 000 toneladas de acero. Existen algunas características esenciales que fortalecen esta área de trabajo; por ejemplo, persiguen un objetivo común para el cual tienen que trabajar de manera grupal y escalonada para poder crear algún objeto, se relacionan entre sí, mientras unos realizan los trazos y cortes, otros están revisando y ensamblando las piezas además de compartir responsabilidad.

Los paileros disponen de los medios materiales propios de este sector que hace sentir a cada individuo como de la comunidad de paileros. La comunicación juega un papel importante en esta área ya que es constante el flujo de información entre paileros para transferir información relacionada al trabajo o para dialogar algún punto en común. Otras plantas de pailería donde se tiene la presencia de esta área también coinciden en que la comunicación juega un papel importante, tal es el caso del estudio realizado por la Universidad Autónoma de Aguascalientes como *"Propuesta de un plan estratégico para la empresa PAILERÍA MÉXICO"* (Esquivel, 2010), donde evidencia la importancia de la comunicación en este sector. Estas y otras características tal como el compromiso y confianza ayudan a que exista una cohesión muy fuerte en este sector y como consecuencia que exista un éxito en los trabajos generados por la empresa.

En el capítulo siguiente se describen algunas prácticas que se realizan en esta industria así como la relación directa que tiene con la matemática.

# PAILERÍA Y LAS MATEMÁTICAS

## CAPÍTULO II

## Capítulo 2

## PAILERÍA Y LAS MATEMÁTICAS

### Introducción

En este capítulo se describen de manera general algunas prácticas que se realizan en la industria de pailería con objeto de ilustrar *grosso modo* el quehacer de un pailero y la relación que ésta guarda con las matemáticas. En la primera parte se describe una práctica donde el pailero emplea de manera implícita (pues no sabe que lo utiliza) la noción de ejes, -plano cartesiano, curvas y radio de curvatura, así como sus formas de construcción en una pieza de pailería, el Horomill 3800. Posteriormente se describe una práctica que permite la construcción de una tolva muy común en pailería, también se presentan los diferentes conceptos matemáticos que están implicados en la elaboración de la misma, enfatizando la importancia de un proceso, al que los paileros llaman "filtrado", para obtener longitudes reales de la tolva. También se muestra un catálogo de prismas, las cuales son las formas en las que se puede construir una tolva por medio del proceso de filtrado. Por último, se resaltan algunos conceptos matemáticos encontrados en estas prácticas de pailería.

### 2.1 Plano cartesiano y radio de curvatura en la construcción de Horomill 3800

La descripción de esta práctica se apoya en la observación del trabajo que realiza un obrero R, pailero de la empresa *Pailería San Luis.* Los diferentes conceptos matemáticos son utilizados de manera implícita por los paileros para realizar trazos y cortes de manera natural. Durante la observación, el pailero se encontraba elaborando una pieza de repuesto para una maquina utilizada en la industria cementera a la que llaman *Horomill 3800,* Figura 2.1.

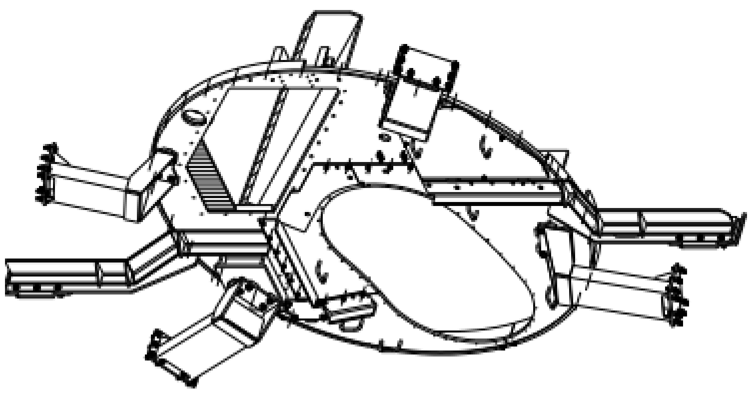
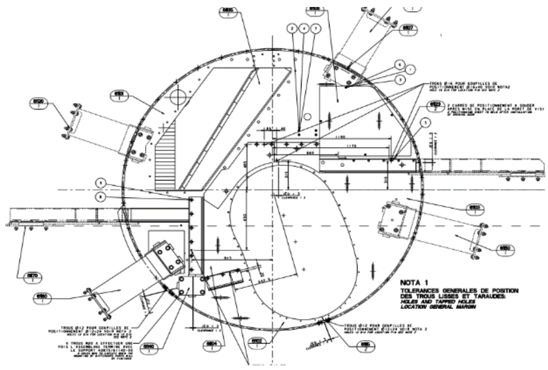
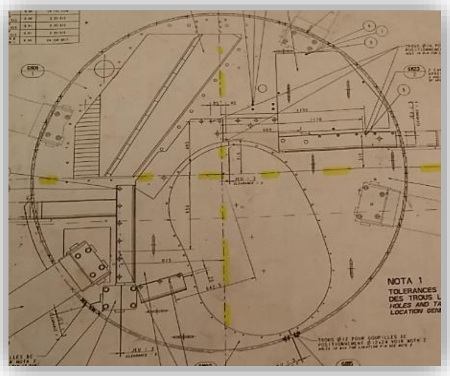


Figura 2.1 Horomill 3800, pieza de repuesto para una máquina cementera.

Para la elaboración de esta pieza, el ingeniero de producción le entrega al pailero R, el plano de la pieza a ser elaborada, Figura 2.2 (a).




(a)




(b)

Figura 2.2 (a) Plano original (b) Plano con el trazo de los ejes por el pailero (en color amarillo).

El plano contiene las medidas exactas que debe tener la pieza en construcción. El pailero R, analiza el plano visualizando cada uno de los puntos de la pieza y posteriormente remarca los ejes en el plano, Figura 2.2 (b), el pailero R, señala lo siguiente: *"los ejes sirven para ubicarse cuando se realizan los trazos en las placas de acero"*.

Antes de realizar el trazado de los ejes en la placa de acero, primeramente se realiza el corte en forma de circunferencia en la placa de acero sobre la que se desarrollara el resto del trabajo. Al tratarse de una pieza en forma circular es relativamente sencillo para los paileros realizar este tipo de trazo y corte. Para realizar el trazo en forma de circunferencia sobre la placa de acero rectangular, primeramente se coloca un punto llamado **O,** el cual servirá de centro y de guía para el resto del trabajo en esta pieza. Tomando la medida - con ayuda del flexómetro- con el compás (radio) que se indica en el plano y haciendo centro en **O,** se traza una circunferencia a la que llamaremos base la cual una vez trazada se manda al siguiente departamento para que sea recortada y nuevamente regresar al departamento de trazo para seguir con las siguientes delineaciones. Una vez que se tiene la pieza ya recortada en forma de circunferencia, Figura 2.3, se realiza el trazado de los ejes.

Figura 2.3 Circunferencia metálica.

Para realizar el trazado de los ejes, el pailero R, mide por la parte externa la base de metal en forma circular y la distancia resultante la divide entre 4.

$$\frac{Distancia\ de\ la\ circunferencia}{4} = l$$

Ahora sobre la parte externa de la circunferencia marca dos puntos consecutivos con una distancia $l$, a los cuales llamaremos ***A*** y ***B*** Figura 2.4 (a),

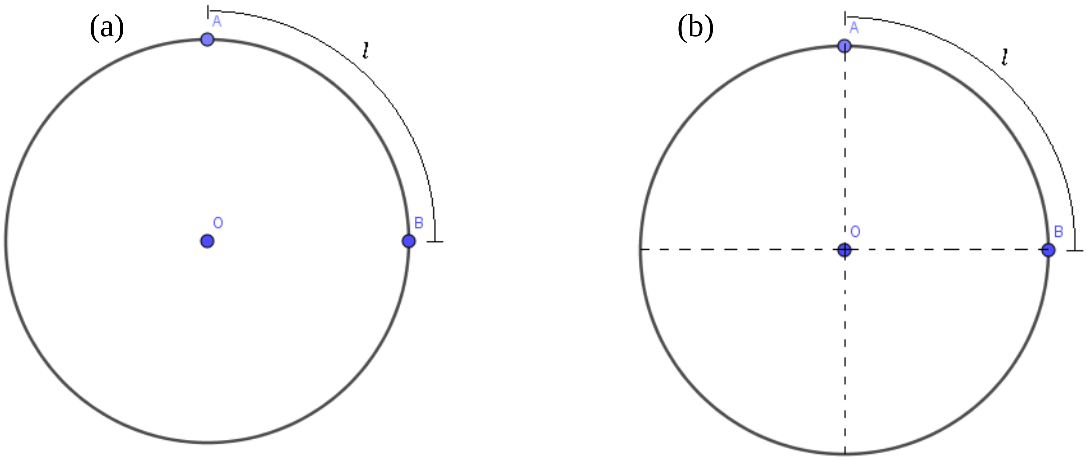
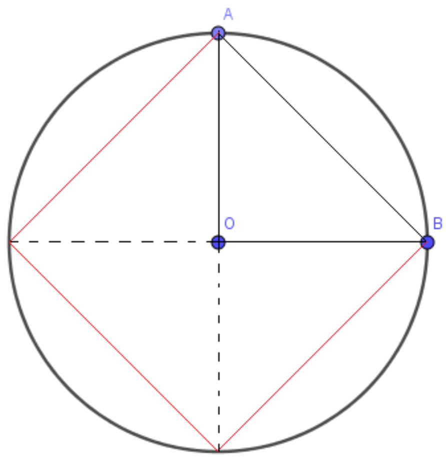



Figura 2.4 (a) Puntos ***A*** y ***B*** (b) Trazo de los ejes.

Colocándose en ***A*** (ver Figura 2.4 (a)) traza una línea recta que pase por el punto ***O*** y que toque el otro extremo de la circunferencia, ahora colocándose ***B*** traza otra línea recta que pase por ***O*** y que toque el otro extremo de la circunferencia y de este modo traza los ejes, Figura 2.4 (b) (Plano cartesiano), que le servirán de guía para los trazos restantes.

Para verificar que los ejes son perpendiculares existen varios métodos por ejemplo: el pailero R, lo verifica con el flexómetro mide por la parte externa de la base circular cada uno de los cuadrantes de un eje a otro eje próximo y refiere que *“La medida de cada una de estas partes debe ser la misma; si es así, eso quiere decir que los ejes están a escuadra”,* es considerado el método más exacto por los paileros. Otra forma de verificar que los ejes están a escuadra es multiplicando al diámetro de la circunferencia por π (Perímetro), en pailería π lo toman como 3.1416, si al realizar esta operación el resultado es igual a la suma total de los cuadrantes medidos de forma externa de la base, entonces están a escuadra. Otro método sería con la constante 1.4142, si tenemos un triángulo rectángulo isósceles formado con los ejes de la circunferencia; por ejemplo, el triángulo rectángulo AOB Figura 2.5.




$$AO\ x\ 1.4142 = AB$$
$$BO\ x\ 1.4142 = AB$$

Figura 2.5 Triángulo rectángulo isósceles AOB.

Simplemente bastará con multiplicar la distancia de uno de sus lados (radio) por esta constante, esto nos dará el valor de la hipotenusa $\boldsymbol{AB}$, la cual deberá medir exactamente lo mismo que las tres hipotenusas restantes esto nuevamente corroboraría que los ejes están a escuadra (El término escuadra en pailería se puede interpretar como el concepto de perpendicularidad).

Una vez que se cuenta con los ejes marcados en la circunferencia se inicia con el trazado de las figuras restantes y para ello se procede de la siguiente manera. Como no puede trabajar todas las secciones de la circunferencia al mismo tiempo el pailero R, divide la circunferencia en secciones 1, 2, 3 y 4, lo que prácticamente en la escuela hemos visto como cuadrantes. Una vez que se ha seleccionado el cuadrante con el que se desea trabajar, el trazado y localización de puntos se realiza usando de manera implícita las coordenadas ***x, y***. La diferencia es que cuando ellos quieren localizar un punto en vez de buscar ***x*** y **y**, miden las distancias en cada eje de manera vertical y horizontal según les indique el plano.

Por ejemplo, un concepto que llama la atención es el de radio de curvatura y puede ser visualizado en el cuadrante III, Figura 2.6, existen otros radios de curvatura pero la forma de proceder es muy similar.

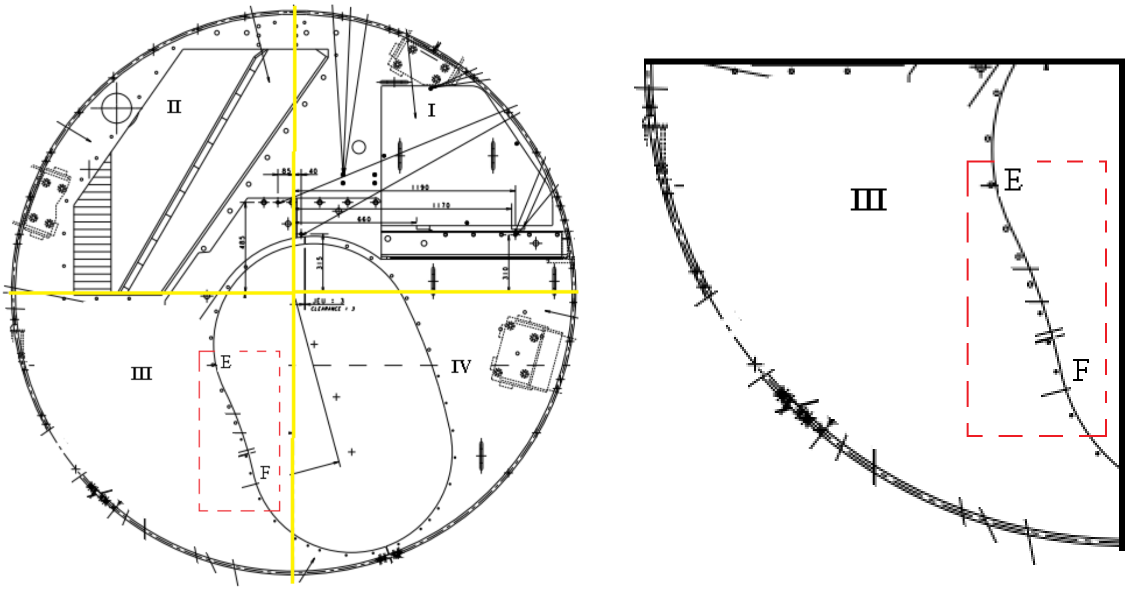



Figura 2.6 Cuadrante III, radio de curvatura del plano Horomill 3800.

Para una mayor comprensión de cómo se realizó este trazo en la placa de acero, se han omitido algunos datos del plano para una visualización más clara y se han agregado otros puntos de referencia que sirven de apoyo en la explicación.

Primeramente el pailero R, identifica que la sección de línea curveada ***EF*** (ver Figura 2.6), es parte de una circunferencia la cual debe tener un centro u origen. Apoyándose directamente en el plano y tomando las medidas que ahí se le indican mide de manera vertical y horizontal sobre los ejes para localizar ese punto de origen. Una vez que localiza ese punto, al cual llamaremos ***n***, se da cuenta que ese punto está fuera de la placa de acero con la que se está trabajando, por lo que se auxilia de otras placas de acero externas a la pieza para poder trazarlo.

Teniendo el punto ***n*** trazado de forma correcta, ahora se identifican los puntos ***E*** y ***F***, los cuales serán por donde se pasara la circunferencia y esta sección comprendida entre ambos puntos será el radio de curvatura que se está buscando, ver la Figura 2.7.

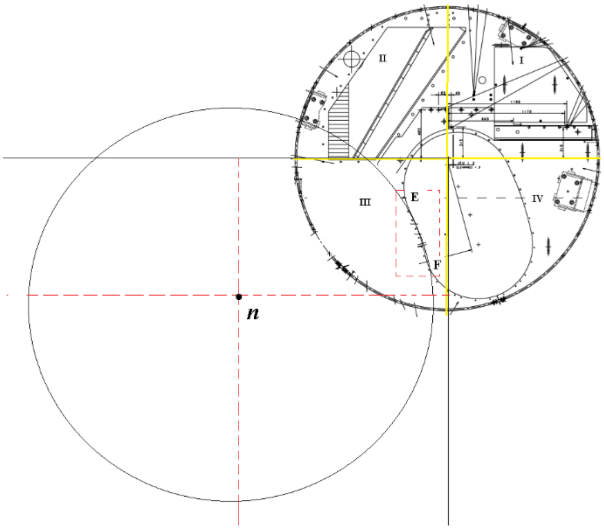



Figura 2.7 Radio de curvatura entre ***E*** y ***F*.**

De manera similar el pailero R realiza la misma operación con cada uno de los componentes de esta pieza, el punto de referencia son los ejes, lo que se traduciría al ámbito escolar como el plano cartesiano. El proceso de construcción de esta pieza se siguió de principio a fin, por lo que se apreció la manera en que los paileros operan y utilizan diferentes conceptos matemáticos en este y otras piezas de metal. Las fotografías de la estructura metálica terminada se muestran en el *Anexo A*.

## 2.2 El Teorema de Pitágoras en la construcción de plantillas para tolvas

La construcción de tolvas poliédricas es una práctica muy común en pailería debido a la utilización que estas tienen en diferentes sectores industriales. Las podemos encontrar cuadradas, circulares, triangulares, rectangulares o poliédricas. Sin embargo, existe algo en común entre ellas y es la técnica que se utiliza para su elaboración.

En particular, para la realización del presente trabajo se observó y se analizó la construcción de una tolva que tiene la forma de un tronco de pirámide cuadrangular donde nuevamente se pudo constatar la relación que guardan las prácticas que se llevan a cabo en la comunidad de paileros con las matemáticas que se presentan en el aula. Los datos descritos a continuación derivan de la observación directa de la práctica que realiza un pailero B, en la construcción de la tolva.

La elaboración inicia con el plano, ver la Figura 2.8 (a), el cual muestra algunas longitudes reales de la tolva (por ejemplo, la longitud de los segmentos HE, HG, CB en la Figura 2.8 (a), entre otros) y otras longitudes que corresponden a longitudes virtuales de segmentos (por ejemplo, la longitud de los segmentos DH, NH, MG en la Figura 2.8 (a), entre otros) que son observadas desde la perspectiva de un observador localizado en el punto “$O$”.

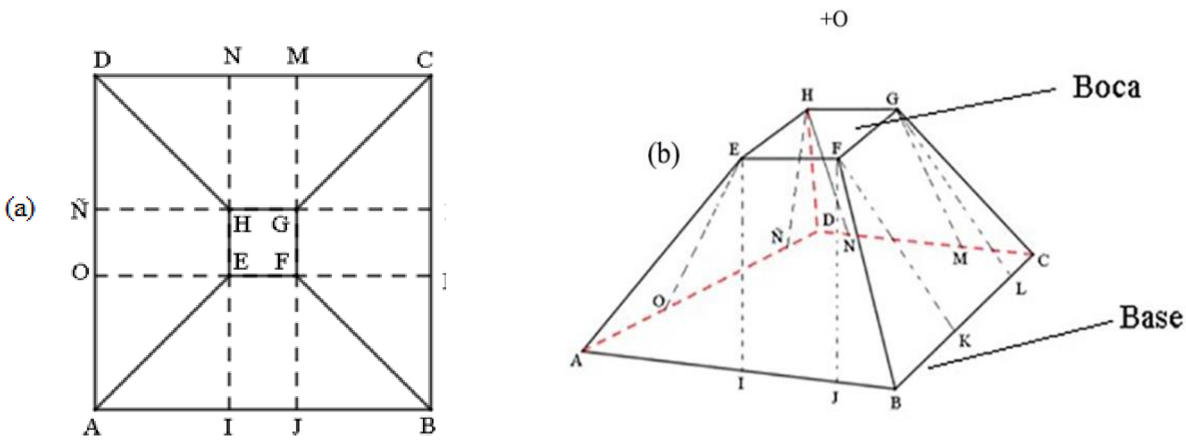



Figura 2.8 (a) Plano de la tolva y (b) Tolva.

Antes de que las longitudes se plasmen en las placas de acero, primeramente se obtiene un prototipo a escala de la tolva, debido a que en el plano existen algunas longitudes virtuales, lo que implica el cálculo de la longitud de real de dichos segmentos virtuales a través de un proceso llamado filtrado.

El filtrado en pailería se concibe como aquel el proceso que permite obtener longitudes reales a partir de longitudes virtuales en el plano. Se trata de un proceso que se apoya en la visualización de las aristas de la tolva que permite pasar de una figura plana (la proyección de la tolva sobre un plano) a una figura geométrica tridimensional (el prototipo de la tolva). Entendiéndose por visualización en el sentido de Cantoral y

Montiel (2003), como la habilidad que permite representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje de un sujeto.

Para la elaboración del prototipo a escala se requiere de una plantilla, Figura 2.9, la cual el pailero obtiene de manera directa del plano y esta a su vez sirve para la construcción de la tolva.

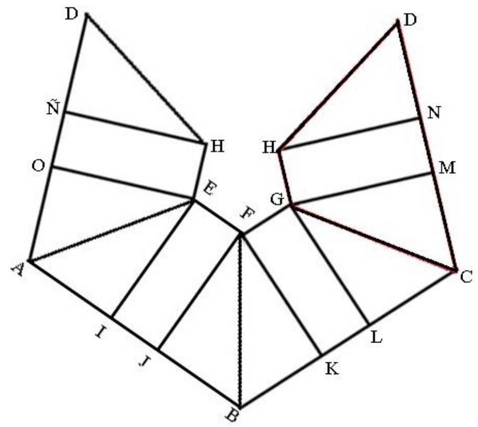



Figura 2.9 Plantilla de la tolva.

Con la ayuda del plano, Figura 2.8 (a), el primer paso que realiza pailero es la identificación de aquellas longitudes que se plasmarán directamente en la plantilla, las cuales llamaremos *longitudes reales*. Para ello existe un proceso de visualización que permite identificarlas, bastará con analizar y reflexionar que el plano en realidad es la perspectiva de la tolva que tiene un observador localizado en el punto +O, ver la Figura 2.8 (b).

Una vez que el pailero realiza este tipo de distinción identifica las *longitudes reales* en el plano, Figura 2.8 (a), las cuales están determinadas por las rectas AB, BC, CD y DA, mismas que forman la base de la tolva y también las rectas EF, FG, GH y HE, las cuales forman la boca de la tolva. De este mismo modo identifica las longitudes virtuales (las que no son reales), las cuales son las aristas de la tolva, debido a que desde la vista aérea de la tolva invertida, Figura 2.8 (b), solo identificamos las aristas pero no la longitud que estas tienen. Por lo tan tolas longitudes *virtuales* o *no reales* estarán determinadas por las rectas BF, CG, DH y AE, las cuales determinan la altura y el grado de inclinación de la tolva, así como las rectas IE, JF, KF, LG, MG, NH, ÑH y OE, las cuales se encuentran sobre las caras de la tolva, Figura 2.8 b).

Estas longitudes *no reales* como se comentó anteriormente, no pueden ser aplicadas directamente para la construcción de la plantilla, por este motivo las líneas son filtradas y de este modo obtener la longitud real. Notemos que las longitudes de las rectas BF = CG = DH = AE, por lo que no es necesario filtrar todas las líneas, bastará con filtrar una y esta longitud utilizarla en el trazo correspondiente. Del mismo modo las longitudes de las rectas JF = IE = KF = LG = MG = NH = ÑH = OE, por lo que nuevamente es necesario filtrar solamente una de ellas y utilizarla según sea el caso.

El filtrado se realiza de la siguiente manera, el pailero primeramente traza una escuadra que servirá como plano, Figura 2.10, en la parte vertical se marca la altura que tendrá la tolva y en la parte horizontal se pondrá la medida de la distancia que se desea filtrar. La distancia $\mathbb{R}$ que resulta de unir los extremos de la altura y la distancia que se desea filtrar, es la distancia real que será utilizada en el trazo de la plantilla.

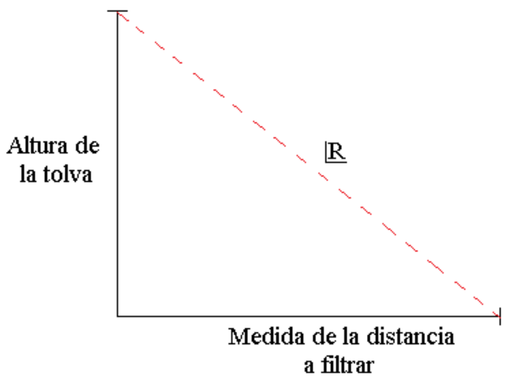



Figura 2.10 Plano de filtrado.

En esta parte es donde los paileros utilizan de manera implícita el Teorema de Pitágoras pero con el uso de regla y compás, recordemos que en la escuela el teorema señala que $a^2 + b^2 = c^2$ y los problemas por lo general nos piden calcular *c*, haciendo una analogía con el filtrado de líneas tomemos a la *altura de la tolva* = ***a*** y la *medida de la distancia a filtrar* = ***b***, entonces lo que los p8aileros están buscando es ***c*,** lo que en el ámbito escolar conocemos como hipotenusa.

Para la elaboración de la plantilla se filtraron las medidas de las rectas BF y JF del plano, Figura 2.8 (a), considerando que la altura es ***n*,** se traza la escuadra con la altura correspondiente a cada una de las rectas.

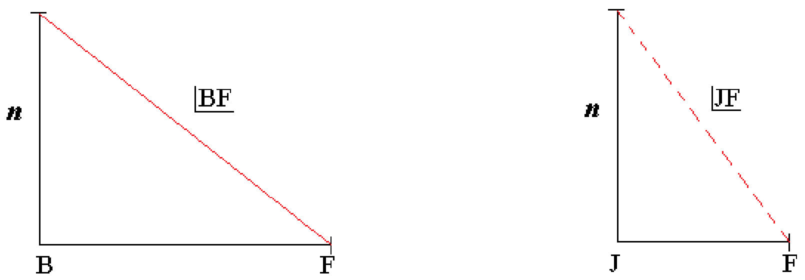
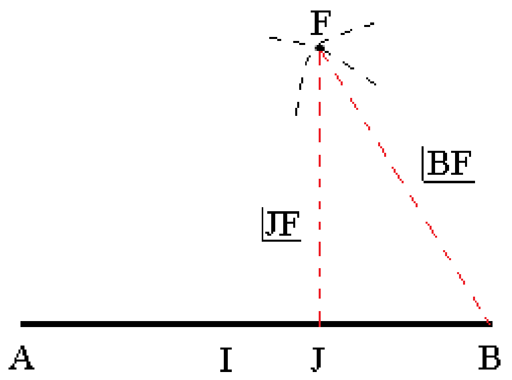
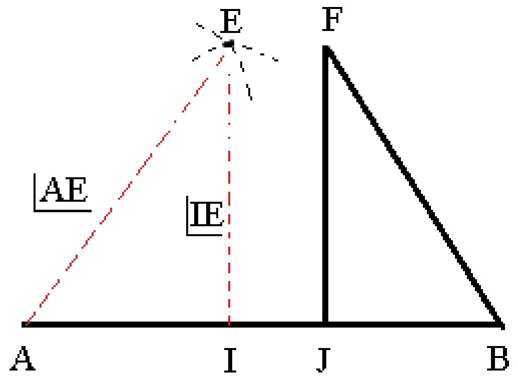



Figura 2.11 Filtrado de las rectas BF y JF.

Una vez que se realiza el filtrado de líneas, Figura 2.11, y se obtienen las medidas reales que tendrá la plantilla se realiza el trazado.

| Paso: *Instrucción* | Imagen |
|---|---|
| Con la ayuda de regla y compás se empieza por trazar la recta AB del plano Figura 2.9 a), esta recta se toma directamente con el compás y se plasma en plantilla. |   |
| Posteriormente se localizan los puntos I y J con las medidas correspondientes tomadas con el compás. |   |

| | |
|---|---|
| Ahora con la ayuda de las rectas BF y JF se localiza el punto F. |  |
| Del mismo modo se procede y se encuentra el punto E, pero en este caso las rectas serían IE y AE, que como vimos anteriormente son iguales JF y BF respectivamente. |  |

Notemos que hasta este momento el pailero ha formado solo una cara de la tolva, Figura 2.12 - 1, por lo que para formar las otras tres caras bastó con realizar el mismo procedimiento y de este modo concluyó con el trazado de la plantilla.

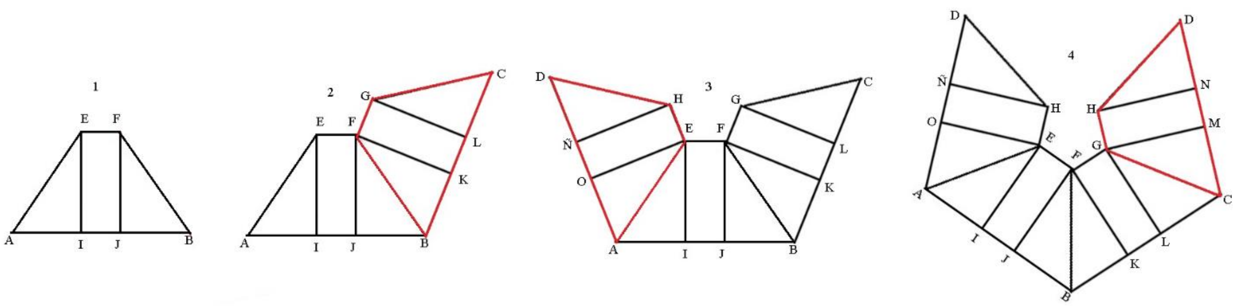



Figura 2.12 Construcción de las caras de la tolva.

Una vez que se tiene la plantilla se recorta y se construye el prototipo del cual una vez construido se pueden obtener las medidas que tendrá la tolva, esto al multiplicar las medidas del prototipo por un factor el cual determine las medidas de la tolva real, Figura 2.13.

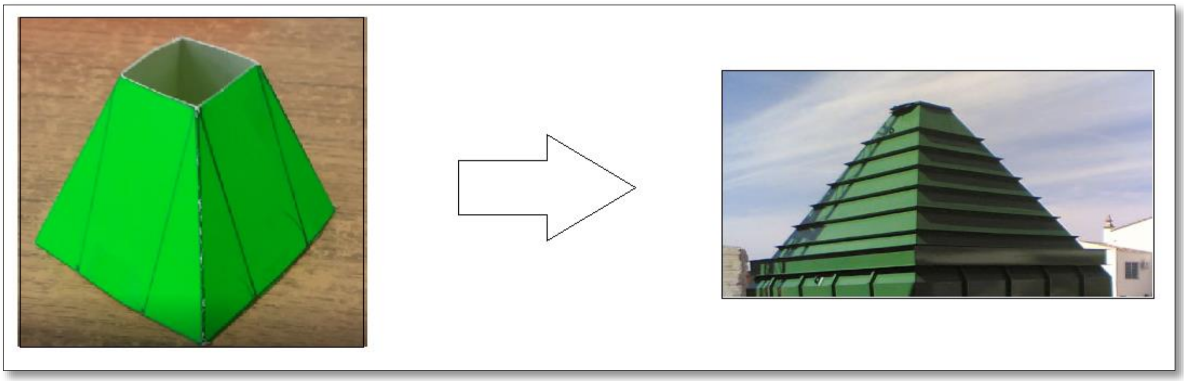


Figura 2.13 Prototipo a escala y tolva real.

A continuación se muestran una serie de figuras poliédricas, Figura 2.14, que se pueden realizar con esta técnica y que son elaboradas por los paileros donde sé requiere del filtrado de líneas.

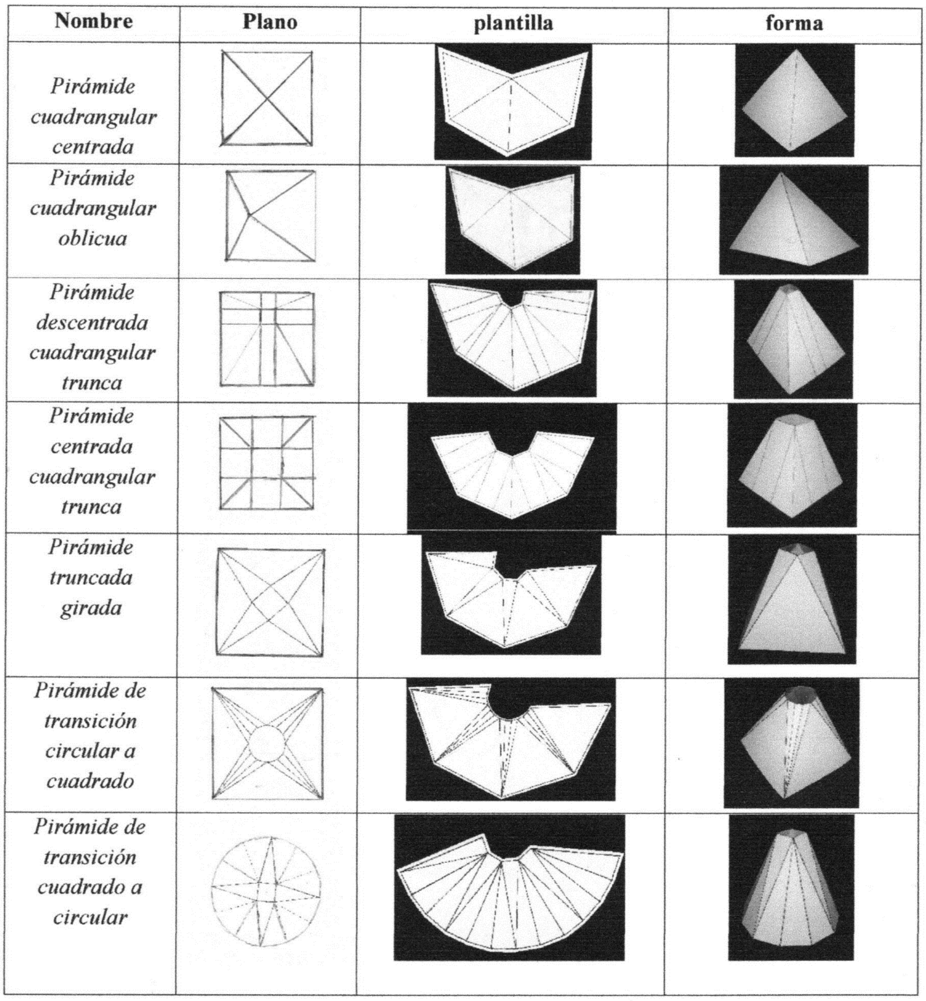


Figura 2.14 Figuras poliédricas.

Esta técnica pareciera que es algo compleja, pero en realidad una vez que se tiene la práctica y experiencia es verdaderamente sencilla, por lo que para este trabajo de investigación se ha decidido trabajar con esta técnica para diseñar una situación variacional. Esta técnica es utilizada desde hace mucho tiempo, lo que nos permite considerarla como una práctica institucionalizada históricamente a lo largo de la industria pailera, debido a que la utilidad de las tolvas proviene aproximadamente desde el año 1400 d.c. según registros encontrados.

## 2.3 Conceptos matemáticos en las prácticas de pailería

Existen diferentes prácticas que se realizan en pailería y dependen directamente de lo que se requiera construir. Por ejemplo, en las prácticas descritas anteriormente se realizaron dos piezas diferentes donde se pudo evidenciar el uso del plano cartesiano, radio de curvatura, diámetro, π, perpendicularidad, arista, teorema de Pitágoras, paralelismo, ángulos, etc.

En la pailería también se realizan otras prácticas, tal es el caso de aquellas que se relacionan con la construcción de diferentes cortes en tubos. Para construir los tubos se utilizan conceptos como paralelismo, perpendicularidad, radio, cuerda, perímetro, etc. y para realizar el trazo de las plantillas para los cortes en los tubos se utiliza el teorema de Tales mediante la división de rectas. Es abundante la lista de conceptos matemáticos que se encuentran implicados en las prácticas que se llevan a cabo en la industria de la pailería, esto sin mencionar aun la importancia que tienen las técnicas de dibujo que se utilizan para los diferentes trazos.

Como resultado de las prácticas observadas y analizadas anteriormente, en el presente trabajo de investigación se propone la adaptación de una práctica de pailería (la construcción de tolvas) para su incursión en el ámbito escolar y que los estudiantes, puedan identificar y aprender de manera natural la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo por simplicidad “RP”.

En el siguiente capítulo se mencionan algunos libros del nivel básico, así como trabajos de investigación que evidencian la problemática existente en la comprensión del teorema de Pitágoras. Esto nos permitirá justificar el diseño de la situación variacional.

# ANTECEDENTES

## CAPÍTULO III

## Capítulo 3

## ANTECEDENTES

### Introducción

En este capítulo se describen algunos trabajos de investigación acerca de la enseñanza y aprendizaje del Teorema de Pitágoras. También se presenta el tratamiento que realizan algunos libros de texto de diferentes niveles educativos, los cuales muestran al teorema como un objeto acabado. El objetivo de este apartado es el de obtener un panorama general acerca de la enseñanza-aprendizaje del Teorema de Pitágoras y de este modo poder realizar una aportación significativa en el presente trabajo de investigación.

### 3.1 Algunas investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje del Teorema de Pitágoras

A través de una revisión bibliográfica no exhaustiva de la literatura acerca de la enseñanza y el aprendizaje del Teorema de Pitágoras, se pudo constatar que éste ha sido profundamente abordado desde diferentes enfoques y perspectivas.

Existen trabajos de investigación que abordan la enseñanza del Teorema de Pitágoras con las Tecnologías de la Información y la Comunicación "TICS", como por ejemplo:

- Vargas (2011), el cual apoyado en el modelo de los Van Hiele y a través del diseño de una estrategia metodológica con el uso de GeoGebra, propone una forma en que los estudiantes de nivel básico (secundaria) comprendan el teorema.
- Díaz (2013)también incorpora GeoGebra en una experiencia pedagógica, para el aprendizaje del Teorema de Pitágoras, debido a la necesidad de aumentar la motivación en los estudiantes.
- Arenas (2015), propone la enseñanza del Teorema de Pitágoras con el uso de APPLETS usando una estrategia de modelación con estudiantes de segundo de secundaria.
- Rosero (2005)presenta una alternativa metodológica para la enseñanza del Teorema de Pitágoras mediante situaciones problemas recreadas en un ambiente computacional conocido como software o Sistema de Geometría Dinámica, la

cual está enfocada en la resolución de problemas apoyada en el marco de las situaciones didácticas de Brousseau y en el modelo de Lakatos sobre la dialéctica de las pruebas y las refutaciones en estudiantes de educación básica y media.

- Jimenéz Turizo, Rivero Osuna, & Montes Viloria (2005) desarrollan una propuesta pedagógica de la enseñanza y demostración del Teorema de Pitágoras con el uso principalmente de la calculadora graficadora TI-92 plus y Cabri gèometre a estudiantes del séptimo grado. Las teorías en las que se sustenta el trabajo es en el principio de medición instrumental, sistemas de representación ejecutables, la fluidez algorítmica, principios de aprendizaje significativo, aprendizaje cooperativo y colaborativo.
- Acevedo (2011) con el fin de facilitar los procesos de enseñanza, aprendizaje y compresión del Teorema de Pitágoras, desarrolla una propuesta mediante el diseño de un archivo web con gifs animados, rutinas implementadas mediante el software Visual Basic y un documento con guías para recortar y pegar.

Por otro lado existen trabajos de investigación sin el uso de las TICS y en su caso emplean por otro lado material concreto, lápiz, papel, procedimientos gráficos y operativos por ejemplo:

- Osorio (2011), el cual apoyado en las representaciones semióticas de Font, propone la enseñanza del Teorema de Pitágoras a través de un cambio de registros, entre ellos encontramos el simbólico, grafico, algebraico, operativo, visual, etc.
- Figuera (2006) propone el diseño e implementación de una unidad didáctica donde se emplean diversos recursos didácticos (Geoplano, rompecabezas, cabri, etc.) para facilitar la enseñanza y aprendizaje del teorema de Pitágoras en estudiantes del noveno grado.
- Vázquez (2011) por cierto un trabajo muy interesante, realiza una recopilación de diferentes demostraciones de diversos teoremas entre ellos el Teorema de Pitágoras, las cuales tienen la característica de que pueden comprenderse con un “Golpe de vista”. En el capítulo 5 realiza sugerencias didácticas para comprender las demostraciones mediante el uso de material concreto y uso de teselados en estudiantes de secundaria y bachillerato.

- García (2009) presenta de manera deductiva otras explicaciones en torno al Teorema de Pitágoras tomando en consideración la idea de área. Propone que estas explicaciones al ser tratadas desde un punto de vista didáctico, pueden ayudarnos en el proceso de enseñanza del teorema.

Sin embargo, a groso modo, lo que se puede decir acerca de los estudios realizados es que éstos siguen dos orientaciones claramente marcadas, donde la finalidad es favorecer el aprendizaje de los estudiantes de este tema tan importante en el nivel básico.

La primera orientación es probar el teorema de Pitágoras, donde el objetivo principal es verificar que efectivamente se cumple $a^2 + b^2 = c^2$para todo triángulo rectángulo, a través de diferentes recursos que se apoyan en el uso de material concreto como papel, experimentos, dibujos, geoplano, regletas, por mencionar algunos, entre otros. Y por otro lado utilizan diferentes recursos que apoyan diferentes pruebas geométricas y analíticas.

La segunda orientación que se puede apreciar en estos estudios es básicamente similar a lo anterior, sin embargo, en ésta se prueba la validez del teorema mediante la utilización de las TICS a través de software de graficacion como GeoGebra, Cabri 3D, Graph, entre otros.

Si bien resulta atractivo abordar desde esta perspectiva el teorema debido a que se toman en cuenta aspectos de color o los efectos, sin embargo, estos estudios se presentan únicamente como propuestas didácticas donde en la mayoría de los casos no se analizan las implicaciones que dichas propuestas puedan tener de manera general en el aprendizaje del teorema.

Por otro lado, los resultados u observaciones obtenidas en dichas propuestas didácticas si así lo fuese, no han sido analizados mediante el empleo de algún marco teórico interpretativo de la matemática educativa salvo el estudio de Osorio (2011), que se apoya en la teoría de representaciones semióticas. En otras palabras, se deja en duda la viabilidad de dichas propuestas, pues no se analiza el impacto efectivo que pudiesen tener el empleo o no de las TICS, para la enseñanza del teorema de Pitágoras.

Estas dos orientaciones proponen la enseñanza del teorema como un concepto matemático acabado, con sentido utilitario y simplemente justifican su validez. Esto se traduce directamente en el aula a identificar las variables *a, b, c* y aplicar la fórmula que la mayoría de los estudiantes hemos estudiado y aprendido de memoria.

También lleva a los estudiantes a que no visualicen la relación que existe entre los lados del triángulo rectángulo, que básicamente es la esencia del teorema, y lo trabajan únicamente de manera operativa al buscar su aplicación en distintas situaciones cotidianas pero poco significativa ara los alumnos. Esta falta de apreciación visual sobre el teorema de Pitágoras y la relación entre sus lados, nos conduce a tener dificultades de interpretación en los problemas matemáticos, falta de identificación de las variables y obtener resultados sin sentido.

Así mismo, el considerar al teorema de Pitágoras de manera implícita como un objeto acabado, según la literatura analizada, apuntan a un aprendizaje de tipo memorístico u operativo, pero no apuntan hacia una interpretación adecuada del teorema y mucho menos a una interpretación funcional, siendo esto último la génesis del presente trabajo de investigación.

## 3.2 El Teorema de Pitágoras en los libros de texto

En el currículo educativo en México, el teorema de Pitágoras está presente en la educación básica, media superior y superior. En la educación básica, precisamente en tercero de secundaria, es donde por primera vez se aborda el teorema mediante un tratamiento geométrico y se establece una generalización demostrativa (Herrera, 2015).

Por ejemplo, en la Figura 3.1 se presenta el tratamiento geométrico que realiza Herrera (2015) del Teorema de Pitágoras. Se trata de un libro que se emplea en el nivel educativo de secundaria. En el *Anexo B* se muestra la actividad completa.

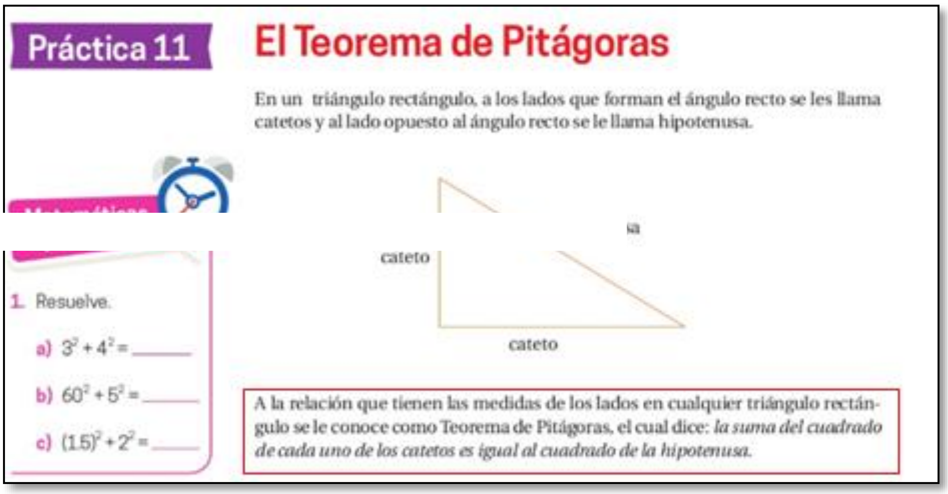



Figura 3.1 Tratamiento geométrico del teorema de Pitágoras del libro Herrera (2015).

Por otro lado, en la educación media superior, cuando se aborda la noción de vector, el teorema de Pitágoras se utiliza en física (Puente, 2015) para calcular la magnitud de los vectores asociados a cantidades físicas tales como la posición, la velocidad o la aceleración, entre otros. Por ejemplo, la Figura 3.2, se ilustra el tratamiento que se realiza en el libro de Puente (2015) que se emplea en la enseñanza de cinemática.

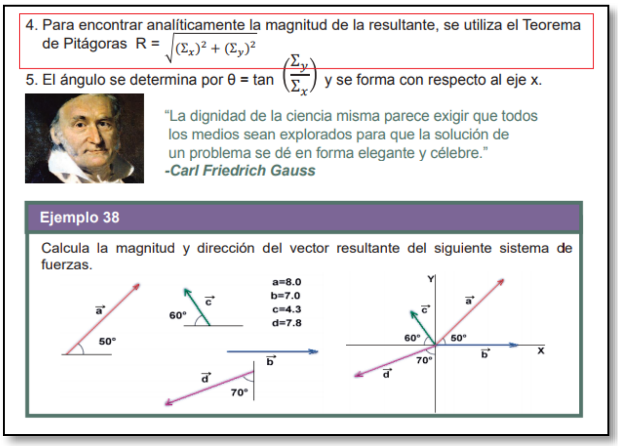
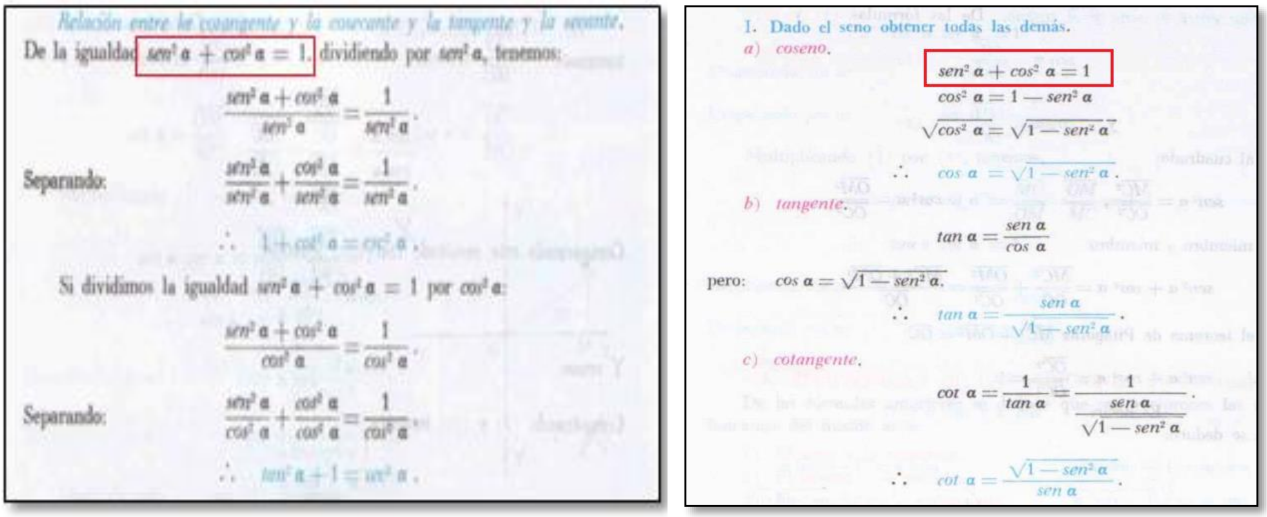



Figura 3.2 El teorema de Pitágoras para calcular la magnitud de un vector en el libro de Puente (2015).

En la educación media superior también encontramos la relación pitagórica en trigonometría a través de las identidades trigonométricas (Baldor, 2004). Por ejemplo, en la Figura 3.3, se ilustra el tratamiento que se realiza en este libro.



*Relación entre la cotangente y la cosecante y la tangente y la secante.*

De la igualdad $\boxed{sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1}$, dividiendo por $sen^2\,\alpha$, tenemos:

$$\frac{sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha}{sen^2\,\alpha} = \frac{1}{sen^2\,\alpha}.$$

Separando: $$\frac{sen^2\,\alpha}{sen^2\,\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{sen^2\,\alpha} = \frac{1}{sen^2\,\alpha}.$$

$$\therefore\ 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha.$$

Si dividimos la igualdad $sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$ por $\cos^2\alpha$:

$$\frac{sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Separando: $$\frac{sen^2\,\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

$$\therefore\ \tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha.$$

I. Dado el seno obtener todas las demás.

*a)* *coseno.*

$$\boxed{sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$
$$\cos^2\alpha = 1 - sen^2\,\alpha$$
$$\sqrt{\cos^2\alpha} = \sqrt{1 - sen^2\,\alpha}$$
$$\therefore\ \cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\,\alpha}.$$

*b)* *tangente.*

$$\tan\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$$

pero: $\cos\alpha = \sqrt{1 - sen^2\,\alpha}.$

$$\therefore\ \tan\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\sqrt{1 - sen^2\,\alpha}}.$$

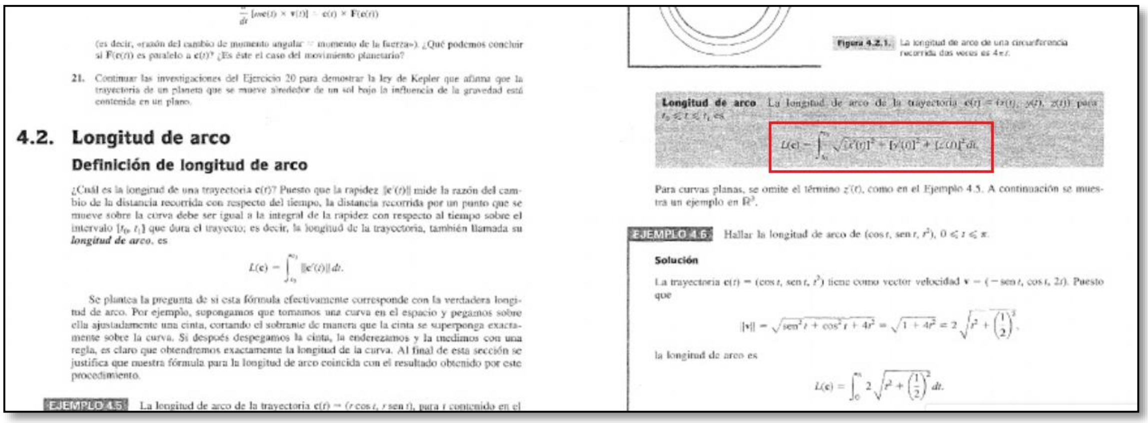
*c)* *cotangente.*

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\frac{sen\,\alpha}{\sqrt{1 - sen^2\,\alpha}}}.$$

$$\therefore\ \cot\alpha = \frac{\sqrt{1 - sen^2\,\alpha}}{sen\,\alpha}.$$

Figura 3. 3 El teorema de Pitágoras como identidad trigonométrica en el libro de Baldor (2004), ver los recuadros en rojos.

En el nivel superior el teorema lo podemos encontrar en cálculo vectorial para la integral de línea y se utiliza para calcular la longitud de arco "$L$" de una curva cuando se tiene una función parametrizada $\vec{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ para $t_0 \leq t \leq t_1$ se tiene que ésta se encuentra determinada por $L(\vec{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$ donde $\vec{c}\,'(t) = d\vec{c}/dt = (x'(t), y'(t), z'(t))$ ( Marsden & Tromba, 2004) , Figura 3.4, Longitud de arco.



$$\frac{d}{dt}[m\mathbf{c}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{c}(t) \times \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$$

(es decir, «razón del cambio de momento angular = momento de la fuerza»). ¿Qué podemos concluir si $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$ es paralelo a $\mathbf{c}(t)$? ¿Es éste el caso del movimiento planetario?

21. Continuar las investigaciones del Ejercicio 20 para demostrar la ley de Kepler que afirma que la trayectoria de un planeta que se mueve alrededor de un sol bajo la influencia de la gravedad está contenida en un plano.

### 4.2. Longitud de arco

#### Definición de longitud de arco

¿Cuál es la longitud de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$? Puesto que la rapidez $\|\mathbf{c}'(t)\|$ mide la razón del cambio de la distancia recorrida con respecto del tiempo, la distancia recorrida por un punto que se mueve sobre la curva debe ser igual a la integral de la rapidez con respecto al tiempo sobre el intervalo $[t_0, t_1]$ que dura el trayecto; es decir, la longitud de la trayectoria, también llamada su ***longitud de arco***, es

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{c}'(t)\|\,dt.$$

Se plantea la pregunta de si esta fórmula efectivamente corresponde con la verdadera longitud de arco. Por ejemplo, supongamos que tomamos una curva en el espacio y pegamos sobre ella ajustadamente una cinta, cortando el sobrante de manera que la cinta se superponga exactamente sobre la curva. Si después despegamos la cinta, la enderezamos y la medimos con una regla, es claro que obtendremos exactamente la longitud de la curva. Al final de esta sección se justifica que nuestra fórmula para la longitud de arco coincida con el resultado obtenido por este procedimiento.

**EJEMPLO 4.5** La longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t)$, para $t$ contenido en el

**Figura 4.2.1.** La longitud de arco de una circunferencia recorrida dos veces es $4\pi r$.

**Longitud de arco** La longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ para $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ es

$$\boxed{L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt.}$$

Para curvas planas, se omite el término $z'(t)$, como en el Ejemplo 4.5. A continuación se muestra un ejemplo en $\mathbb{R}^3$.

**EJEMPLO 4.6** Hallar la longitud de arco de $(\cos t, \mathrm{sen}\,t, t^2)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

**Solución**

La trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, t^2)$ tiene como vector velocidad $\mathbf{v} = (-\mathrm{sen}\,t, \cos t, 2t)$. Puesto que

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t + 4t^2} = \sqrt{1 + 4t^2} = 2\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2},$$

la longitud de arco es

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{\pi} 2\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dt.$$

Figura 3.4 El teorema de Pitágoras en el tema de longitud de arco en el libro de Marsden & Tromba (2004), ver recuadro rojo.

Sin embargo, es importante mencionar que en cada uno de los casos descritos anteriormente el teorema se presenta de manera aislada a lo largo de los distintos niveles educativos y en consecuencia el teorema de Pitágoras adquiere distintas interpretaciones según el contexto donde se aborde.

Estos distintos significados o saberes institucionales que tiene el teorema de Pitágoras, nos permite comprender la complejidad de este objeto matemático. Desde la perspectiva de la Socioepistemología estos saberes son tan legítimos como el mismo saber que se tiene en pailería de este mismo teorema de Pitágoras (Cantoral, 2013).

En la investigación que se describe en el presente trabajo se considera en el contexto de pailería para introducir de manera intencional al ámbito educativo la relación señalada por el teorema de Pitágoras entre los lados de un triángulo rectángulo. Esto mediante la adaptación al aula de la práctica social de construcción de tolvas que se realiza en pailería para proveer de una situación que permita los estudiantes visualizar la relación entre los elementos de un triángulo, con objeto de poder apoyar en un futuro las distintas nociones (en el tema de vectores, longitud de arco, entre otros) que se tiene del teorema de Pitágoras en los diversos niveles educativos. Con lo descrito anteriormente no se afirma que los estudios realizados en los diferentes niveles educativos así como los libros de secundaria y preparatoria en México y el mundo carezcan de validez, sin embargo, más bien se considera que hace falta que el estudiante asocie un significado e intérprete de manera adecuada la relación que señala el teorema de Pitágoras para todo triángulo rectángulo. Con este aporte, la presente investigación fundamentaría muchos de los trabajos de investigación que se han realizado en su gran mayoría propuestas didácticas acerca de las demostraciones analíticas y geométricas para el aprendizaje del teorema de Pitágoras.

En el siguiente capítulo se describe la problemática que deriva del análisis realizado en investigaciones previas y del tratamiento que se le da al teorema de Pitágoras en los libros de texto. También se presentan las hipótesis, preguntas y objetivos de investigación.

# PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

## CAPÍTULO IV

**Capítulo 4**

# PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

## Introducción

En este capítulo, se describe el problema de investigación relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de la relación matemática entre los lados de un triángulo rectángulo señalada por el teorema de Pitágoras. Se mencionan también las hipótesis que guiaron el trabajo de investigación así como también las preguntas y los objetivos que se pretendían alcanzar.

## 4.1 El problema de investigación

Con base en la revisión de los libros de texto y los trabajos de investigaciones realizadas en México y algunas otras partes del mundo, se ha podido identificar una problemática que existe en relación con la interpretación que realizan los estudiantes acerca del y teorema de Pitágoras. Los estudiantes no visualizan la relación que señala el teorema de Pitágoras mediante la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$, debido a que el teorema siempre se presenta en los libros de texto y en las clases de matemáticas como un objeto acabado y con un sentido de operatividad matemática, soslayando la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo, es decir, los alumnos no visualizan la Relación pitagórica (RP), lo cual lleva a los alumnos a una comprensión inadecuada y a la memorización.

Consideramos que antes de que se muestre el teorema de Pitágoras a través de la fórmula matemática $a^2 + b^2 = c^2$, primero debe presentarse a los estudiantes la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo (RP) y posteriormente abordar la fórmula. Esto es porque la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo, la RP, permite fundamentar la relación que existe entre las variables de la fórmula. De esta forma, cuando los estudiantes observen la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$, previo el análisis del triángulo rectángulo, será más fácil la comprensión e interpretación de problemas matemáticos relacionados con el teorema.

## 4.2 Objeto de estudio

En esta investigación se consideró como *objeto de estudio* los mecanismos que influyen y guían la construcción del conocimiento de la RP. Estos mecanismos se refieren a la organización de cierto conjunto de procesos cognitivos que permite a los estudiantes la resolución de problemas planteados en el contexto de la práctica social que norma la actividad en la construcción de tolvas poliédricas. Se parte de la idea de llevar al aula dicha práctica social a través de la adaptación intencionada de la actividad de construcción de una tolva poliédrica con objeto de reconstruir la RP.

## 4.3 Hipótesis y preguntas de investigación

Para este trabajo de investigación se plantearon las siguientes hipótesis y preguntas de investigación, las cuales fueron verificadas a través de un proceso metodológico apoyado en la teoría de la Socioepistemología.

### *4.3.1 Hipótesis 1*

Los estudiantes no dan significado al Teorema de Pitágoras bajo una clase tradicional. En otras palabras, a través de las actividades que los estudiantes realizan en una clase tradicional los alumnos no visualizan la relación que señala el Teorema de Pitágoras. Se trata de clases que muestran al Teorema de Pitágoras como un objeto acabado en donde se busca a toda costa, una vez expuesto dicho teorema, su aplicación en situaciones si bien cotidianas pero que no resultan relevantes para los alumnos. Para verificar esta hipótesis se propuso responder a la siguiente pregunta:

### *4.3.2 Pregunta de investigación 1*

¿Por qué los estudiantes presentan dificultades para la comprensión del Teorema de Pitágoras?

### *4.3.3 Hipótesis 2*

La forma de las tolvas tiene su origen en la utilidad que se le da a las tolvas cotidianamente, para la canalización y el vaciado por gravedad de material granulado. Los mecanismos cognitivos que guían la resignificación de la RP son puestos en juego en el estudio de situaciones en los que se ve involucrado el cambio en los tiempos de vaciado de la tolva según la forma que ésta tenga, y donde la necesidad de predecir los tiempos de vaciado motiva el estudio y análisis de la variación

Con el objeto de corroborar esta segunda hipótesis se propuso responder a las siguientes preguntas:

#### *4.3.4 Pregunta de investigación 2*

¿Cómo se llevan a cabo los mecanismos cognitivos que guían a los estudiantes hacia una resignificación de la RP?

#### *4.5.5 Pregunta de investigación 3*

¿Qué características deben tener una situación variacional para promover una resignificación de la RP?

## 4.5 Objetivo general de la investigación

Proponer una práctica socioepistemología para que los estudiantes del nivel de secundaria resinifiquen la relación existente entre los lados de un triángulo rectángulo "RP", como una aproximación para el estudio al Teorema de Pitágoras. Esto mediante el diseño y aplicación de una situación variacional que le permita al estudiante la resolución de actividades mediante la utilización de estrategias variacionales.

### 4.5.1 Objetivos específicos

#### *4.5.1.1 Objetivo 1*

Identificar las dificultades que presentan los estudiantes para comprender y dotar de significado al Teorema de Pitágoras.

#### *4.5.1.2 Objetivo 2*

Realizar un estudio minucioso de las prácticas que se realizan en pailería para conocer la comunidad de paileros y el empleo de las matemáticas en esta industria.

#### *4.5.1.3 Objetivo 3*

Realizar una situación variacional mediante el diseño y adaptación de una práctica de pailería en este caso el de la construcción de tolvas, para su implementación y valoración que permita la incursión de dicha situación variacional al ámbito educativo.

#### *4.5.1.4 Objetivo 4*

Que los estudiantes mediante la aplicación de la situación variacional, logren resignificar la relación existente entre los lados de un triángulo rectángulo para una aproximación al estudio del Teorema de Pitágoras.

En el siguiente capítulo se describe el marco teórico, el cual brinda las bases que permiten adaptar la práctica de pailería al ámbito escolar. Al analizar el proceso de construcción de tolvas que se lleva a acabo cotidianamente en la empresa Pailería San Luis (capitulo II, sección 2.2), se pudo corroborar que los elementos que se encuentran presentes en esta práctica están claramente identificados en la teoría Socioepistemológica de la matemática educativa, lo cual guía y facilita  el proceso de adaptación de la práctica.

# MARCO TEÓRICO

## CAPÍTULO V

## Capítulo 5

## MARCO TEÓRICO

### Introducción

A continuación, se describe la fundamentación teórica del presente trabajo de investigación. Como se ha señalado anteriormente, la pailería es un oficio muy antiguo en el que se pueden observar distintas prácticas orientadas hacia la construcción de una gran diversidad de estructuras metálicas que impactan de manera significativa directa o indirectamente en la vida cotidiana. La construcción de dichas estructuras es llevada a cabo mediante técnicas que se apoyan implícitamente en distintos saberes matemáticos y que emplean herramientas rudimentarias. En particular, se ha señalado que la comunidad de paileros lleva a cabo una técnica, a la que llaman filtración, que les permite la construcción de distintas tolvas poliédricas mediante la visualización de la relación entre las longitudes de las aristas de un triángulo rectángulo, la que se ha convenido llamar Relación Pitagórica. Se trata de la relación que advierte el teorema de Pitágoras en el contexto de la matemática escolar.

Los elementos anteriores son tomados en cuenta en el marco de la teoría de la Socioepistemología, la cual dota a la investigación de una aproximación sistémica y permite incorporar cuatro componentes en la construcción social del conocimiento matemático referente a la Relación Pitagórica: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, la componente cognitiva y los modos de transmisión del conocimiento a través de la enseñanza. En este capítulo se describen los elementos teóricos de la socioepistemología que guiaron la metodología y el análisis de los resultados de la presente investigación.

### 5.1 Antecedentes acerca de la Socioepistemología

La socioepistemología es una teoría propia de la matemática educativa que tiene sus inicios a finales de los años noventa con la necesidad de explorar formas del pensamiento matemático, fuera y dentro de la escuela. La investigación de partida de esta teoría se encuentra en la Tesis titulada *Un estudio de la formación social de la analiticidad* (Cantoral, 1990).

Posteriormente surgen otras contribuciones científicas de la teoría en investigaciones doctorales (Cordero, 1994; Farfán, 1993). Estas investigaciones condujeron a un programa de investigación que permitió abordar una serie de problemas que hasta ese entonces no eran tan claros para la matemática educativa, estableciendo un método para estudiar los fenómenos de construcción social del conocimiento y su difusión.

La teoría propone un cruce entre el campo de la matemática educativa, las ciencias sociales y las humanidades, de donde se desprenden las cuatro dimensiones del saber: Social, cognitiva, epistemológica y didáctica. Es importante mencionar que en este enfoque se asume la legitimidad de toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto, pues en su conjunto constituyen la sabiduría humana (Cantoral, 2013). Esto en contraste con otras teorías o enfoques educativos que consideran y estudian sólo una de estas formas del saber.

### 5.2 Fundamentación del enfoque sociepistemológico

La Socioepistemología, también conocida como la epistemología de las prácticas, es considerada una rama de la epistemología que estudia la construcción social del conocimiento matemático. Considera a las prácticas sociales como la base del conocimiento, en la medida en que son el sustento y la orientación para llevar a cabo una construcción social del conocimiento matemático y asume a la práctica social como normativa de la actividad humana (Cantoral, 2013). Esta teoría considera el triángulo didáctico como base del sistema didáctico, aunque incorpora contextos sociales y perspectivas culturales para la significación, en este modelo una idea de aprendizaje coloca en interacción al aprendiz con el entorno y se suple la idea de aprendizaje por adquisición (Cantoral, 2013).

La Socioepistemología es de naturaleza sistémica, pues permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al estudiar el cruce entre la *epistemología, dimensión sociocultural, procesos cognitivos asociados y mecanismos de institucionalización vía la enseñanza* (Cantoral, 2013). Estas dimensiones interactúan entre sí de modo que no se pueden estudiar de manera aislada una sin la otra y se entretejen en una sola unidad de análisis. Estas dimensiones se clasifican en cognitiva, didáctica, epistemológica y social, éstas se describen a continuación:

**La dimensión cognitiva**. Se analizan las formas de apropiación y significación progresiva que experimentan quienes se encuentran en situaciones de construcción de conocimiento (Cantoral, 2013). En ella se analiza el desarrollo del pensamiento que a su vez incluye, entidades matemáticas y procesos avanzados del pensamiento como: visualización, estimación, comparación, predicción, por mencionar algunos. La acción cognitiva asume que los objetos son creados en el ejercicio de prácticas normadas.

**La dimensión didáctica.** Se analiza cómo un objeto institucional es dirigido en los procesos de enseñanza hacia los aprendices, tanto en el ámbito escolar como no escolar (por ejemplo, aula extendida). La textura didáctica del saber se historiza y dialectiza, se problematiza (Cantoral, 2013).

**La dimensión epistemológica**. Permite un análisis exhaustivo de las condiciones que hicieron posible la construcción del conocimiento matemático así como su difusión de manera general. Esta dimensión estudia las formas en que el saber matemático es conocido a través de las prácticas sociales que emergen en una comunidad.

**La dimensión social.** Permite tomar en cuenta los usos del saber en escenarios específicos, y se encuentran en el ejercicio de prácticas normadas.

La Socioepistemología se sustenta en cuatro principios fundamentales, los cuales son la base de la teoría y asumen que el conocimiento se construye mediante prácticas sociales a través de la actividad humana. Estos principios son *el principio de la racionalidad contextualizada, el principio del relativismo epistemológico, el principio de la resignificación progresiva y el principio normativo de la práctica social*. A continuación se presentan estos principios:

El **principio de la racionalidad contextualizada** establece que las conductas, las formas de actuar y de pensar de los individuos dependen directamente del contexto donde se encuentren, y no de manera universal como se ha asumido por mucho tiempo por diferentes teorías. Esto debido a las características propias del entorno como costumbres, tradiciones, formas de comunicación y trabajo que se realizan en determinados contextos.

El **principio de relativismo epistemológico** menciona que existen dos posturas antagónicas en los temas relativos a la naturaleza. En el primero *el objetivismo,* el cual considera una verdad absoluta o universal independientemente de las opiniones, experiencias u observaciones del sujeto individual o colectivo. Por otro lado, *el relativismo* considera como parte del valor de verdad que se le asigne a determinada situación o concepto, al contexto y al individuo o sociedad. En contraste con el enfoque *objetivista,* para estas personas o grupos no existe una verdad única. Es por ello que desde esta postura la Socioepistemología analiza diferentes prácticas en distintas comunidades para buscar en ellas el valor epistémico de verdad. En síntesis la Socioepistemología desde este enfoque entiende que la validez del saber es relativa al individuo y al grupo contextual (Cantoral, 2013).

El **principio de resignificación progresiva** asume que la construcción de los significados son derivados de la interacción que existe entre el sujeto y el objeto tomando en cuenta el contexto donde dicha relación dialéctica esté surgiendo. Este principio propone una manera de enriquecer el primer significado o noción que se tiene de un objeto, que a través de nuevas interacciones en situaciones problemáticas éste recobrará un nuevo significado y permitirá una resignificación de lo que inicialmente se conocía. Este proceso es a lo que la Socioepistemología ha llamado resignificación progresiva. Cabe aclarar, que en el caso que nos ocupa acerca de la pailería, la resignificación progresiva no quiere decir que el sujeto aprendiz sea llevado a la industria de la pailería para observar, convivir o realizar las actividades de pailería *in situ*, sino más bien consiste en adaptar las prácticas de dicho contexto para su enseñanza en el aula.

El **principio normativo de la práctica social** establece que las prácticas sociales son las generadoras del conocimiento, de tal manera que organiza y analiza los procesos que permiten la construcción del conocimiento. Las prácticas sociales cumplen con diferentes funciones, es *normativa* debido a que está acotada a las características propias de la comunidad de práctica, *identitaria* porque las relaciones y las prácticas que se realizan en común entre los individuos define e identifica el rol y al individuo, *pragmática* debido a que la interacción del individuo con la práctica o actividad humana permite diferentes niveles de experiencia y *discursiva* porque se ha considerado parte fundamental del discurso que permite a la formación del significado.

## 5.3 El pensamiento variacional

Desde la perspectiva de la Socioepistemología, “no hay noesis sin praxis” (Cantoral, 2013), en la investigación que se describe en este trabajo, esta praxis se refiere las prácticas de la variación que aparecen en el estudio de situaciones variacionales que involucran el uso de las tolvas donde se encuentra involucrado de alguna manera el cambio, en el que la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio y análisis de la variación. Es sobre estos aspectos sobre los que se apoya el diseño de la situación variacional que se describe en el presente trabajo, donde se pone en juego una forma de pensamiento, el pensamiento variacional, que permite significar la relación entre los lados de un triángulo rectángulo RP, que señala el Teorema de Pitágoras más allá de la sola manipulación simbólica, por medio de ideas variacionales que le dan sentido y que permiten el desarrollo de dicho conocimiento.

Según Caballero (2013), el pensamiento variacional tiene lugar dentro de una situación variacional, la cual está conformada por un conjunto de problemas cuya resolución permite resignificar los conocimientos matemáticos más allá de la sola manipulación simbólica. La resolución requieren del empleo de estrategias variacionales que generan el estudio de la variación y permiten al sujeto analizar y reflexionar sobre el cambio y sus efectos a través de la identificación de aquello que cambia en la situación, cuantificar ese cambio y analizar la forma en que se dan esos cambios. Las situaciones variacionales han sido utilizadas en otras investigaciones de corte sociepistemológico, por ejemplo, la situación variacional que propicia el análisis de los cambios que se producen en la variable independiente y dependiente de la gráfica de una función (Engler,Vrancken, Gregorini, Müller, Hecklein y Henzenn, 2008), la cual requiere del uso de las estrategias variacionales de comparación y seriación, o bien, la situación variacional que aparece en el trabajo de Ramos, Briseño y Zaldívar (2014) en la que un grupo de estudiantes de bachillerato modela una situación experimental denominada Área Extrema, que requiere del uso del geoplano para el trabajo con áreas, donde el empleo de estrategias variacionales conduce a una resignificación de la derivada.

Las estrategias variacionales son una forma particular de razonar y actuar, las cuales, según Salinas (2003), pueden llevarse a cabo mediante: (i) *comparación*, permite establecer diferencias entre éstos para identificar cambios; (ii) *seriación*, permite encontrar relaciones o propiedades entre varios estados; (iii) *predicción*, para anticipar de manera local un comportamiento, estado o valor a partir del análisis de la variación de estados previos, y (iv) *estimación*, donde se proponen nuevos estados a corto plazo de manera global.

Posteriormente, el sujeto genera argumentos variacionales que le permiten resolver la situación problematizada que se le planteó a partir del análisis de la variación realizado mediante el uso de estrategias variacionales, las cuales se apoyan en una o más estructuras variacionales (herramientas, procesos y procedimientos especializados para abordar y explicar el estudio del cambio y la variación en la situación planteada). Los argumentos generados por el sujeto tienen la característica común de apoyarse en la variación y que pueden ser observadas a partir de frases, dibujos, esquemas, entre otros.

Como hemos visto, la Socioepistemología es una teoría con una base sólida que permite comprender he identificar de una manera más completa los mecanismos que permiten la construcción social del conocimiento matemático y como consecuencia realizar una intervención de manera asertiva en el ámbito escolar que permita a el estudiante la construcción del cocimiento. Por otro lado la naturaleza sistémica de la teoría nos permite realizar una investigación de una manera profunda y flexible que no se restringe a un solo encuadre metodológico, en comparación con otras teorías.

Para llevar acabo los objetivos que se han propuesto en esta investigación, en el siguiente capítulo se detalla el diseño de la metodología de investigación.

# METODOLOGÍA

## CAPÍTULO VI

## Capítulo 6

## METODOLOGÍA

### Introducción

En el presente capítulo se describen los aspectos metodológicos utilizados en el trabajo de investigación. En él se expone la perspectiva metodológica, las estrategias de indagación y el diseño metodológico que permitieron realizar una interpretación de los resultados obtenidos en las diferentes etapas en su fase de implementación.

### 6.1 Tipo de estudio

La perspectiva metodológica en la que se basa esta investigación es de tipo cualitativo. La idea es identificar los factores que de manera directa e indirectamente influyen en el fenómeno educativo. Este tipo de perspectiva considera elementos relevantes como hechos históricos, procesos, estructuras y personas en su totalidad, y no se limita a la medición solo de algunos de ellos, lo que permite abordar la investigación de manera flexible y abierta. En esta perspectiva el interés está puesto en cómo los individuos construyen sus propios significados y cómo estos toman sentido en su interacción con el medio. El investigador es el actor principal en este tipo de perspectiva metodológica, porque en el recae la responsabilidad de los resultados obtenidos y el análisis que se realice.

### 6.2 Estrategia de indagación

El método de indagación utilizado es *el estudio de caso,* ya que se trata de una investigación que pretende abordar un tema concreto como es la RP, esta orientación derivada del estudio cualitativo nos ayudará a describir y analizar el proceso de construcción de significados.

### 6.3 Diseño de la investigación

### *6.3.1 Sujetos de estudio*

La población estuvo conformada por un total de 145 estudiantes los cuales estaban inscritos en los diferentes grupos A, B, C, D, E y F del tercer grado de la secundaria técnica #1 del estado de San Luis Potosí. Cursaban el ciclo escolar 2016-2017 y según los resultados obtenidos en las diferentes pruebas estandarizadas que se aplican en nuestro país como el *Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes* (***PLANEA***) *y Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo* (***EXCALE***) y la página oficial de *Mejora Tu Escuela*, posicionan a la institución en el lugar 257 de 1473 con una clasificación de *panzazo* a *bien* según los criterios de evaluación.

La muestra estuvo constituida por un total de 15 estudiantes y las edades estaban comprendida entre los 14-15 años de edad. Se trabajó con este grupo de estudiantes porque representa una muestra del total de la población inscritos en este nivel. Los estudiantes fueron seleccionados al azar para que los resultados obtenidos tuvieran un grado de credibilidad mayor. Es importante mencionar que todos los estudiantes que formaron parte de la muestra ya tenían conocimiento de que habían ingresado a las preparatorias a las que habían realizado sus trámites de inscripción.

### *6.3.2 Material*

El material utilizado fue previamente estructurado y diseñado para los tiempos estimados en los que se programó la situación. El material consistió en:

- Cuestionarios impresos.
- Hojas de respuestas.
- Planos (Tolva).
- Compas.
- Regla.
- Lápiz.
- Hojas de máquina.
- Cartulinas.
- Tijeras.

- Pegamento.
- Presentación en formato PPT.

Todo el material fue proporcionado a los alumnos para facilitar el desarrollo de las actividades en las diferentes etapas.

### *6.3.3 Duración*

La aplicación de la situación variacional se realizó los días 12, 13 y 14 de Julio del año 2017 en un horario de 14:00 a 17:00 horas.

### *6.3.4 Técnicas e instrumentos de recolección de datos*

Las técnicas de recolección de datos son herramientas que nos permiten recabar, interpretar y verificar la información que nos lleve alcanzar los objetivos de la investigación. Estas técnicas son utilizadas para acercarse a las prácticas y extraer información oportuna. Las técnicas utilizadas en esta investigación fueron observación directa y cuestionarios abiertos. Sin embargo fue necesario el apoyo de otras técnicas como notas de campo y grabaciones en audio y video.

La observación directa se basa principalmente en la observación de los sujetos en acción, permite al investigador visualizar y determinar lo que está haciendo, cómo lo está haciendo y quien lo está haciendo de manera controlada. El investigador puede o no participar de manera directa en esta fase de recolección de información.

Los cuestionarios abiertos son un conjunto de preguntas estructuradas que permiten la recolección de la información de manera que las experiencias y opiniones expuestas son de manera general. Este tipo de técnica permite obtener información adicional a la que comúnmente se espera que respondan.

Las notas de campo y las grabaciones de audio y video, sirven como apoyo en esta investigación para retomar lo relevante que no haya sido captado con las dos primeras técnicas de recolección datos.

Los instrumentos de recolección de datos utilizados en esta investigación fueron fichas de observación y registros anecdóticos que apoyaron la técnica de observación directa, las hojas de preguntas  y hojas de registro de respuestas  que apoyaron la técnica del cuestionario. Sin embargo también se utilizaron otros instrumentos de recolección de información como hojas de trazos, hojas de respuestas y registro de conclusiones finales.

### 6.4 Fases de la investigación

De acuerdo con las preguntas de investigación y los objetivos planteados, la investigación se organizó en cuatro fases principales. Las actividades de aprendizaje que se aplicaron en las diferentes etapas fueron diseñadas por el aplicador mismo que condujo el proceso de instrucción. En la Figura 6.1, se muestra de manera esquemática el desarrollo y conexión de cada una de las fases que se llevaron a cabo en el transcurso de la investigación.

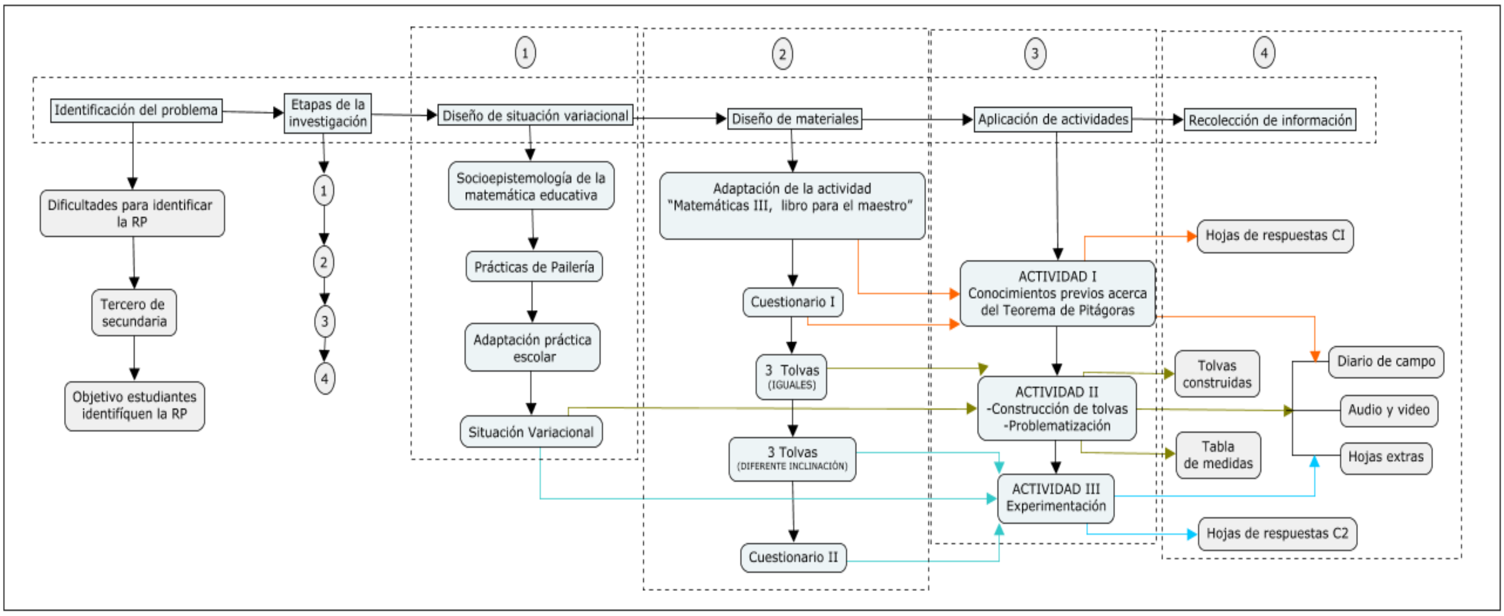



Figura 6.1  Esquema de las fases en el desarrollo de la investigación.

*Fase 1. Diseño de la situación* variacional*, Figura 6.1, número 1.*

Para el diseño de la situación variacional como se mencionó anteriormente en el capítulo III, su fundamento está en el marco de la Socioepistemología la cual estudia la construcción social del conocimiento matemático. Después de realizar un estudio profundo acerca de la industria de la pailería y de analizar de cerca las prácticas que ahí se efectúan, se realizó la adaptación de una práctica de pailería que serviría de apoyo para que los estudiantes pudieran comprender la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo RP, con el uso de estrategias variacionales (*Comparación, estimación y predicción)* que menciona la teoría socioepistemlógica.

En esta práctica los paileros  realizan la construcción de tolvas para el almacenamiento de granos y de manera implícita está el Teorema de Pitágoras cuando realizan el proceso de filtrado. Sin embargo la adaptación consistió en que a través del vaciado óptimo (*estimación*) de la sustancia granulada la cual fue el arroz,  lo estudiantes pudieran observar el comportamiento de las paredes de la tolva (*comparación*), pero más específicamente cómo se comportaban los triángulos rectángulos internos  de las diferentes tolvas cuando se buscaba este tipo de vaciado.

La situación variacional quedo divida en dos partes, en la primera los estudiantes deberían construir dos tolvas con la técnica que utilizan los paileros y determinar el comportamiento de la altura (*predicción)* y en la segunda los estudiantes deberían experimentar con la sustancia granulada y las tolvas, y determinar que tolva era la más adecuada para el tipo de vaciado que se estaba buscando (*estimación*).

Esto implicó el diseño de material y para ello se recortaron cartulinas para obtener un total de 30 hojas tamaño carta las cuales les  servirían a los estudiantes en la Fase 2  para realizar los trazos así como la plantilla que generaría las tolvas 1 y 2. Las hojas recortadas se realizaron con la intención de ahorrar tiempo y también para que todas las tolvas construidas tuvieran las mismas características.

Se diseñaron una hoja de máquina el plano y  los ejes de filtrado que serían utilizados en la Fase 2 para la construcción de la primera tolva. También se realizó una tabla impresa que los estudiantes deberían completar con los datos que les arrojarían los triángulos rectángulos  internos de las tolvas 1, 2 y 3, y de esta manera poder analizar el comportamiento de la altura.

Se construyeron 5 tolvas a escala que servirían en la Fase 2, para verificar que las medidas que éstas tenían eran efectivamente el triple de la tolva que inicialmente los estudiantes habían construido.

Se construyeron tres tolvas que servirían en la Fase 3 para encontrar un vaciado óptimo de las sustancias granuladas. Estas tres tolvas tenían la característica de que la altura era la misma en las tres, pero el grado de inclinación era diferente, esto permitiría analizar el comportamiento de la sustancia granulada en cada una de ellas e identificar cuál de las tres era la más adecuada.

Por último se diseñó una presentación en power point que serviría de apoyo para introducir a los estudiantes al tema de la Pailería. En ella se explicaba la importancia, utilidad y el impacto que esta industria tiene en nuestras vidas. Sin embargo, la relevancia de esta presentación era introducir a los estudiantes a una situación problema donde su rol ya no fuera de estudiantes si no de paileros y de esta forma poder realizar las actividades de la situación variacional.

*Fase 2. Diseño de materiales, Figura 6.1, número 2*

Se realizó el diseño de la actividad que lleva por nombre *"El Teorema de Pitágoras"* propuesta en el libro de "*Matemáticas III, libro para el maestro"* (Barriendos Rodríguez & Espinosa Asuar, 2008), *Anexo C.* La actividad propone que a través de una serie de ejercicios los estudiantes puedan identificar la relación que infiere el Teorema de Pitágoras y por otro lado puedan operar de manera adecuada el teorema. La actividad se imprimió en hojas de máquina que serían entregadas a los estudiantes para que en el transcurso de la sesión en turno fueran contestadas.

Se diseñó un cuestionario *actividad II*, de dos preguntas y dos problemas con la finalidad de ampliar la información anterior, *Anexo D*. Las dos preguntas eran abiertas y relacionadas con el Teorema de Pitágoras y los dos problemas consistían simplemente en operar la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$, para ello los estudiantes primeramente deberían identificar a y b.

Por último, se diseñó un cuestionario de 2 preguntas, *Anexo E*, la primera relacionada con los lados de un triángulo rectángulo y la segunda relacionada con el teorema de Pitágoras, con la intención de tener evidencia acerca de lo que los estudiantes pudieron comprender con la implementación de la situación variacional.

*Fase 3. Implementación de las actividades, Figura 6.1, número 3.*

En esta fase se diseñaron las actividades que fundamentan este trabajo de investigación, las actividades se dividieron en tres etapas:

- Recolección de datos
- Construcción de tolvas
- Experimentación con tolvas

En la etapa número uno se llevó a cabo la recolección de información para saber lo que los estudiantes conocían acerca del Teorema de Pitágoras. Para ello se utilizaron la actividad *"El Teorema de Pitágoras"* propuesta en el libro de "*Matemáticas III, libro para el maestro"* (Ana Laura Barriendos Rodríguez, 2008) *Anexo C* y también se aplicó el cuestionario actividad II, *Anexo D*.

En la etapa número dos primeramente se realizó la presentación con power point para familiarizar a los estudiantes con la industria de la pailería y posteriormente se inició con la construcción de las tolvas. En esta etapa se utilizaron las hojas impresas con el plano y los ejes de filtrado, las hojas de cartulina recortadas y las 5 tolvas a escala.

En la etapa número tres se experimentó con las tolvas que se diseñaron previamente, las tres tolvas con la misma altura pero diferente grado de inclinación, con esto se buscaba que los estudiantes y las estrategias variacionales inmersas pudieran identificar la RP. Por último se aplicó el cuestionario final *Anexo E*, para tener evidencia por escrito de lo que los estudiantes comprendieron de a RP.

*Fase 4. Recolección de la información, Figura 6.1, número 4.*

La recolección de información se llevó de manera constante en las tres sesiones de clase y de diferentes maneras. Para ello se utilizaron las hojas de respuestas de los cuestionarios que se aplicaron, así como hojas extras donde los estudiantes apuntaban sus reflexiones. Se llevó un diario de campo donde se anotaban todos los datos y observaciones relevantes en las diferentes sesiones dentro del aula de clases. Con el permiso de la institución por parte del director de la escuela así como del  profesor a cargo del grupo, se realizó la grabación mediante audio y video que servirían de apoyo para realizar el análisis y discusión de la implementación de la situación variacional.

En el siguiente capítulo se describe la aplicación de la situación variacional que se aplicó a los estudiantes del nivel básico fundamentada en el marco de la socioepistemología.

# DESARROLLO DE LA SITUACIÓN VARIACIONAL

CAPÍTULO VII

## Capítulo 7

## DESARROLLO DE LA SITUACIÓN VARIACIONAL

### Introducción

En este capítulo se describe la aplicación de una situación variacional diseñada para alumnos del tercer grado de secundaria con la finalidad de identificar aquellos mecanismos que permiten que los alumnos resinifiquen e identifiquen la relación existente entre los lados que componen un triángulo rectángulo RP, la cual lleva por nombre *"Una aproximación socioepistemológica al teorema de Pitágoras",* esto mediante la utilización del diseño y construcción de tolvas desarrolladas en el contexto de la Pailería. Esta situación variacional primeramente está diseñada para abordar desde otra perspectiva uno de los principales temas contenidos en el currículum educativo de nivel básico en México y por otra parte busca motivar al estudiante en el estudio y aprendizaje del Teorema de Pitágoras. La situación variacional está compuesta por cuatro fases, las cuales llevan de manera progresiva a la resignificación de dicha relación.

### 7.1 Situación variacional

La situación variacional, Figura 6.1, número 3, aplicada tiene su fundamento en la teoría de la socioepistemología, la cual sostiene que las prácticas sociales son indispensables para la construcción de un saber. Por otro lado, sostiene que una intervención didáctica asertiva y una práctica social apoyada en su contexto natural intencionadamente, originan que el estudiante logre una resignificación de cierto saber matemático.

Concretamente en pailería, la construcción de tolvas es desarrollada por los paileros, y dicha actividad se encuentra caracterizada por un lenguaje propio, por los medios materiales y las herramientas especiales que utilizan en la elaboración de tolvas y de una gran variedad de estructuras metálicas en donde distintas nociones matemáticas juegan un papel importante en la realización de distintas técnicas. Lo que permite suponer que se trata de una comunidad de prácticas, entre éstas, la práctica que guía a los paileros en la construcción de tolvas. La manera en que los paileros realizan la construcción de las tolvas es muy peculiar y única, por lo cual, con el objeto de que los estudiantes logren una resignificación de la RP que expresa el teorema de Pitágoras, se llevó a cabo una adaptación de la práctica que guía la construcción de tolvas en pailería para poder insertarla en el ámbito escolar con la intención de que los estudiantes comprendan la relación existente entre los lados de un triángulo rectángulo, o en otras palabras, que los estudiantes logren una resignificación de la RP que expresa el teorema de Pitágoras. A continuación se describen cada una de las fases de la situación variacional.

**7.1.1 Fase 1, recolección de información.** Para el desarrollo de la primera fase, Figura 6.1, número 3 Actividad I, se realizó la distribución de los alumnos dentro de la biblioteca, ya que fue el área que se facilitó para la aplicación de las actividades. Las mesas con las que se contaba en la biblioteca eran individuales por lo que se podían acomodar de la forma que se considerara más pertinente quedando la distribución de los alumnos de la siguiente manera, Figura 7.1.

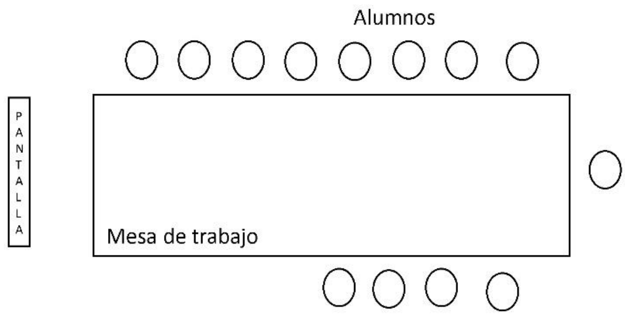



Figura 7.1 Distribución interna de los alumnos.

Como primera actividad se realizó la presentación del aplicador-investigador ante el grupo así como el rol que este desempeñaría dentro del salón de clases, también se describieron a grandes rasgos en que consistían las actividades, tareas y ejercicios que se realizarían en las diferentes etapas. Se les indicó que las actividades eran seriadas, por lo que se requería que su participación fuera continua y su asistencia de manera puntual para no interferir en las clases siguientes.

Es importante mencionar que en ningún momento se les dijo a los alumnos que la situación variacional los llevaría a una resignificación de la RP.

Como parte de la recolección de los datos se aplicó a los alumnos la actividad I que lleva por nombre ¿Qué nos dice el Teorema de Pitágoras? *Anexo C*, con la intención de indagar los conocimientos previos de los alumnos acerca del teorema de Pitágoras.

Esta actividad se aplicó a través de una actividad que se presenta típicamente en los libros de texto de nivel secundaria, para lo cual se planteó un conjunto de tareas tal y como se presenta en el libro de texto "*Matemáticas III, libro para el maestro"* (Barriendos Rodríguez & Espinosa Asuar, 2008) . Para la realización de la actividad se les facilitó a los alumnos lápiz y hojas impresas donde deberían responder las preguntas de manera individual. Esta actividad está estructurada de la siguiente manera:

***I.- Práctica:*** Se pide a los alumnos que de los siguientes triángulos Figura 7.2 identifiquen los que sean triángulos rectángulos.

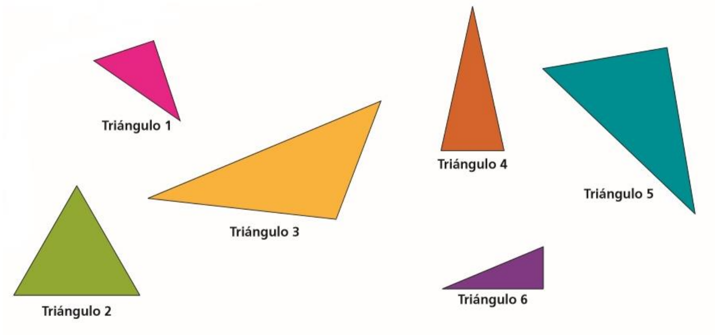



Figura 7.2 Triángulos.

*a)* Una vez que se identifiquen los triángulos rectángulos se deben medir los lados correspondientes con regla y completar la Tabla 1, Figura 7.3.

| Triángulo rectángulo | Medidas de los lados | | |
|---|---|---|---|
| | Catetos | | Hipotenusa |
| | $a$ | $b$ | $c$ |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Figura 7.3 Tabla 1.

*b)* Utilizando las medidas correspondientes de los lados de los triángulos rectángulos obtenidas en el paso anterior, se pide completar la tabla 2 Figura 7.4.

| Triángulo rectángulo | $a^2$ | $b^2$ | $a^2 + b^2$ | $c^2$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Figura 7.4 Tabla 2.

Para concluir con este apartado se realiza el siguiente cuestionamiento:

c) *¿Qué relación observan entre los resultados obtenidos a partir de las medidas de los lados de los triángulos rectángulos?* ________________

El propósito de esta pregunta es que los alumnos puedan deducir a partir de los ejercicios anteriores que $a^2 + b^2 = c^2$.

***2.- Reforzamiento:*** En este segundo apartado se realizan las siguientes preguntas:

***a)*** *En todo triángulo rectángulo hay un lado mayor que llamamos hipotenusa "c". ¿Hay algunos triángulos no rectángulos que solo tengan un lado mayor?*________________________________________________

*¿Cuáles son?*_____________________________________________

***b)*** *Consideren el triángulo 3, llamen **c** al lado mayor y **a** y **b** a los otros dos lados. Calculen $a^2$, $b^2$, $c^2$:*_________________________________

*¿Se cumple la relación que encontraste en los triángulos rectángulos?*

______________________________________________________

Según los autores de dicho libro de texto, estas preguntas están diseñadas con la intención de que los alumnos realicen una reflexión profunda y comprendan la relación $a^2 + b^2 = c^2$. Al concluir con la actividad I, se recogieron todas las hojas de respuestas y se continuó con la actividad II, *Anexo D*.

Con el objetivo de recoger, verificar y ampliar de manera más organizada la información que se obtuvo en la actividad I, se realizó la actividad II, *Anexo D*, la cual consistía en 2 preguntas abiertas y dos problemas de aplicación del Teorema de Pitágoras. Las preguntas realizadas eran de una forma más general y se les pedía indicar en que forma ellos conocían o habían visto el Teorema de Pitágoras, y por otro lado, los problemas fueron para verificar que los alumnos solamente operan el Teorema de Pitágoras pero que desconocen la relación existente entre los lados del triángulo rectángulo.

En la actividad I y actividad II se les indicó a los alumnos que no se trataba de un examen y que contestaran únicamente lo que sabían. El desarrollo de estas dos actividades se llevó a cabo en un tiempo aproximado de 1 hora.

**7.1.2 Fase 2, construcción de la tolva.** En esta fase, Figura 6.1, número 3 Actividad II, se realizó la aplicación de la situación variacional. Primeramente se inició la sesión con una exposición en *Power Point*, la cual consistía en explicar a los estudiantes el oficio de la pailería. También se plantearon algunas preguntas como por ejemplo:

- ¿Qué es pailería?
- ¿Qué es un pailero?
- ¿Qué realizan?
- ¿Por qué es importante en mi vida?

También se les explicaron diferentes aspectos y características de las estructuras metálicas que ahí se construyen con la intención de que los alumnos identificaran propiedades específicas de las tolvas las cuales serían construidas más adelante en la actividad.

Una vez que se explicó a los alumnos acerca del oficio de la pailería, la importancia de esta industria en nuestras vidas, se les comentó que ellos jugarían el rol de paileros en el resto de la actividad, para esto, se les indicó que construirían tolvas. A continuación se presenta el diálogo que estableció el aplicador-investigador con los alumnos, Diálogo 1.1.

**Aplicador:** Hola chicos!, estamos en un pequeño problema, se nos solicitó elaborar un recipiente para el almacenamiento de una sustancia granulada ¿Cuál creen ustedes que sería la más adecuada?

**Alumnos:** (Discuten entre ellos según lo visto en la exposición)… yo pienso que un cilindro… (Pero no justifica)… yo pienso que un cuadrado (refiriéndose a la tolva analizada en la exposición)… (Pero nuevamente no justifica).

**Alumno:** Yo pienso que ¿Cómo dijo que se llamaba?... (Interrumpe el aplicador "La tolva")… esa mera porque si queremos almacenar granos y queremos vaciarlos rápido sería mejor en esas.

**Aplicador:** ok la tolva debe ser construida con el siguiente plano… (Los alumnos observan el plano en la pantalla), pero desconocemos las medidas, por lo que tenemos que construir la tolva base/boca cuadrada centrada y después realizar los ajustes correspondientes.

**Alumnos:** (Comentan en voz baja)...

**Alumno:** y ¿cómo vamos hacerlo?

**Aplicador:** Para ello utilizaremos el material que les proporcionaremos y les pedimos que lo cuiden mucho porque se va a utilizar el resto de las actividades. Utilizaremos regla solo para trazar no para medir, compas para mover distancias y cartulina donde realizaremos los trazos que generaran la plantilla y a su vez la tolva.

**Alumnos:** (Empiezan a jugar con las reglas y a verificar que el compás este funcional).

Diálogo 1.1 Descripción de la situación problema.

Continuando con la actividad, se les entregó impreso el plano y la hoja de filtrado, ver la Figura 7.5. También se proporcionó a cada alumno, un compás, una regla y una cartulina sobre la cual realizarían los trazos de la plantilla.

(a) (b)

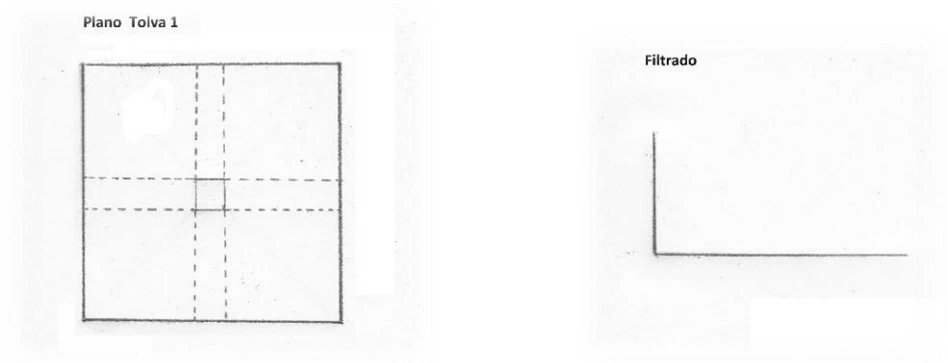



Figura 7.5 Plano y hoja de filtrado.

La técnica que se utiliza en pailería para la elaboración de tolvas es conocida como *técnica de triangulación* porque, como su nombre lo dice, mediante la construcción de triángulos contiguos se puede elaborar la plantilla, la cual básicamente genera la tolva.

Es importante mencionar que para aplicar dicha técnica debemos tener en cuenta dos cosas muy importantes: la visualización y el proceso de filtrado.

La visualización es la pieza clave y nos sirve para distinguir las medidas reales y no reales (virtuales) que están dentro del plano, entiéndanse por virtual la medida que no es real en el plano, por ejemplo analicemos el plano Figura 7.5 (a).

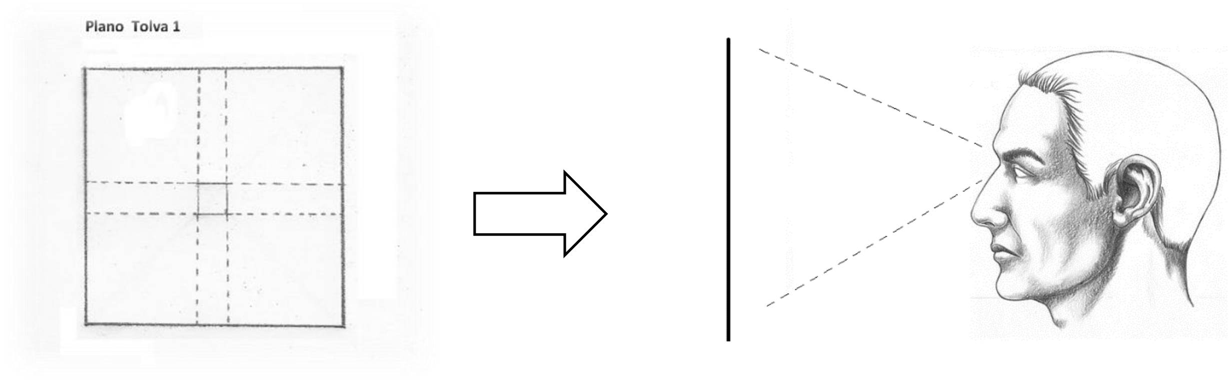



Figura 7.6 Visualización.

Nótese que el plano se está viendo de frente, Figura 7.6, entonces se observan medidas que corresponden exactamente a las medidas que tendrá la plantilla como por ejemplo longitud de las aristas A, B, C y D en la base de la tolva, y la longitud de las aristas E, F, G y H en la parte superior de la tolva, ver la Figura 7.7.

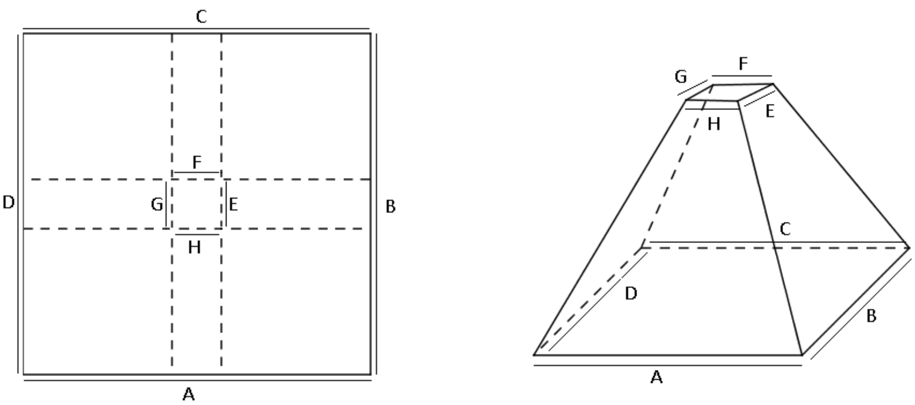



Figura 7.7 Longitud de las aristas y parte superior de la tolva

Sin embargo, también es posible observar otras longitudes que corresponden a las aristas I, J, K y L, Figura 7.8, las cuales son longitudes virtuales, de las cuales es posible obtener su longitud real a partir del proceso de filtrado con objeto de incluirlas en la elaboración de la plantilla.

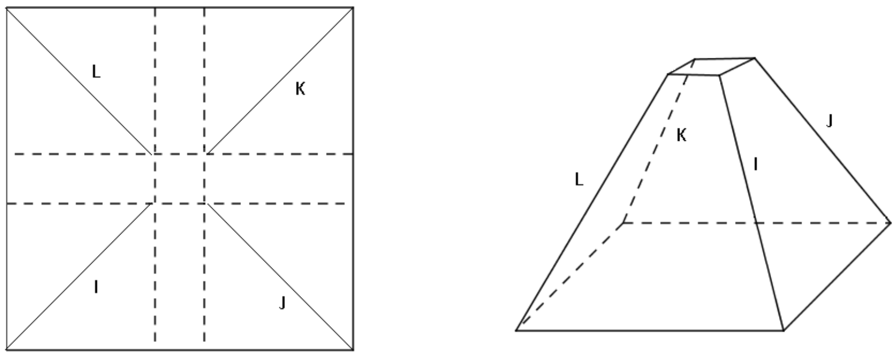



Figura 7.8 Longitudes virtuales.

Para realizar este proceso se trazan en un plano dos líneas rectas las cuales deben estar a 90 grados, Figura 7.5 (b), la línea vertical representa la altura real que tendrá la tolva y la línea horizontal sirve para trazar las líneas que se requieren filtrar.

Por ejemplo, si se requiere filtrar la línea M, se traza en el plano la altura real de la tolva, Figura 7.9 (a).

(a) (b)

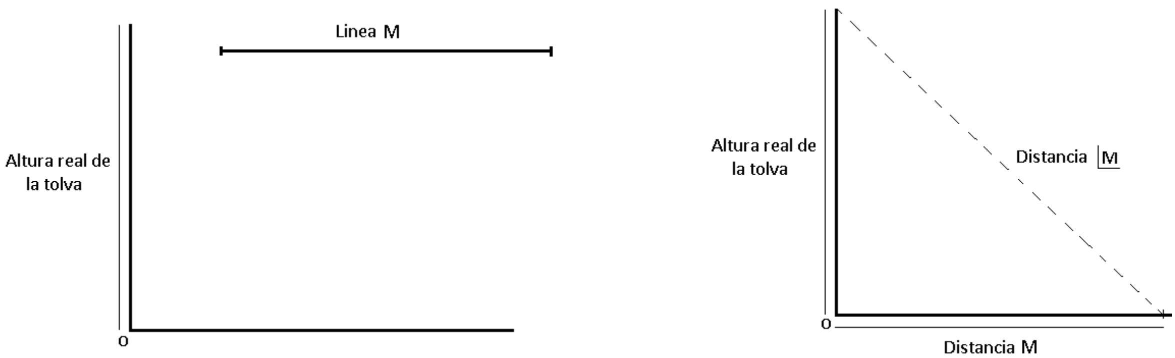



Figura 7.9 Proceso de filtración línea M.

Posteriormente y con el uso del compás se toma la distancia M y se coloca en la línea horizontal del plano partiendo de O, Figura 7.9 (b), al unir el extremo de la distancia M con el extremo de la altura de la tolva, la longitud resultante entre ambos puntos es la longitud real de M y se denota como $\underline{|M}$, esto significa que la línea M esta filtrada y representa la longitud real que será utilizada en el trazo de la plantilla.

Una vez explicado lo anterior se inicia con el filtrado de líneas que se utilizaran en la construcción de la plantilla, para lo cual se generó una discusión entre el aplicador y los alumnos para establecer cuales longitudes eran reales y virtuales, Diálogo 1.2.

**Aplicador:** Vamos a iniciar con el trazado de la plantilla por lo que necesitamos saber que líneas representan las distancias reales y cuáles no.

**Alumnos:** (Discuten entre ellos)…

**Alumno 1:** Las líneas que están así como acostaditas, son las que tenemos que filtrar y las de la base y la boca son las que son reales.

**Aplicador:** ¿Estamos en lo correcto?

**Alumno 2:** Si, solo que también tenemos que filtrar las otras líneas que forman el cuadrito ese… (Refiriéndose a la boca de la tolva).

**Alumno 3:** Si es cierto pero como las líneas que forman la boca de la tolva son las mismas, solo tenemos que filtrar dos líneas las que forman la boca y las que están acostaditas.

**Aplicador:** ok entonces necesitamos filtrar dos líneas verdad… (Con la cabeza realizan la afirmación) entonces ¿Cómo le podemos hacer para identificar las líneas que necesitamos filtrar?

**Alumno 4:** pues pongámosle a las que están acostaditas 1 y a las que forman la boca 2.

**Aplicador:** ok…

**Alumnos:** (Comienzan a realizar diferentes trazos en la hoja de filtrado intentando sacar las distancias reales)… (Se preguntan unos a otros como es)...

Diálogo 1.2 Definición de longitudes reales y virtuales.

Para realizar el filtrado de líneas se propone llamar “1” a las líneas que formarán las aristas de la figura y “2” a las líneas que formarán la boca de la tolva, Figura 7.10 (a).

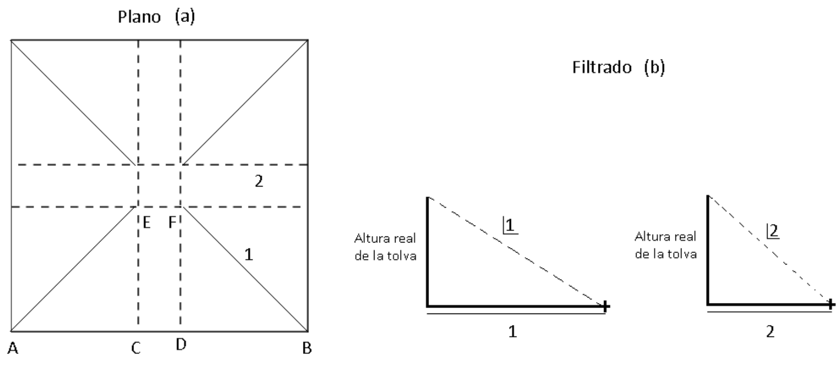



Figura 7.10 Filtrados de líneas 1 y 2.

Una vez que se obtienen las líneas filtradas se empieza con la elaboración de la plantilla, la cual inicia con el trazo de la base, Figura 7.11.

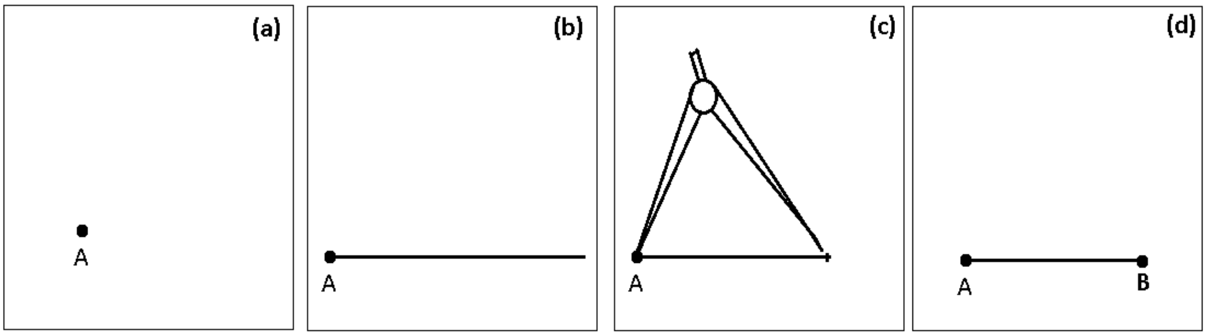



Figura 7.11 Trazo de la recta A-B.

Se coloca un punto arbitrario al que se denomina A, Figura 7.11 (a), después se parte de A y se traza una línea recta Figura 7.11 (b), que mida ligeramente un poco más que la longitud del segmento A-B del plano, Figura 7.10 (a), ahora con el uso del compás se toma la longitud exacta A-B, Figura 7.10 (a), y se transporta a la línea recta construida anteriormente partiendo de A, Figura 7.11 (c), de esta forma se tiene la medida A-B exacta, Figura 7.11 (d), la cual servirá de base para la plantilla y el resto de los trazos.

Una vez que se construye la recta A-B, se continua con el trazo de los puntos C y D como en la figura 7.10 (a), al ser medidas reales ésto se realiza de forma directa con el compás, se toma la distancia A-C, Figura 7.10 (a), y se transporta a la recta A-B partiendo de A y del mismo modo con la distancia D-B, Figura 7.10 (a), partiendo de B Figura 7.12 (a).

Una vez que se trazan los puntos C y D, Figura 7.12 (a), se construyen las rectas C-E y D-F, pero si se recuerda que las medias en el plano son virtuales, entonces se utiliza la longitud de la recta filtrada $l_1$ que representa la distancia real de 1 y es igual a las medidas de C-E y D-F Figura 7.12 (b).

Posteriormente se une el punto A con E y  B con F  y resultan las distancias A-E y B-F que son iguales a $l_2$, Figura 7.12 (c), y para finalizar se une E con F  y resulta ser la distancia E-F que corresponde a un lado de la boca de la tolva Figura 7.12 (d).

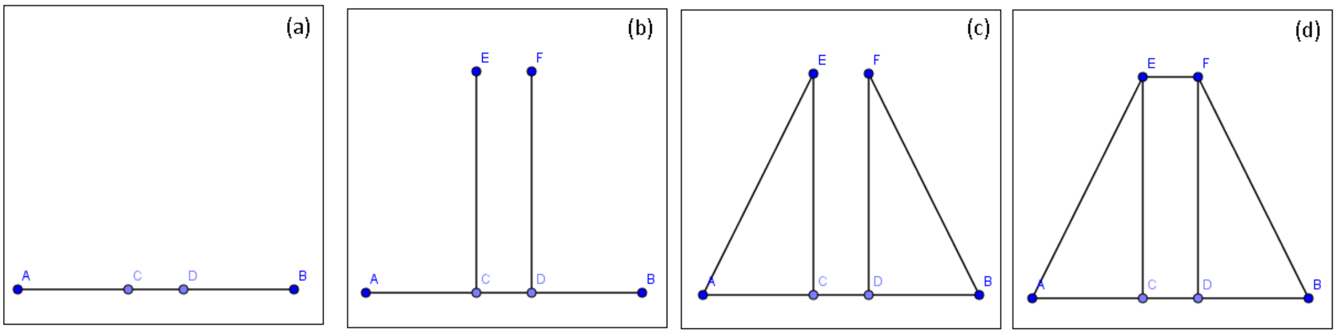



Figura 7.12 Trazo de la plantilla.

En este punto se realiza la aclaración que hasta en este momento solo se ha construido una cara de la tolva, Figura 7.12 (d), por lo que siguiendo con el mismo procedimiento se realizan el resto de las caras hasta que se concluye con la elaboración de la plantilla, Figura 7.13.

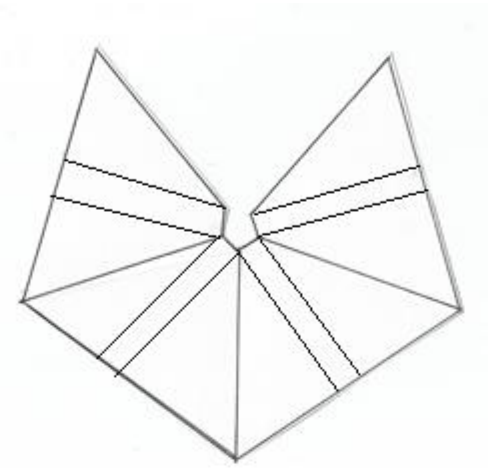


Figura 7.13  Plantilla de la tolva.

Una vez que se termina con la construcción de las plantillas, se recortan  y posteriormente se  forman las tolvas al realizar dobleces a lo largo de las líneas trazadas, *Anexo F*.  Para cerrar con este ejercicio se recogió el material y las tolvas las cuales serían utilizadas en la siguiente actividad. Con esto se concluyó la fase 2, la cual tuvo una duración de 2 horas aproximadamente donde el objetivo principal era la construcción de la tolva con los medios que utilizaría un pailero.

**7.1.3 Fase 3, problematización.** En esta fase, Figura 6.1, número 3 Actividad II, la intención era poder obtener las medidas de las tolvas que se construyeron, y a partir de estas medidas, poder replicar una segunda tolva que pudiera contener el doble o más del contenido (Sustancia granulada) inicial. Así mismo, que los alumnos, a través de una tercera tolva con el triple de las medidas, pudieran encontrar una relación entre los triángulos internos visualizados al interior de las tolvas y las alturas. Esto mediante el uso de estrategias variacionales como la predicción y comparación.

Para continuar con la situación variacional se entregó a los alumnos las tolvas que habían construido y se les proporciono la regla con la finalidad de poder obtener las medidas reales, Diálogo 1.3.

**Aplicador:** Hola chicos buenas tardes…

**Alumnos:** (Responden)… ¡Buenas tardes!

**Aplicador:** Vamos a continuar con la actividad y ahora les pedimos que analicen sus tolvas y nos digan ¿qué medidas podemos obtener?…

**Alumno 1:** ¿Cómo?.... ¿No entiendo?

**Aplicador:** Observen sus tolvas notarán que podemos medir con la regla algunas distancias las cuales nos servirán para determinar las medidas de la tolva.

**Alumno 2:** ¡Ha!... ya entendí debemos medir con la regla verdad los lados de la tolva…

**Aplicador:** Así es, entonces díganme ¿Qué medidas podemos obtener?….

**Alumnos:** (Comienzan a realizar sus mediciones)… (Y comparan sus resultados)…

Diálogo 1.3 Medidas de las longitudes de la tolva.

Las primeras medidas que se obtuvieron fueron las medidas que se encuentran en la Figura 7.14 (a), lado del cuadrado mayor 63.7 mm (Base), lado del cuadro menor 7.1 mm (boca), arista 50 mm, diagonal de la base 90 mm y diagonal de la boca 10 mm.

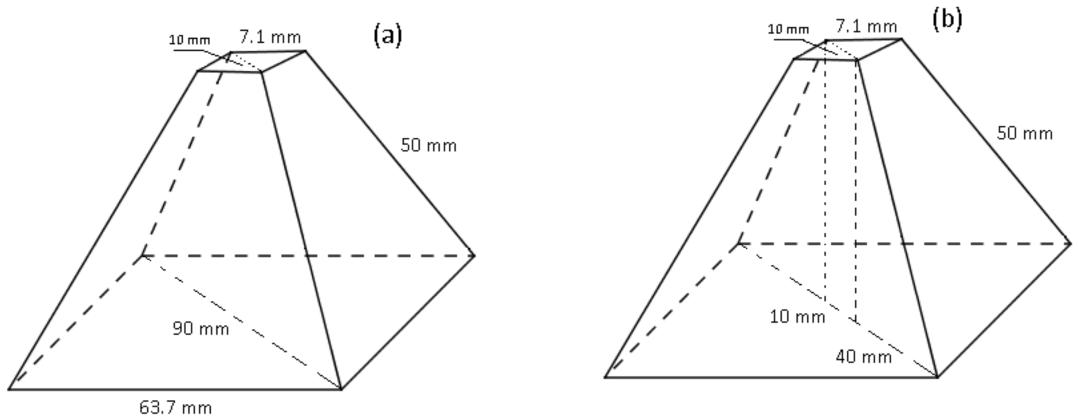



Figura 7.14 Medidas de la tolva 1.

Sin embargo, algunos alumnos se enfocaron en tratar de encontrar la altura a través de la medición directa mediante el empleo de la regla, Figura 7.15, por lo que al estudiar un poco más a fondo la tolva los alumnos pudieron obtener las longitudes que se ilustran en la figura 7.14 (b), pero no así la altura.

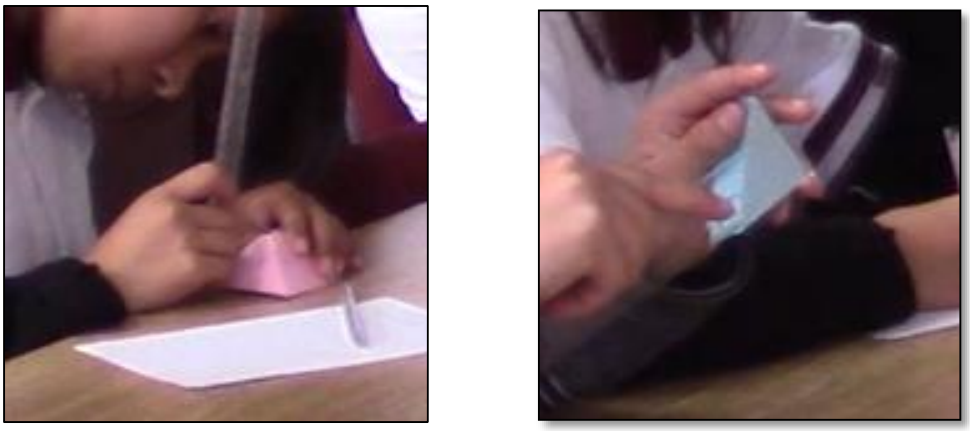


Figura 7.15 Altura de la tolva.

Notemos que en la parte interna de la tolva se formó un triángulo rectángulo, ver la Figura 7.16, el cual se encuentra relacionado directamente con las características de la tolva tales como la capacidad de almacenamiento, el grado de inclinación de sus paredes y la rapidez de vaciado.

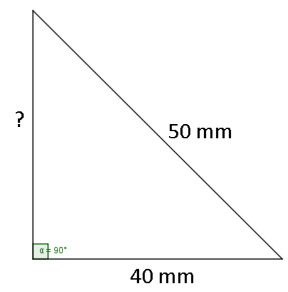



Figura 7.16 Triángulo rectángulo interno 1
visualizado en la tolva de la Figura 7.14 (b).

Una vez visualizado el triángulo rectángulo interno en la tolva, Figura 7.16, se determinó la cantidad de sustancia granulada que podía contener la tolva, *Anexo G*. Esta parte se puso muy interesante porque los alumnos querían verificar que efectivamente la cantidad de sustancia granulada que podía contener una tolva se podía vaciar en cualquier otra de sus compañeros y cubrir la misma superficie. Aprovechando el interés de los alumnos por la actividad y también que ya estaban más dispuestos a participar se continuo con la actividad, Diálogo 1.4.

***Aplicador:*** *¿Tienen alguna duda chicos sobre lo que hemos realizado hasta ahora?*

***Alumnos:*** *(Responden rápidamente)…. ¡No!*

***Aplicador:*** *ok, resulta que por petición del cliente debemos construir otra tolva que pueda almacenar el doble del contenido inicial ¿Qué tendríamos que hacer?*

***Alumnos:*** *(Platican entre ellos)… (Se ven unos a otros)…*

***Aplicador:*** *¿Qué opinan?*

***Alumno 1:*** *Pues si queremos que contenga el doble, debemos hacer una tolva más grande.*

***Alumno 2:*** *Así es, debemos hacer una tolva con el doble de las medidas.*

***Aplicador:*** *¿Seguros de lo que están diciendo?*

***Alumnos:*** *(Se quedan pensativos)… (Se miran entre ellos)… (Unos alumnos opinan que sí, otros que no)*

***Aplicador:*** *Si no están seguros, lo que tenemos que hacer es realizar la tolva con el doble de las medidas y verificar.*

Diálogo 1.4 Selección de medidas de la tolva 2.

Al término de la discusión, se les proporcionó nuevamente a los alumnos el material para que realizaran los trazos y la plantilla para la construcción de una segunda tolva, la cual debería de tener el doble de medidas y con ello, podrían verificar que en realidad esa segunda tolva podía contener el doble de sustancia granulada o más.

El material que se les entregó fue regla, compás, lápiz y papel donde realizarían los trazos. Al tener las medidas de la primera tolva se les facilitó la realización de la segunda tolva, primeramente realizaron el plano con el doble de las medidas, filtraron las líneas correspondientes, realizaron las plantillas y elaboraron las tolvas, *Anexo H*. Posteriormente midieron la tolva y obtuvieron las medidas de la Figura 7.17 (a), lado del cuadrado mayor 127.4 mm (Base), lado del cuadro menor 14.2 mm (boca), arista 100 mm, diagonal de la base 180 mm y diagonal de la boca 20 mm.

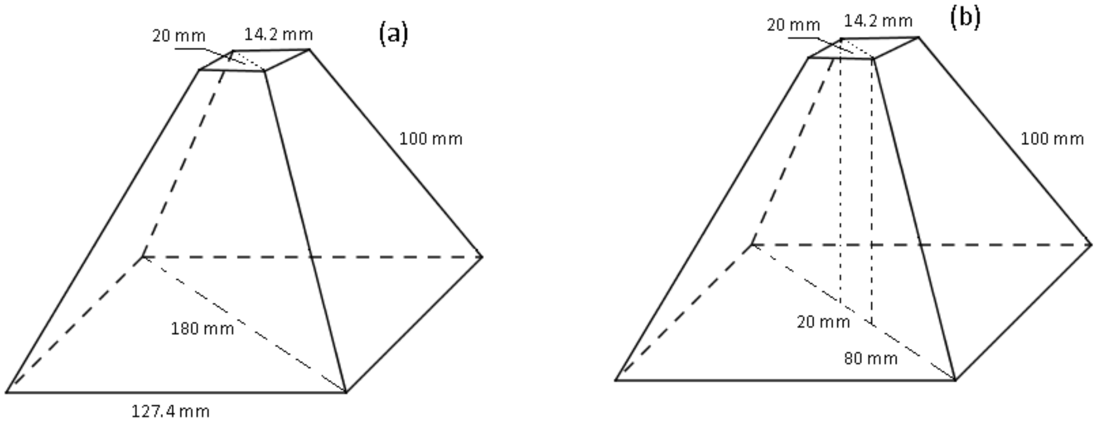



Figura 7.17 Medidas de la tolva 2.

Al tiempo en que se realizaban las mediciones de la tolva, un alumno comentó que en el triángulo rectángulo que se formaba en la parte interna de tolva, Figura 7.17 (b) también sucedía lo mismo, las medidas también se duplicaban, Figura 7.18.

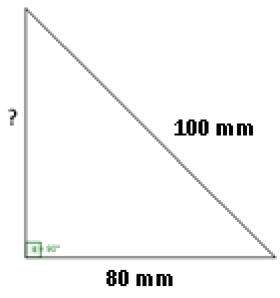



Figura 7.18 Triángulo rectángulo interno 2.

De la misma forma que en el caso anterior, también verificaron con la sustancia granulada que la tolva efectivamente podía almacenar el doble del contenido inicial.

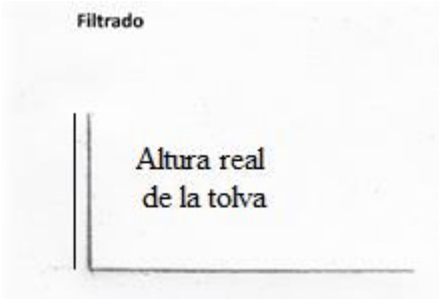
Una vez que los alumnos elaboraron sus conclusiones se les preguntó ¿Qué pasaría si requerimos de una tolva que almacene el triple del contenido inicial?, y de manera inmediata todos los alumnos se aventuraron a decir que se tendría que construir una tolva con el triple de las medidas. Para reducir el tiempo en la realización de la situación, se les proporcionaron cinco tolvas que previamente habían sido construidas con el triple de las medidas para que ellos pudieran medirlas y corroborar que efectivamente se podía almacenar el triple del contenido inicial.

Sin embargo, cuando los alumnos experimentaban con las tolvas, también se percataron que las distancias del triángulo interno también se habían triplicado, por lo que se les pidió que llenaran la tabla, ver la Figura 7.19.

| TOLVAS | ALTURA DEL TRIANGULO | BASE DEL TRIANGULO | LADO DEL TRIANGULO |
|---|---|---|---|
| UNO | ? | 40 mm | 50 mm |
| DOS | | | |
| TRES | | | |
| CUATRO | | | |
| CINCO | | | |
| SEIS | | | |

Figura 7.19 Medidas de los triángulos rectángulo.

El único dato que les faltaba era la altura de la tolva inicial, de manera que se les indicó que esta medida la podían obtener del diagrama de filtrado, ver la Figura 7.20, previo el análisis de cómo se comportaban los datos correspondientes a la altura con respecto a las longitudes de los lados de los triángulos rectángulos.




7.20 Altura real de la tolva.

Esto, como se señaló anteriormente en el apartado donde se explica el proceso de filtrado página 70, se mencionó que la altura real se obtiene del plano de filtrado, por lo que si se mide directamente con la regla, se puede conocer esta longitud. Por último como parte de la recolección de los datos, también se les pidió que dibujaran los tres triángulos rectángulos en un mismo plano para poder analizar y observar su relación.

Al finalizar con estos ejercicios se les recogió el material y se dio por terminada la actividad la cual tuvo una duración aproximada de 2 horas.

**7.1.4 Fase 4, experimentación.** En la última fase, Figura 6.1, número 3 Actividad III, de la situación variacional, se aplicó una última actividad en la que se presentaban tres tolvas que fueron construidas previamente, donde los alumnos deberían encontrar cuál de las tolvas era la más adecuada para un vaciado más rápido.

Para iniciar la actividad se les proporcionó la sustancia granulada (arroz) y las tolvas, para que en parejas los estudiantes fueran experimentando y realizando mediciones de los tiempos de vaciado. A partir de los datos recabados, los alumnos plantearon algunas conclusiones respecto a la relación entre el vaciado y la forma de las tolvas.

Las tolvas, ver la Figura 7.21, *Anexo I*, fueron construidas de modo que la altura fuese constante en las tres, pero el grado de inclinación diferente y, de esta manera, poder garantizar en el triángulo rectángulo interno variaciones en sus aristas, lo cual a su vez implica diferente rapidez en el vaciado de la sustancia granulada.

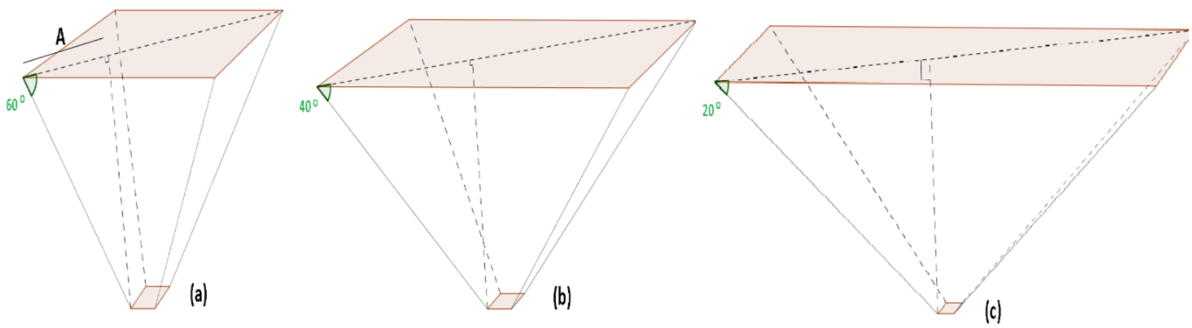



Figura 7.21 Tolvas.

Mantener la altura constante en las tolvas y plantear la problemática de lograr un vaciado más rápido conlleva a modificar un lado del triángulo rectángulo interno de la tolva con objeto de variar la inclinación de las paredes, ver el segmento A en la Figura 7.21 (a). Sin embargo, al modificar este valor, automáticamente las otras aristas también se modifican por la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo debido a la “RP”.

Al inicio de esta última fase se organizó al grupo de alumnos en parejas con la intención de que mientras uno de los miembros de la pareja experimenta con el vaciado de las tolvas, al llenar la tolva con la sustancia granulada y tapar la boca inferior, el otro lleva un registro del vaciado. Una vez terminado el proceso de medición, los alumnos tenían que intercambiar sus roles y llevar a cabo nuevamente la medición del tiempo de vaciado. A través de la discusión de la pareja, los alumnos tenían que señalar cuál de las tolvas sería la más adecuada según las características solicitadas al principio.

Una vez que los estudiantes habían determinado cuál era la tolva que ofrecía un vaciado más rápido, de manera grupal se generó una discusión para reflexionar sobre la construcción de la tolva, pero más sobre el comportamiento del triángulo rectángulo que es posible visualizar al interior de la tolva. Al término de la discusión grupal y a manera de cierre de la actividad se aplicó un cuestionario, *Anexo E*, para poder analizar el alcance de la situación variacional y ver si el objetivo principal había sido alcanzado.

# RESULTADOS DE LA SITUACIÓN VARIACIONAL

CAPÍTULO VIII

**Capítulo 8**

# RESULTADOS DE LA SITUACIÓN VARIACIONAL

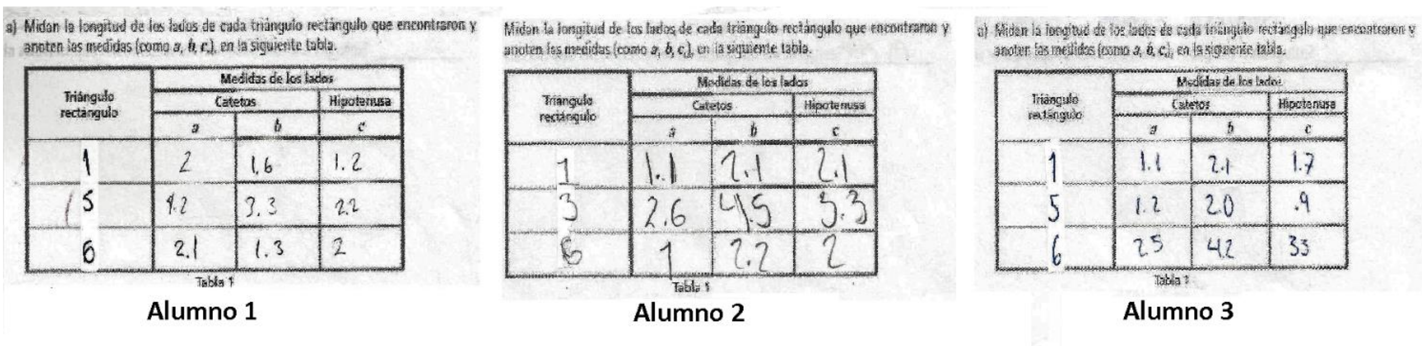
## Introducción

Con la implementación de la situación descrita anteriormente, y la resolución de ésta, se esperaba que los estudiantes pudieran resignificar la RP existente entre los lados de un triángulo rectángulo.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en las actividades realizadas por los alumnos en cada una de las fases de la situación variacional. Se presentan las interpretaciones de los resultados en recuadros para facilitar una interpretación al lector.

## 8.1 Resultados de la Fase 1: Recolección de información

En la aplicación de la actividad I, 12 de los 15 estudiantes presentaron dificultades para identificar los triángulos rectángulos de los expuestos en la Figura 7.2, en el sentido de que todos ellos marcaron que el triángulo número 3 era rectángulo. En el inciso (a), ver la Tabla 1 en la Figura 7.3, los alumnos registraron las mediciones de la longitud de las aristas de los triángulos rectángulos y en general todos respondieron correctamente, considerando que las medidas de los triángulos recaían en decimales las medidas variaban por algunas décimas debido a errores de medición como por ejemplo el grosor de la punta del lápiz o mal fijado de la regla. Otro punto que se pudo observar es que 3 de los estudiantes de los cuales 2 habían marcado correctamente los triángulos rectángulos, no identificaron correctamente la hipotenusa, los resultados de estos tres estudiantes se muestran en la Figura 8.1, los 12 estudiantes restantes y sin mencionar nada al respecto ordenaron de menor a mayor los datos requeridos.



a) Midan la longitud de los lados de cada triángulo rectángulo que encontraron y anoten las medidas (como *a*, *b*, *c*), en la siguiente tabla.

| Triángulo rectángulo | Medidas de los lados | | |
|---|---|---|---|
| | Catetos | | Hipotenusa |
| | *a* | *b* | *c* |
| 1 | 2 | 1.6 | 1.2 |
| 5 | 4.2 | 3.3 | 2.2 |
| 6 | 2.1 | 1.3 | 2 |

Tabla 1

Alumno 1

| Triángulo rectángulo | Medidas de los lados | | |
|---|---|---|---|
| | Catetos | | Hipotenusa |
| | *a* | *b* | *c* |
| 1 | 1.1 | 2.1 | 2.1 |
| 3 | 2.6 | 4.5 | 3.3 |
| 6 | 1 | 2.2 | 2 |

Tabla 1

Alumno 2

| Triángulo rectángulo | Medidas de los lados | | |
|---|---|---|---|
| | Catetos | | Hipotenusa |
| | *a* | *b* | *c* |
| 1 | 1.1 | 2.1 | 1.7 |
| 5 | 1.2 | 2.0 | .9 |
| 6 | 25 | 42 | 33 |

Tabla 1

Alumno 3

Figura 8.1 Hipotenusa incorrecta

Es importante mencionar que los estudiantes identificaron los triángulos rectángulos apoyándose únicamente en los aspectos visuales prescindiendo de las propiedades geométricas que hubiesen podido ayudarles a identificar los triángulos rectángulos. Por otro lado, en el inciso (b) de la misma actividad, se pedía completar la Tabla 2 que se ilustra en la Figura 7.4, los estudiantes tuvieron diferentes dificultades, por ejemplo, no entendieron cuál era el significado de $a^2$ y $b^2$, aun teniendo el valor de *"$a$"* y de *"$b$"* no identificaban que $a^2 = a \cdot a$ o $b^2 = b \cdot b$. También se observó que de los 15 estudiantes 9 cometieron el error de que una vez que habían realizado la operación $a^2 + b^2 = c^2$ querían continuar elevando al cuadrado el resultado, encontrando que este nuevo resultado $(a^2 + b^2)^2$ no coincidía con el valor de $c^2$. La mayoría de los estudiantes también presentaron problemas con el manejo de las cantidades con decimales y solamente un estudiante pudo completar de manera correcta la Tabla 2.

Por otro lado en el inciso (c), los estudiantes no pudieron encontrar una relación entre los resultados obtenidos de $a^2 + b^2$ y $c^2$, y solamente un estudiante pudo responder a este cuestionamiento sin mencionar qué relación existía. Las respuestas fueron muy variadas, por ejemplo, tres estudiantes justificaron que si se redondeaban los decimales en los datos recabados podría existir una relación, otro estudiante señaló que la relación debería existir porque$a^2 + b^2 = c^2$, sin embargo, el alumno no comprendió por qué los resultados no coincidieron. Otro estudiante menciono que $a^2 + b^2$ es parecido $c^2$ pero no igual, *Anexo K*.

Por último en la segunda parte de la actividad I, inciso (a) donde se indica que comparen sus respuestas, solamente 3 alumnos contestaron correctamente, señalando al triángulo escaleno como respuesta, sin embargo, en el inciso (b), ningún estudiante contestó de forma correcta e incluso 6 alumnos decidieron omitir sus respuestas.

En la actividad II, ver el *Anexo D*, todos los estudiantes respondieron la pregunta 1, *Anexo L*, ocho de ellos respondieron que sí conocían el Teorema de Pitágoras y lo describieron matemáticamente como $a^2 + b^2 = c^2$e incluso 2 de ellos escribieron sus variantes $a^2 = c^2 - b^2$ $y + b^2 = c^2 - a^2$. El resto mencionó sí conocerlo como una fórmula pero no la describieron. Cabe mencionar que un estudiante respondió no conocerlo. La pregunta número 2 de la actividad II que se muestra en el *Anexo D*, cinco estudiantes respondieron que si conocían donde se podía utilizar el Teorema de Pitágoras, *Anexo M***,** y ejemplificaron que se utilizaba para "calcular las sombras", "las alturas" y para conocer "la medida de las escaleras recargadas en la pared". Cuatro estudiantes respondieron que se utilizaba en la materia de matemáticas y el resto desconocía su utilización.

En esta misma actividad II, *Anexo D*, pero en los problemas de aplicación pregunta 3 y 4, seis estudiantes contestaron de forma correcta aplicando la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$ y obtuvieron como respuesta 5 y 10 metros respectivamente. Por otro lado, seis estudiantes directamente contestaron que no sabían cómo responderlo y otros tres estudiantes lo intentaron pero cometieron errores al momento de realizar las operaciones que indica fórmula.

En el siguiente recuadro se presenta una breve reflexión respecto a los resultados obtenidos en esta primera etapa.

| |
|---|
| Las evidencias anteriores muestran que los estudiantes presentaron dificultades en la comprensión del teorema de Pitágoras. Se puede afirmar que algunos estudiantes pueden operar la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$, sin embargo desconocen cuál es la relación que expresa dicha fórmula. Solamente los identifican como valores numéricos, pero no como una relación entre los lados de un triángulo rectángulo. Esto se pudo evidenciar en las preguntas 3, 4 y también cuando de manera esporádica se les pregunto *¿Qué pasaría si el pino fuera más alto?* al mostrarles la imagen de la pregunta 3 del cuestionario I, y se esperaba que dijeran que la sombra iba ser más larga y por esto mismo taparía completamente el balón, sin embargo los estudiantes tuvieron dificultades para responder que pasaría, y no fue hasta que se les dio el valor numérico de la atura del pino y el valor numérico de la longitud de la sombra y de este modo pudieron responder al cuestionamiento anterior. |

## 8.2 Resultados de la Fase 2: El proceso de construcción de la tolva

En esta fase, se pudo observar que los estudiantes prestaron mucha atención a la actividad debido a que era algo diferente a lo que comúnmente ellos realizan en aula de clases. Se explicaron dos cosas claves para la construcción de las tolvas como es la técnica de visualización y el proceso de filtrado.

Es importante mencionar que no se presentaron dificultades en la identificación y comprensión de la técnica de visualización ni en el proceso de filtrado, sin embargo se tuvieron dificultades en los trazos con el compás porque estos no eran herramientas de precisión y las puntas se movían al momento de realizar alguna rotación en el trazo. Para la realización de las plantillas se filtraron las líneas 1 y 2 que se muestran en la Figura 7.10 (a). En un principio los estudiantes tuvieron dificultades para trazar la plantilla porque no sabían cómo transportar las distancias con el compás (actividad natural para los paileros) y por otro lado confundían las líneas filtradas 1 y 2. Una vez que los estudiantes también comprendieron la técnica de trazado fue muy fácil construir la plantilla porque seguían las instrucciones, sin embargo hubo un estudiante que se quiso adelantar al proceso y cometió el error de replicar el plano que es diferente a la plantilla.

En el siguiente recuadro se presenta una breve reflexión respecto a los resultados obtenidos en esta segunda etapa.

> En esta fase se pudo observar que se captó la atención de los estudiantes desde un inicio, porque se les explicó la importancia y la utilidad de la pailería en nuestra sociedad y ellos pudieron relacionar la necesidad de la construcción de la tolva. Los estudiantes tuvieron dificultades en la construcción de las plantillas por diferentes factores como por ejemplo la precisión del compás o al transportar las distancias del plano a la plantilla; sin embargo, en este apartado se constató que los estudiantes identificaron y aplicaron correctamente la técnica de visualización al momento de construir las tolvas, mismo que no se puede garantizar con el trazado de figuras planas como se haría de forma tradicional. Como se mencionó anteriormente, este proceso es fundamental para la construcción de estructuras metálicas. Por último el proceso de filtración.

## 8.3 Resultados de la Fase 3: la problematización

En esta sección los estudiantes obtuvieron las medidas originales de la tolva I, construida en la etapa anterior, ver la Figura 7.14 (a), de los 15 estudiantes que asistieron a esta sesión ninguno tuvo dificultad para medir estas distancias con la regla e incluso 3 de ellos se enfocaron a encontrar la altura de la tolva, dado que no se podía obtener de forma directa, esto los llevo a estudiar la parte interna de la tolva un poco más a detalle. Algunos estudiantes implementaban procedimientos inadecuados como medir la altura por la parte interna de la tolva, ver la Figura 8.2 (a), otros estudiantes querían aproximar la altura de la tolva  midiéndola por la parte externa de la tolva poniendo la regla de forma vertical, Figura 8.2 (b), sin embargo estos procedimientos no permiten obtener la altura real de la tolva.

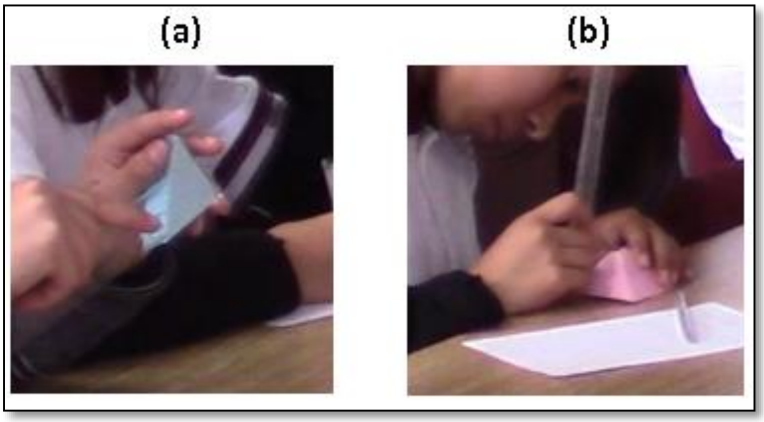



Figura 8.2 Error al medir la altura

Estas aproximaciones ayudaron a los estudiantes a interpretar que dentro de la tolva se formaba un triángulo rectángulo, Figura 7.14 (b), de donde se conocía la arista, y la base del triángulo se podía deducir de la diagonal del cuadrado mayor. Una vez que se obtuvo el triángulo rectángulo interno de la tolva, Figura 7.16, dos estudiantes querían aplicar el teorema de Pitágoras para obtener la altura,  sin embargo  se les indicó que por el momento no se podía  utilizar el teorema y qué esto no era impedimento para continuar con la situación.

Posteriormente, los estudiantes estimaron la cantidad de sustancia granulada que podía contener esta tolva y cada uno de ellos verificó que efectivamente la misma cantidad de sustancia granulada que podía contener la tolva, se podía contener en cualquier otra tolva de las que habían construido sus compañeros, *Anexo G*. Cabe destacar que Esta forma de trabajar con material concreto hizo que los estudiantes estuvieran más interesados en la actividad.

Para la elaboración de la segunda tolva los estudiantes no presentaron dificultades, elaboraron el plano con el doble de las medias, filtraron las líneas y trazaron las plantillas de la misma manera que se hizo en el procedimiento de la tolva 1. Después calcularon las medidas de la segunda tolva, ver la Figura 7.17 (a), y también del triángulo rectángulo interno de la tolva 2. Posteriormente con la sustancia granulada verificaron sí efectivamente esta tolva 2 podía contener el doble o más del contenido que podía almacenar la tolva 1, al finalizar los estudiantes llegaron a la conclusión de que si se duplicaban las medidas de la tolva 1, la capacidad de almacenamiento también se duplicaba.

Posteriormente se les preguntó ¿Qué se requería para que una tercera tolva almacenara el triple de contenido inicial?, por lo que los estudiantes predijeron que solamente necesitaban triplicar las medidas. No fue necesario hacer una tercera tolva, pero si se les proporcionaron 5 tolvas con el triple de las medidas para que los estudiantes verificaran que efectivamente esta última podía contener el triple del contenido inicial o más.

Se les pidió que completaran la tabla que se ilustra en la Figura 7.19, y los resultados fueron que todos los estudiantes pudieron completar de forma correcta la tabla. Los estudiantes rellenaron los datos de la base del triángulo y arista de las dos primeras tolvas, con los datos obtenidos de los triángulos rectángulos internos de las tolvas 1 y 2. Al preguntarles sobre una tercera tolva que pudiera almacenar el triple de contenido inicial, los estudiantes predijeron que se tenían que triplicar las medidas de la tolva y esta misma analogía utilizaron para completar la tabla con las tolvas 4, 5 y 6.

Los estudiantes observaron que al duplicar las medidas de la tolva 1, el comportamiento del triángulo rectángulo interno de la tolva 1, Figura 7.16, también tuvo este comportamiento y también las medidas se duplicaron, Figura 7.18, por lo tanto para completar la tabla utilizaron este mismo razonamiento. Un estudiante hizo referencia nuevamente a la altura, diciendo que faltaba este dato y entonces, el aplicador intervino y pregunto a los estudiantes *¿Qué piensan que sucede con la altura aun sin conocerla?*, y los estudiantes predijeron que debería seguir también el mismo patrón, mencionaron que no conocían la altura, pero de lo que sí estaban seguros al comparar las alturas es que la altura también variaba porque se podía observar en la construcción de las tolvas. Al final se les indicó que la altura de la primera tolva la podían obtener de forma directa en el plano de filtrado y de esta forma predecir el resto de las alturas y comprobar si se cumplía lo que se estaba aseverando. Fue de este modo como los estudiantes completaron la tabla Figura 7.19. Con la finalidad de describir los resultados de la tabla anterior y que se pudiera observar de manera gráfica la relación, se les pidió que dibujaran los 3 triángulos rectángulos internos de las tolvas 1, 2 y 3 en un mismo plano, para que pudiesen comparar las dimensiones de cada tolva, Figura 8.3, y de esta manera en forma visual poder identificar esta relación, *Anexo O*.

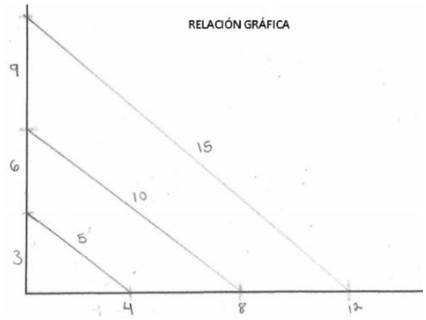



Figura 8.3 Descripción grafica tabla 7.19.

En el siguiente recuadro se presenta una breve reflexión respecto a los resultados obtenidos en esta tercera etapa.

Los estudiantes primeramente tuvieron dificultades para encontrar la altura de la tolva 1 porque no se podía obtener de forma directa; sin embargo, los diferentes tipos de errores que presentaron sirvieron para que realizaran un análisis más profundo en la tolva y esto valió para identificar el triángulo rectángulo interno de la tolva 1 que era parte esencial para el desarrollo de esta situación. Construyeron la tolva 2 sin problemas y de igual manera identificaron el triángulo rectángulo y obtuvieron las medidas. En ambos casos verificaron con la sustancia granulada y comprobaron que se cumplía lo que se pedía en cada una de ellas. Al experimentar con la tercera tolva y corroborar las medidas, se pudo observar que los estudiantes establecieron una relación entre los triángulos rectángulos porque al pedirles que completaran la tabla figura 7.19, debido a la variación que los triángulos presentaron en sus lados y compararlos, pudieron predecir el comportamiento también de los valores de las longitudes de las tolvas 4, 5 y 6

Por otro lado y sin conocer la altura pudieron predecir el comportamiento de ésta y los estudiantes se justificaban en que se sigue un patrón entre la base y la arista misma que la altura debería respetar. Esta relación también la pudieron apreciar cuando dibujaron los tres triángulos rectángulos en un mismo plano, esta acción codujo a los estudiantes a que de manera visual y gráfica compararan los tres triángulos rectángulos y quedaran más convencidos del comportamiento de la altura. Por último se les indicó a los estudiantes donde podían obtener la altura de la tolva 1 y con esta los estudiantes pudieron completar el resto de la tabla y confirmar lo que en un principio estaban prediciendo.

## 8.4 Resultados de la Fase 4: la experimentación

Al experimentar con las tres tolvas y al medir los tiempos de vaciado, los estudiantes determinaron que la tolva más adecuada fue la tolva (b) que se muestra en la Figura 7.20, ya que ésta se vaciaba en su totalidad en un tiempo promedio 8.67 segundos.

La tolva (a) que se muestra en la Figura 7.20, debido a la inclinación de sus paredes y a la rapidez con la que la sustancia granulada salía de la tolva, en todos los casos que se experimentó con esta tolva se saturaba la boca por donde salía la sustancia granulada, no permitiendo con ello el vaciado que se estaba buscando.

En la tolva (c), figura 7.20, la sustancia granulada no salía por completo debido a que el grado de inclinación de las aristas fue mayor, por consecuencia, se quedaba sustancia en la tolva. Los estudiantes también pudieron determinar que el triángulo rectángulo interno en cada una de las tolvas había sufrido modificaciones debido a que existe una relación entre los lados de un triángulo rectángulo y se aprecia naturalmente al momento en que se comparan las tres tolvas.

Comentaron que al mantener la altura constante en las tolvas y al necesitar más inclinación para un vaciado más rápido, el valor de la base también se modificaba, entre más inclinada la arista más grande la distancia de la base del triángulo rectángulo. La última pregunta que se les realizó fue ¿Qué pasaría si modificas un lado del triángulo rectángulo?, las respuestas fueron muy variadas, ver el *Anexo P*, sin embargo intentaron justificar al señalar que existe una relación entre los lados del triángulo y que es debido a la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo que era imposible en un triángulo rectángulo modificar uno de sus lados sin que uno de los otros dos o los dos se modificaran.

En el siguiente recuadro se presenta una breve reflexión respecto a los resultados obtenidos en esta última etapa.

En esta última actividad se pudo observar que debido al proceso de experimentación donde se observaron claramente las estrategias variacionales *estimación y comparación*, los estudiantes identificaron que existe una relación entre los lados de un triángulo rectángulo. La idea de realizar un vaciado más rápido llevo a los estudiantes a visualizar diferentes inclinaciones en las tolvas que inciden directamente en el comportamiento del triángulo rectángulo que es posible visualizar al interior del triángulo. Es importante mencionar que los estudiantes estuvieron atentos a esta actividad por el sentido funcional de la tolva y fue de esta manera en como ellos se interesaron en el estudio de los triángulos internos de la tolva y de esta manera poder resignificar la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo.

En el siguiente capítulo se presenta el análisis y la discusión mediante el empleo del marco teórico de la Socioepistemología, que nos permitirá abordar los mecanismos que permitieron la resignificación de la RP.

# ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

## CAPÍTULO IX

**Capítulo 9.**

## ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

### Introducción

En el presente capítulo se realiza el análisis y la discusión de los resultados obtenidos en la situación variacional teniendo a la socioepistemología como marco interpretativo principal. Se describe la unidad de análisis que se identificó en esta situación variacional, la cual permitió que los estudiantes resignificaran la RP. También se describen las estrategias variacionales involucradas en la situación variacional que permitieron su resolución de la situación.

### 9.1 Análisis y discusión

La situación variacional que se describió en este trabajo se encuentra apoyada en una socioepistemología de la RP. La situación variacional abordó el contexto de la relación entre los lados de un triángulo rectángulo señalada por el Teorema de Pitágoras, a través de la construcción de tolvas poliédricas.

Los elementos principales se refirieron al uso del comportamiento de los lados de un triángulo rectángulo visualizado en la tolva poliédrica para la construcción significativa de la RP, así como a las estrategias variacionales como la predicción, comparación y estimación, como una práctica intencional que guió la resignificación de dicho conocimiento. La práctica de construcción de distintas tolvas sirvió como ejemplo para dar cuenta de cómo se articulaban dichos elementos.

El efecto de la enseñanza tradicional del teorema de Pitágoras, que presenta dicho teorema como una simple identidad o fórmula y con un sentido de operatividad matemática sin relación alguna en el contexto real del estudiante, quedó evidenciada a partir de los resultados que se obtuvieron en la prueba inicial actividad I, *Anexo C*, y Actividad II, *Anexo D* .

Los resultados ponen en evidencia que los estudiantes tienen habilidades algebraicas para operar la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$, sin embargo, presentan dificultades para asignar las variables *a*, *b* y *c*, a los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo y por lo mismo no observan la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo llevándolos a diferentes tipos de errores de interpretación como por ejemplo la identificación errónea de los catetos o a la incapacidad de no poder visualizar la relación entre los catetos a, b y c del triángulo rectángulo por ejemplo, al cambiar *a* no advierten el cambio simultaneo de *b* y *c*.

A partir de la inclinación de las paredes de cada una de las tolvas y compararlas entre ellas, y el tiempo de vaciado, desarrolla una unidad de análisis, la cual inicia no sólo con la tarea explicita de realizar una *predicción*, si no desde la misma descripción del vaciado de la tolva que permite entender y reconocer la forma óptima de realizar el vaciado de la tolva. La unidad de análisis es la coordinación de las estrategias variaciones empleadas en la resolución del problema, la cual permite la visualización y la resignificación de la RP.

La unidad de análisis tendrá que contener en sí misma, simultáneamente, información del todo y depender completamente del tipo de vaciado que se presenta en la tolva. Por tanto, está unidad de análisis plantea una relación dialéctica entre los análisis de tipo local y global para que la RP, en el vaciado de la tolva, sea relevante. Esta unidad de análisis es similar a la señalada en un estudio previo de Socioepistemología donde se propone un estudio de la noción de periodicidad (Buendía, 2006)

La unidad de análisis a la que se hace referencia es desarrollada por los estudiantes a través de (ver como se está vaciando la tolva) los diferentes tipos de vaciado observados según la inclinación de las paredes de la tolva poliédrica. En la Figura 9.1 se representa la triada local, global y RP relevante como la unidad de análisis que permite que el estudiante dote de significado la RP, realizando una conexión entre lo que ya sabe y lo que está construyendo lo que conduce a una resignificación de la RP.

Esta forma en que los estudiantes resignifican la RP mediante el empleo de estrategias variacionales, es una manera de tener al estudiante activo y que de manera progresiva el estudiante vaya construyendo su propio conocimiento a diferencia de la clase tradicional donde simplemente es una persona receptora sin involucrarse en las actividades de aprendizaje.

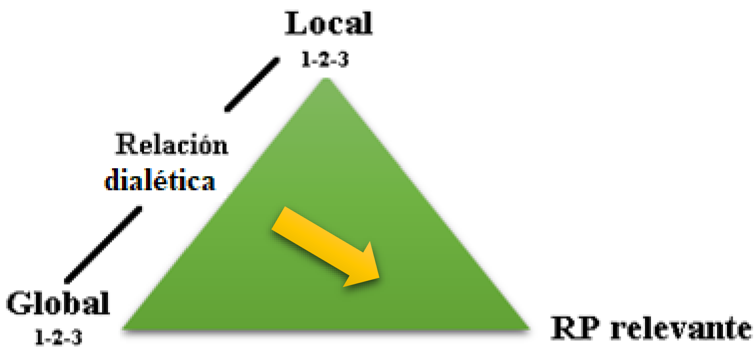



Figura 9.1 Esquema de la unidad de análisis.

En dicha figura, lo local se refiere a las distintas inclinaciones que tienen las paredes de la tolva, Figura 9.2, en los 3 casos. En el caso 1, la tolva tiene una inclinación menor que las otras dos, en el caso 2 la tolva tiene la mayor inclinación de las 3 y por último la tolva número tres, tiene una inclinación media ni muy abierta ni muy cerrada.

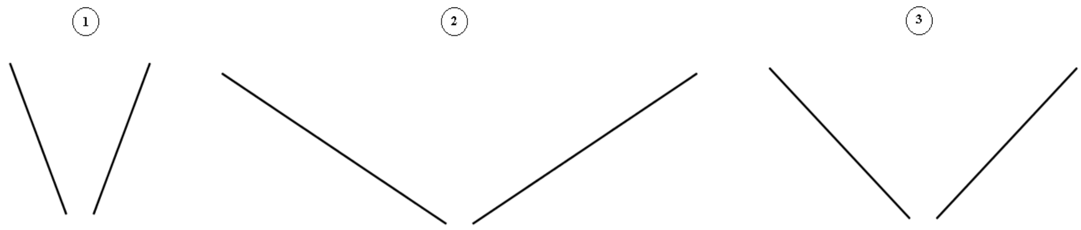



Figura 9.2 Inclinación de las paredes de la tolva.

Por otro lado, lo global se refiere al vaciado que ocurre de manera conjunta en los casos locales Figura 9.3. En el caso 1, la tolva al tener menos inclinación no permite que la sustancia granulada salga por completo y la boca de la tolva se satura. En el caso 2 la tolva debido a que las paredes casi están en 180º no permite que la sustancia granulada salga por completo al igual que en el caso 1, por lo tanto la sustancia granulada se quede en las paredes de la tolva. Por último en el caso 3, la tolva tenía la inclinación adecuada para que el tipo de sustancia granulada con la que se estaba trabajando saliera por completo.

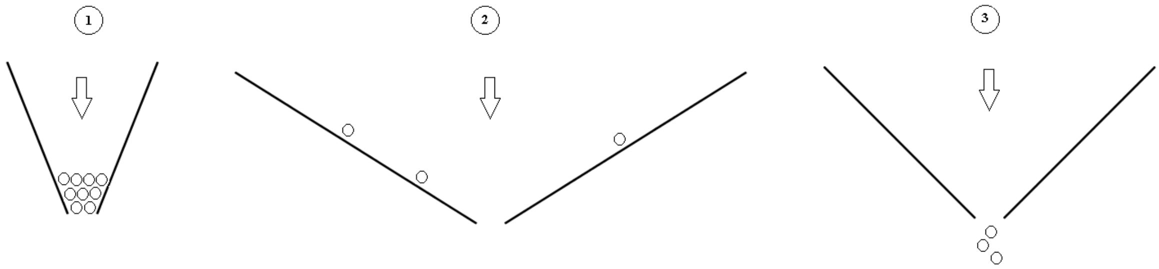



Figura 9.3 Vaciado de las tolvas.

De este modo la RP se vuelve relevante a través de la relación dialéctica global-local figura 9.4.

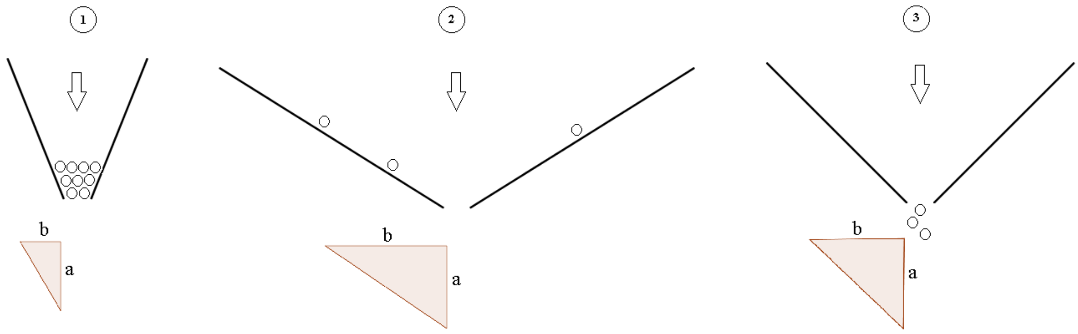



Figura 9.4 RP relevante.

Pero, *¿En qué momento la RP se hace relevante para el estudiante?* La RP, cobra relevancia al momento en que los estudiantes empiezan a buscar la tolva con las características soliciadas (rapidez en el vaciado). Primero empiezan a ver cada una de las tolvas por separado, prediciendo simplemente por la inclinación cual podría tener esta característica. Sin embargo, al empezar a experimentar entra en juego el vaciado lo que después interpretan que no se puede analizar por separado la inclinación y el vaciado. Esto conlleva a que los estudiantes con la necesidad de encontrar la tolva adecuada doten de significado y utilidad esta práctica. Al mismo tiempo también les permite identificar lo que está sucediendo con el triángulo rectángulo interno en las diferentes tolvas. Esto permite establecer que según la variación que se realice en las aristas de las tres tolvas, de estas variaciones se determinará también la rapidez del vaciado. Esto permite que el estudiante resinifique y dote de significado la RP.

En contraste con animaciones que se pueden utilizar para explicar la relación que señala el teorema de Pitágoras como GeoGebra, Cabri, animaciones, gifs, etc., estas animaciones pueden ser llamativas en el aspecto visual, sin embargo carecen en muchas de las veces del sentido y utilidad para el estudiante. Lo que sólo permite que dicha práctica sea relevante por un momento pero sin impactar de manera significativa.

Al trabajar con la tolva, pareciera que no existe relación alguna con la RP y simplemente se trata de un poliedro, sin embargo cuando se busca una unidad de análisis para hacer la *predicción*, la variación que se manifiesta en los lados del triángulo rectángulo visualizado en la tolva permiten resignificar la RP.

Las ideas que los estudiantes tienen sobre la tolva y la dialéctica local-global son componentes que inciden directamente en la fase experimental que permiten la restructuración de los significados aunado a las estrategias variacionales.

Es por ello que la parte fundamental de esta situación variacional, fue debido a dos procesos fundamentales: la medición y la experimentación, las cuales fueron llevadas a cabo por los estudiantes a lo largo de las fases 2, 3 y 4 con las tolvas. También les permitieron visualizar la relación entre los lados del triángulo rectángulo.

Esta necesidad de identificar el comportamiento de los lados del triángulo rectángulo para un vaciado óptimo, en la práctica de la predicción (fase experimental) favorece a dotar de un significado funcional a la RP, lo cual va más allá a poder aplicar o no una definición del teorema de Pitágoras. Por lo tanto, lo que un alumno resinifique acerca de la RP, podría apoyar favorablemente el estudio del teorema de Pitágoras posteriormente. En el siguiente capítulo se presentan las conclusiones del trabajo.

# CONCLUSIONES

## CAPÍTULO X

## Capítulo 10

## CONCLUSIONES

En el presente trabajo de investigación se propuso conocer qué tanto los estudiantes conocían acerca del Teorema de Pitágoras. Con las actividades propuestas y la recolección de información se pudo constatar que los estudiantes tienen dificultades de interpretación algebraica y de ubicación de los catetos. Además se pudo evidenciar que los alumnos no han comprendido la relación que señala el Teorema de Pitágoras después de una clase tradicional, debido a que el teorema se les presenta como un objeto acabado y con sentido meramente utilitario. Por otro lado se concluye que algunos estudiantes, logran de forma operativa obtener resultados a partir de la fórmula del teorema sin embargo, con ello no logran visualizar la relación que refiere el Teorema de Pitágoras.

Es por ello que derivado de lo anterior y haciendo relevante la importancia de la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo, en el desarrollo de este trabajo se propuso de manera intencional una epistemología de la RP, con elementos que marca la teoría de la socioepistemología, que dan cuenta de cómo los estudiantes a través de la *"Practica Social*" en la construcción de tolvas adaptaba al ámbito escolar, propicio una reconstrucción de significados –derivados de la estrategias variacionales *predicción, comparación y estimación*- acerca de la RP. Esta relación a la que hace referencia el teorema de Pitágoras es muy importante que se pueda identificar antes de que se presente a los estudiantes el Teorema de Pitágoras de la forma tradicional $a^2 + b^2 = c^2$ y de esta forma no sean ajenos al comportamiento que las variables $a$, $b$ y $c$ toman cuando se modifican los lados del triángulo rectángulo.

Se afirma que los resultados que se esperaban por parte de los estudiantes con la implementación de esta situación variacional, fueron los que se tenían marcados en el objetivo 4, página 45, pudieron identificar la relación que existe entre los lados de un triángulo rectángulo e incluso fueron más allá, estableciendo por si solos una relación con el Teorema de Pitágoras, debido a que ya contaban con algunos conocimientos previos cerca del teorema.

También fue posible identificar que los estudiantes que realizaron a la situación variacional, manifestaron un alto grado de satisfacción por ser partícipes de una experiencia de esta naturaleza y se sintieron motivados a estudiar matemáticas, en especial lo que involucrara aspectos geométricos, una actitud que actualmente contrasta con las clases tradicionales. Es posible afirmar que el uso de material didáctico –tolvas-, apoyado en situaciones reales -prácticas de pailería- representa una forma nueva y atractiva de estudiar geometría.

A continuación como parte de lo concluido anteriormente se pudieron responder las 3 preguntas de investigación que se propusieron en el capítulo 5, página 43-44. La pregunta número 1 se pudo responder de manera parcial debido a que pueden existir otras circunstancias por la que los estudiantes no comprendan el teorema. Las preguntas 2 y 3, se respondieron totalmente.

***Pregunta de investigación 1***

¿Por qué los estudiantes presentan dificultades para la comprensión del Teorema de Pitágoras?

*En un primer acercamiento se demostró con la actividad I y II, que los estudiantes no comprenden la relación que señala el Teorema de Pitágoras después de una clase tradicional. Analizando los resultados obtenidos por los estudiantes, libros de texto acerca del Teorema de Pitágoras y algunos trabajos de investigación, se puede afirmar que la forma en como se ha presentado el Teorema de Pitágoras como una identidad, un objeto acabado en la forma* $a^2 + b^2 = c^2$*, sin sentido en el contexto del estudiante, etc., solamente conduce al estudiante a memorizar la fórmula y a operarla de forma mecánica, lo cual dista mucho de la relación que en realidad señala el teorema.*

***Pregunta de investigación 2***

¿Cómo se llevan a cabo los mecanismos cognitivos que guían a los estudiantes hacia una resignificación de la RP?

*Las estrategias variacionales involucradas en la unidad de análisis es lo que permite que el estudiante resignifiquen la RP. Las estrategias involucradas en esta unidad de análisis son la comparación que se puede identificar en las distintas inclinaciones de las 3 tolvas presentadas y estimación en el vaciado en conjunto que existe.*

***Pregunta de investigación 3***

¿Qué características deben tener una situación variacional para promover el aprendizaje de la RP?

*Una situación* variacional *debe considerar las dimensiones del saber propuestas en el marco de la socioepistemología para que los estudiantes puedan resignificar un concepto. Esta dimensiones social, cultural, didáctica y epistemológica, permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al estudiar el cruce entre la epistemología, dimensión sociocultural, procesos cognitivos asociados y mecanismos de institucionalización vía la enseñanza* (Cantoral, 2013). *Otras características esenciales de la situación* variacional *es que debe promover el pensamiento variacional y el uso de estrategias variacionales como predicción, estimación, seriación y comparación, para la resolución de problemas que estén inmersos en la situación variacional*

Con respecto a las hipótesis de investigación es importante mencionar que las 3 hipótesis planteadas fueron correctas y se pudieron ratificar con las respuestas a las preguntas de investigación.

Recapitulando los aspectos generales de la investigación como la puesta en escena de la situación variacional justificada con los elementos que plantea la socioepistemología y el análisis histórico que se realizó sobre la construcción de tolvas y su relevancia con la RP, permiten concluir que el saber matemático se constituye socialmente en ámbitos no escolares y su incursión significativa al sistema didáctico exige considerar aspectos de la naturaleza del mismo saber, que inconscientemente se hacen a un lado por la prioridad que se le asigna a los aspectos analíticos estando aquí, tal vez, el error de la falta de comprensión de muchos de los conceptos matemáticos.

## 10.1 Sobre la situación variacional

Con el diseño e implementación de esta situación variacional, se puede concluir que se requirió de en un trabajo arduo por parte del aplicador-investigador, desde la planeación, diseño, implementación y obtención de resultados. Sin embargo los alcances que esta situación variacional obtuvo, son significativos en contraste con los alcances que se obtienen a través de las clases tradicionales, son favorables debido a la interacción que se promueve entre los alumnos y a los aprendizajes que se logran.

En la situación variacional diseñada y aplicada en la presente investigación se pudieron observar algunos aspectos que sería posible mejorar con la intención de que la situación pueda efectuarse de una manera más ágil. Por ejemplo, se debe considerar el uso de herramientas de alta precisión como por ejemplo el compás, debido a que por la fragilidad que algunos de estos presentan pueden variar las medidas que se están marcando. También determinar alguna manera de simplificar la construcción de las plantillas que permitan reducir el tiempo de elaboración y por último utilizar material maleable pero al mismo tiempo resistente para la construcción de los poliedros en este caso las tolvas.

Es importante mencionar que la técnica utilizada en esta situación variacional que involucra la visualización y el proceso de filtración para la construcción de tolvas, puede ser empleada para construir otras formas geométricas como el catálogo presentado en el capítulo II, pagina 33. Al mismo modo que se realizó en este trabajo de investigación, para la construcción de las figuras del catálogo, también se requiere de las plantillas las cuales son de mucha utilidad para los estudiantes por la estrategia de visualización que se emplea en su elaboración y la asociación que realizan los estudiantes con otros conceptos matemáticos, lo cual no se genera con las plantillas que comúnmente vienen al final de los libros de texto de matemáticas que se anexan para la elaboración de figuras poliédricas.

En resumen, es evidente el trabajo que se debe realizar por parte del docente y son muchos los aspectos que se deben considerar para la realización de este tipio de situaciones variacionales, pero con todo el trabajo que todo esto puede implicar, son una excelente estrategia para abordar temas complejos y tan específicos como el que se trabajó en esta investigación.

### 10.2 Estudio a futuro

El desarrollo de esta investigación permitió identificar que en la industria de la pailería se emplean conceptos matemáticos que son usados de manera implícita a través de herramientas rudimentarias en las prácticas que ahí se realizan. Dichos conceptos, tales como: ejes de simetría, plano cartesiano, coordenadas, circunferencia, radio de curvatura, paralelismo, perpendicularidad, teorema de Tales, por mencionar algunos, son empleados por los paileros de manera significativa debido a la utilidad y relevancia que estos tienen en la construcción de diferentes estructuras metálicas industriales.

Es por ello que a través de los resultados obtenidos en esta investigación, se pretende realizar un estudio más profundo acerca de las prácticas que se llevan a cabo en esta industria y la relación estrecha que guarda con la matemática escolar en especial con la geometría. Al considerar el marco teórico de la Socioepistemología, permitirá indagar si la unidad de análisis que se identificó en la práctica de construcción de tolvas también es fundamental en otras prácticas que norman la construcción de otras estructuras metálicas que se realizan en pailería. Esto podría permitir el diseño de situaciones variacionales que pudiesen guiar el proceso de resignificación de algunos conceptos matemáticos que el sistema educativo actual presenta como objetos acabados y de mera operativa.

## Referencias bibliográficas


Acevedo, P. H. (2011). EL TEOREMA DE PITÁGORAS CONSTRUCCIÓN DE ALGUNOS RECURSOS DIDÁCTICOS. BOGOTÁ D.C.: UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA.

ACERTEC. (22 de Junio de 2017). Obtenido de https://www.acertec.cat/es/artesania-i-forja/histr-de-la-forja

Aguilar, L. F. (1990). LA INDUSTRIA DE LA PAILERÍA EN MÉXICO. México: Instituto de Geografía UNAM.

Ana Laura Barriendos Rodríguez, E. M. (2008). Matemáticas III, Libro para el Maestro. México D.F.

Arenas, M. d. (2015). APRENDIZAJE DEL TEOREMA DE PITÁGORAS UTILIZANDO LA ESTRATEGIA DE MODELACIÓN A TRAVÉS DEL USO DE APPLETS. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2299-2307.

Baldor, J. (2004). GEOMETRÍA PLANA Y DEL ESPACIO Y TRIGONOMETRÍA. México: Publicaciones Cultural.

Barriendos Rodríguez, A. L., & Espinosa Asuar, E. M. (2008). MATEMÁTICAS III, Libro para el maestro. México D.F.: SEP.

Bernal, A. (16 de Julio de 2017). Pailería San Luis. Obtenido de www.paileriasanluis.com/pdf-descripcion

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 227-251.

Cantoral, R. (1990). Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de “el Prædiciere” y “lo Analítico”. CINVESTAV, México-México: Tesis Doctoral.

Cantoral, R. (2001). Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. México: Gedisa S.A.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. Épsilon, 854-856.

Cecytebc. (22 de Julio de 2017). Cecytebc.edu.mx. Obtenido de http://cecytebc.edu.mx/HD/archivos/antologias/ctsyv_3.pdf

Claudio, P. (22 de Julio de 2017). HyB Historia y Biografías. Obtenido de https://historiaybiografias.com/inventos2/

Cordero, F. (1994). Cognición de la integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar. Cinvestav, Ciudad de México-México: Tesis Doctoral.

Díaz, J. F. (2013). La incorporación del uso del software GeoGebra en el aprendizaje del Teorema de Pitágoras. Ibagué, Colombia: Universidad de Tolima.

Engler, A., Vrancken, S., Gregorini, M., Müller, D., Hecklein, M. y Henzenn, N. (2008). Estudio del comportamiento de la función a partir de la derivada. Análisis de una secuencia didáctica. En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 21, 466 – 476. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Esquivel, E. A. (2010). PROPUESTA DE UN PLAN ESTRATÉGICO PARA LA EMPRESA "PAILERÍA MÉXICO". Aguascalientes.

Farfán, R. M. (1993). Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería. Estudio de caso. CINVESTAV, Ciudad de México-México: Tesis Doctoral.

Figuera, L. (2006). PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A TRAVÉS DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA. Venezuela: UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR, Decanato de Estudios de Postgrado.

García, J. C. (2009). Deducción y extensión más general del teorema de Pitágoras. NÚMEROS, Revista de Didáctica de la Matemáticas, 71-87.

Geografía, I. d. (11 de Agosto de 2017). SCIELO. Obtenido de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S018846111989000100008&lng=es&nrm=iso

Herrera, O. V. (2015). Pensamiento matemático 3. Monterrey N.L. México: EK EDITORES.

Hosler, D. (2005). Los sonidos y colores del poder: la tecnología metalúrgica sagrada del occidente de México. México: El Colegio Mexiquense.

Jiménez Turizo, L. J., Rivero Osuna, R. C., & Montes Viloria, S. M. (2005). Experiencia Investigativa Sobre el Teorema de Pitágoras: Un reporte con la Geometría Dinámica. Sucre, Bolivia: universidad de Sucre.

Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2004). CÁLCULO VECTORIAL. Madrid, España: Pearson Educación S.A.

Osorio, L. E. (2011). REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN EL APRENDIZAJE DEL TEOREMA DE PITÁGORAS. Manizales, Colombia.

Pérez, M. C. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 1197-1205.

Puente, R. A. (2015). Física I. México: SEP.

Real Academia Española. (2001). Diccionario de la lengua española: A-G; Vol. 2, H-Z. Real Academia española, 2001.

Rosero, E. A. (2005). UNA ALTERNATIVA METODOLÓGICA PARA LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS. Santiago de Cali: Universidad del Valle. INSTITUTO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

Salinas, C. (2003). Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los recursos introductorios del cálculo. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México: Departamento de Matemática Educativa.

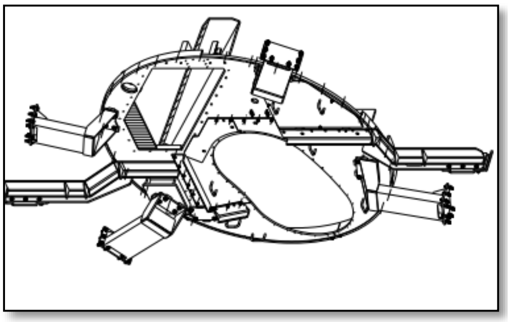
UNAM. (23 de Julio de 2017). Revista de cultura científica. Obtenido de http://www.revistaciencias.unam.mx/es/178-revistas/revista-ciencias-29/1659metalurgia - mesoamericana.html

Vargas, G. V. (2011). LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS: UNA EXPERIENCIA EN EL AULA CON EL USO DEL GEOGEBRA, SEGÚN EL MODELO DE VAN HIELE. Uniciencia, 95-118.

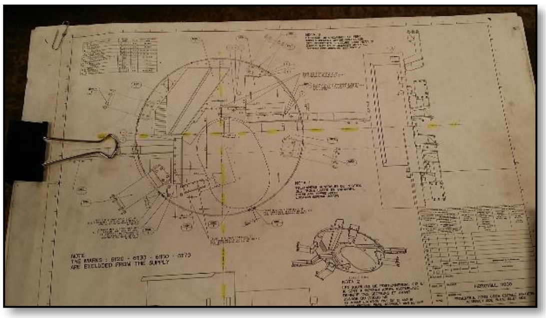
Vázquez, A. P. (2011). PRUEBAS VISUALES Y SU USO DIDÁCTICO. Puebla, México: BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA.

# ANEXOS

Anexo **A:** Construcción del Horomill 3800.



1.- Plano en computadora



2.- Plano físico

3.- Placa base de acero

4.- Trazado

5.- Corte

6.- Ensamble

7.- Soldadura

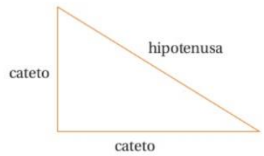
8.- Terminado

Anexo **B:** El Teorema de Pitágoras en tercero de secundaria.

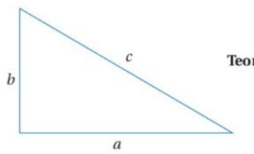
**Práctica 11**

# El Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, a los lados que forman el ángulo recto se les llama catetos y al lado opuesto al ángulo recto se le llama hipotenusa.



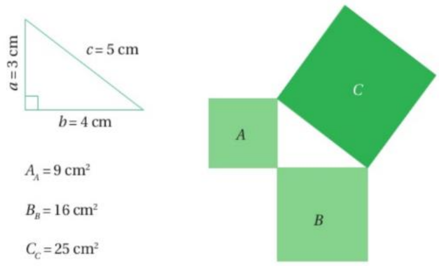

A la relación que tienen las medidas de los lados en cualquier triángulo rectángulo se le conoce como Teorema de Pitágoras, el cual dice: *la suma del cuadrado de cada uno de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.*




**Teorema de Pitágoras**

$a^2 + b^2 = c^2$

En la siguiente imagen se muestra un triángulo rectángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 centímetros respectivamente. Si se contruye un cuadrado en cada lado del triángulo y se calcula el área de cada uno, se obtiene que la suma del área de los cuadrados que se forman en los catetos es igual al área del cuadrado que se forma en la hipotenusa. Como puedes ver, se cumple el Teorema de Pitágoras.




$A_A = 9\text{ cm}^2$

$B_B = 16\text{ cm}^2$

$C_C = 25\text{ cm}^2$

**Matemáticas rápidas**

1. Resuelve.

a) $3^2 + 4^2 =$ ______

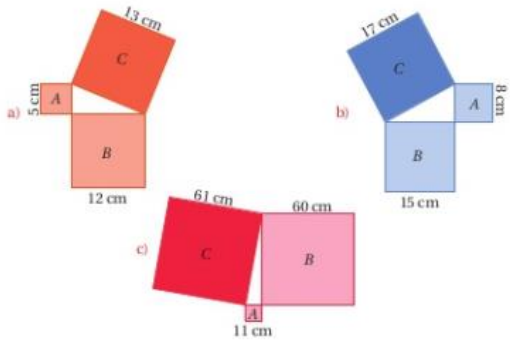
b) $60^2 + 5^2 =$ ______

c) $(1.5)^2 + 2^2 =$ ______



**Actividades**

1. Utiliza los datos de las figuras para completar la tabla.




| Triángulo | $A^2$ | $B^2$ | $A^2 + B^2$ | $C^2$ |
|---|---|---|---|---|
| a) | | | | |
| b) | | | | |
| c) | | | | |

¿Cuál o cuáles de los triángulos no es un triángulo rectángulo?

2. Determina si las siguientes medidas de los lados de un triángulo cumplen la relación del teorema de Pitágoras.

a) Catetos: 1.5 cm y 2 cm; hipotenusa, 2.5 cm.

b) Catetos: 6 cm y 2.5 cm; hipotenusa, 6.5 cm.

c) Catetos: 1cm y 2 cm; hipotenusa, 2 cm.

d) Catetos: 6 cm y 8 cm; hipotenusa, 9 cm.

e) Catetos: 6 cm y 8 cm; hipotenusa, 10 cm.

f) Catetos: 10 cm y 4 cm; hipotenusa, 11 cm.

3. Construye los triángulos del ejercicio anterior que cumplen con el Teorema de Pitágoras.

**Pregunta de reflexión**

Si los lados de un triángulo cumplen la relación del teorema de Pitágoras, ¿se trata de un triángulo rectángulo?

**Mis dudas y preguntas**

**Mis respuestas**

Anexo **C**: Actividad I, El Teorema de Pitágoras.

# Teorema de Pitágoras

**En esta secuencia, aplicarás el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas de cálculo de longitudes y distancias.**

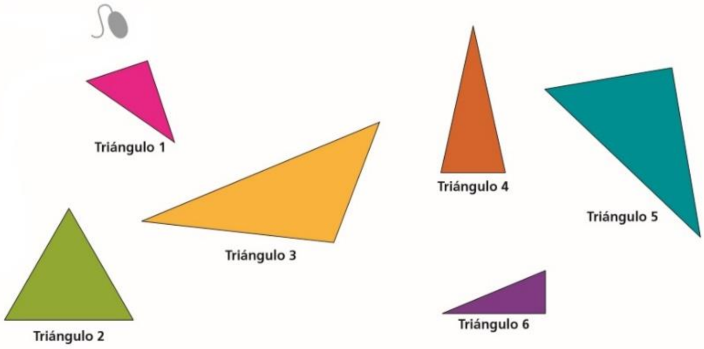
**SESIÓN 1**

## ¿QUÉ NOS DICE EL TEOREMA DE PITÁGORAS?

### >>> Para empezar

En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se conocen como ***catetos*** y el lado mayor, el cual se opone al ángulo recto, se llama ***hipotenusa***.

**I.** De los siguientes triángulos, distingan los que sean triángulos rectángulos.




a) Midan la longitud de los lados de cada triángulo rectángulo que encontraron y anoten las medidas (como ***a***, ***b***, ***c***,), en la siguiente tabla.

| Triángulo rectángulo | Medidas de los lados | | |
|---|---|---|---|
| | Catetos | | Hipotenusa |
| | *a* | *b* | *c* |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Tabla 1

MATEMÁTICAS III

b) Utilicen las medidas de los lados de cada triángulo para completar la siguiente tabla.

| Triángulo rectángulo | $a^2$ | $b^2$ | $a^2 + b^2$ | $c^2$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Tabla 2

c) ¿Qué relación observan entre los resultados obtenidos a partir de las medidas de los lados de los triángulos rectángulos? Anótenla a continuación ___________

_______________________________________________

_______________________________________________

Comparen sus respuestas y utilicen el conjunto anterior de triángulos.

a) En todo triángulo rectángulo hay un lado mayor que llamamos hipotenusa (***c***). ¿Hay algunos triángulos no rectángulos que sólo tengan un lado mayor?
¿Cuáles son? _______________________________________________

b) Consideren el triángulo 3, llamen ***c*** al lado mayor y ***a*** y ***b*** a los otros dos lados. Calculen $a^2$, $b^2$, $c^2$: _______________________________________________
¿Se cumple la relación que encontraste en los triángulos rectángulos? ___________

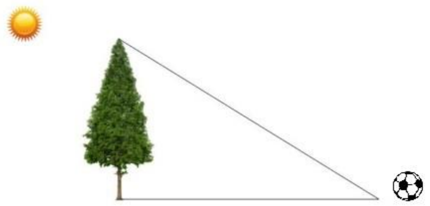
Anexo **D:** Actividad II, Cuestionario y problemas acerca del Teorema de Pitágoras.

**Actividad Nº 2**
**CUESTIONARIO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

**Nombre:** ____________________________________ **Fecha:** ______

**Instrucciones:** ***Responde únicamente lo que se te pide, si desconoces la respuesta deja el espacio en blanco o indica "no se".***

- 1.- ¿Sabes qué es el Teorema de Pitágoras? Descríbelo en un texto o matemáticamente.
- 2.- ¿Sabes en qué contextos de la vida cotidiana se utiliza el teorema de Pitágoras?
- 3.- Si la altura del pino es de 3 metros y la longitud de la sombra es de 4 metros ¿Cuál es la distancia de la punta del pino a la punta de la sombra?



- 4.- ¿Cuál es la distancia de la punta del pino a la punta de la sombra, si la altura del pino y la longitud de la sombra fueran del doble?

*Recuerda no es un examen…*

Anexo **E:** Cuestionario final.

**Cuestionario**

**Nombre:** ____________________________________ **Fecha:** ________

**¿Qué paso con el triángulo rectángulo interno de la tolva al modificar un lado para que su vaciado fuera más rápido?**

**¿Cómo describirías el Teorema de Pitágoras?**

Anexo **F:** Tolvas construidas en la Fase 2.

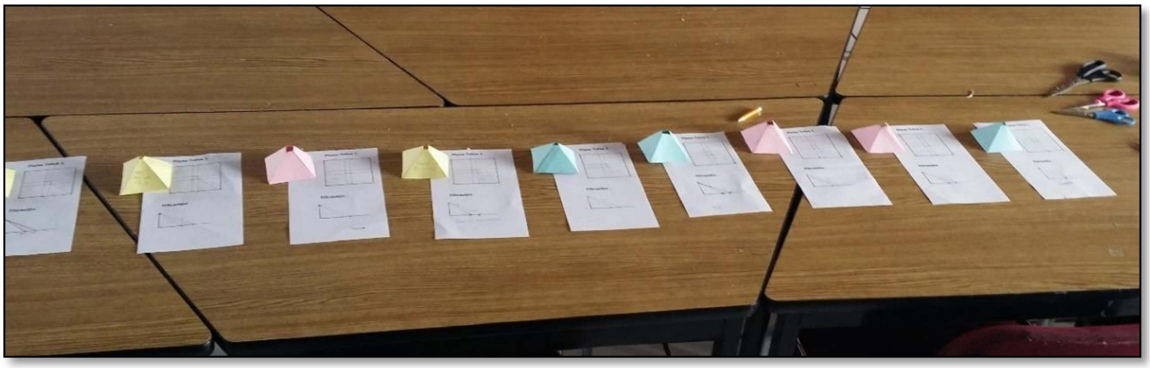


Imagen 1.1 Tolvas construidas.

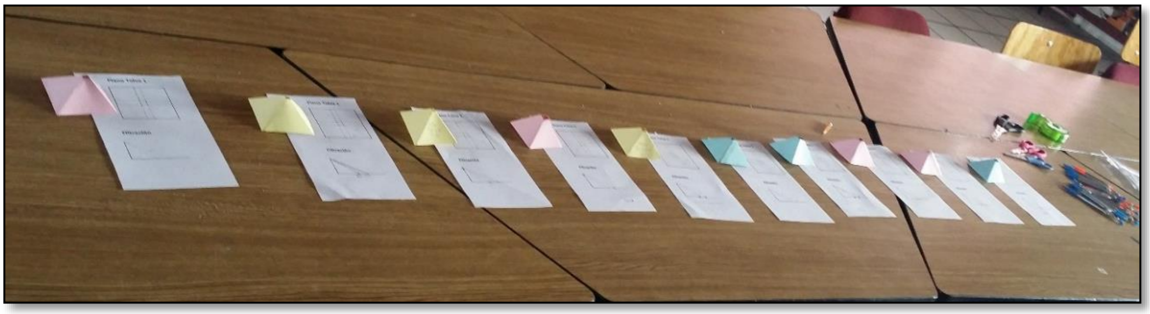


Imagen 1.2 Tolvas construidas 2.

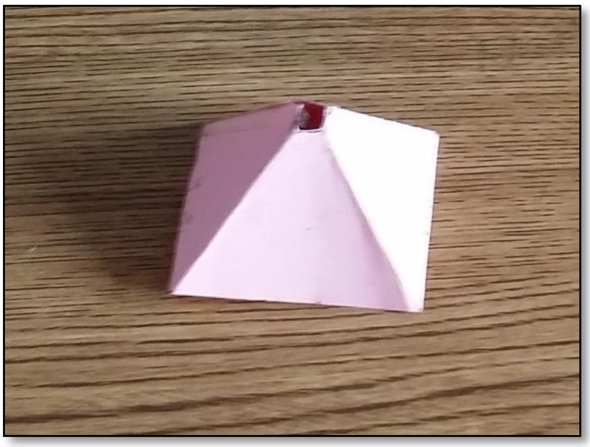
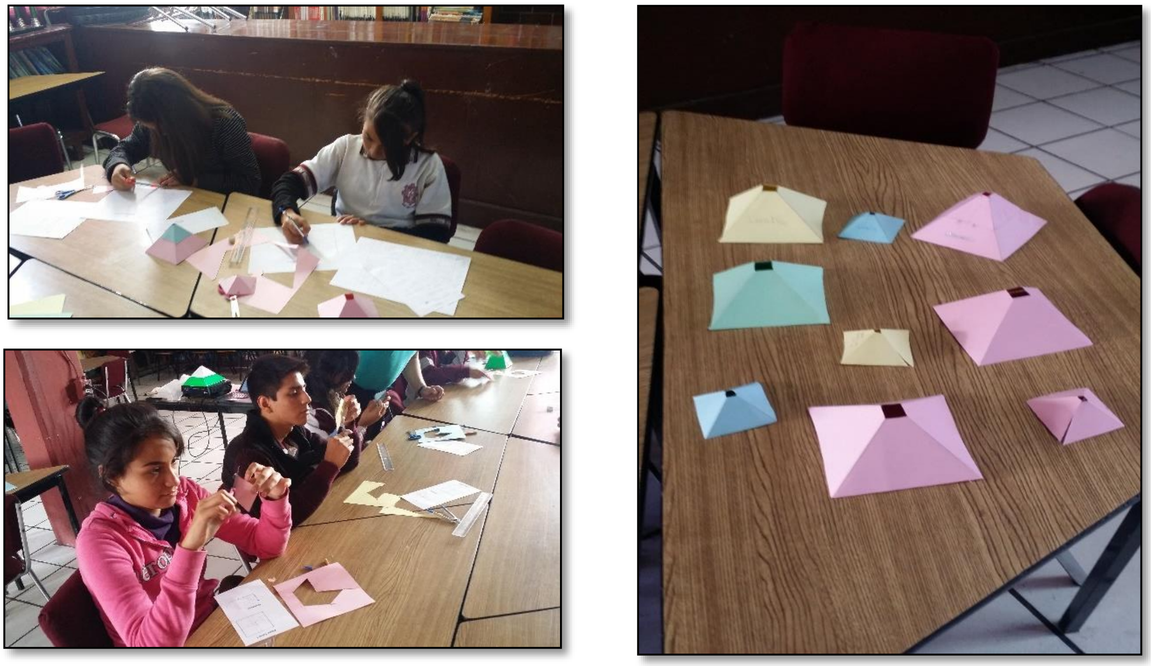


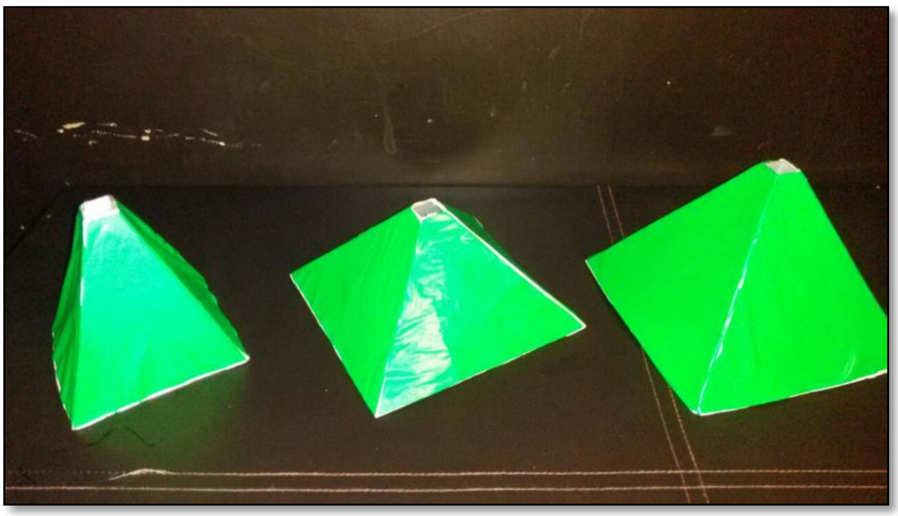
Imagen 1.3 Tolva individual.

Anexo **G:** Cantidad de sustancia granulada en la tolva.

Anexo **H:** Tolvas con el doble de medidas**.**



Anexo **I:** Tres tolvas con la misma altura pero diferente inclinación.



Anexo **J:** Tabla 7.4 contestada por el alumno.

b) Utilicen las medidas de los lados de cada triángulo para completar la siguiente tabla.

| Triángulo rectángulo | $a^2$ | $b^2$ | $a^2 + b^2$ | $c^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.6 | 3.2 | ~~5.8~~ | 5.8 |
| 5 | 4 | 6.4 | 4 + 6.4 | 10.4 |
| 6 | 7.60 | 4 | 7.6 + 4 | 5.6 |

Tabla 2

Anexo **K**: Respuestas de los estudiantes "Relación entre sus lados".

c) ¿Qué relación observan entre los resultados obtenidos a partir de las medidas de los lados de los triángulos rectángulos? Anótenla a continuación

los $a^2+b^2$ es parecido a $c^2$ aunque no son iguales

Tabla 2

c) ¿Qué relación observan entre los resultados obtenidos a partir de las medidas de los lados de los triángulos rectángulos? Anótenla a continuación No, no hay relación

Tabla 2

c) ¿Qué relación observan entre los resultados obtenidos a partir de las medidas de los lados de los triángulos rectángulos? Anótenla a continuación Si hay relacion en a+b y $c^2$.

Tabla 2

c) ¿Qué relación observan entre los resultados obtenidos a partir de las medidas de los lados de los triángulos rectángulos? Anótenla a continuación

no son semejantes.

c) ¿Qué relación observan entre los resultados obtenidos a partir de las medidas de los lados de los triángulos rectángulos? Anótenla a continuación que no medi bien en la ultima pero en todas las demas es un aproximado a el mismo

c) ¿Qué relación observan entre los resultados obtenidos a partir de las medidas de los lados de los triángulos rectángulos? Anótenla a continuación no es lo mismo la 1era que la segunda

c) ¿Qué relación observan entre los resultados obtenidos a partir de las medidas de los lados de los triángulos rectángulos? Anótenla a continuación Ninguna, deberian ser las mismas ya que $a^2+b^2=c^2$

Anexo **L:** Respuestas a la pregunta 1, actividad II.

1.- Si, $a^2+b^2=c^2$

1: Sí, ~~mate~~ matemáticamente.

-Si pero me confondo cual es cual

1.- : Más o menos $a^2+b^2=c^2$

1.- No se

texto o matematicamente?

R= es una forma para sacar un lado de alguna figura

1.- Es una forma de sacar la hipotenusa de un triangulo

1.- Sí, es la "formula" para sacar el lado de un triangolo, Ejemplo: $C^2 = a^2 + b^2$, $b^2 = a^2 - c^2$, $a^2 = b^2 - c^2$ (Me equivoque, era la $C^2$ primero)

1.- $a^2+b^2=c^2$ $c^2-b^2=a^2$ $c^2-a^2=b^2$

Anexo **M**: Respuestas a la pregunta 2, actividad II.

2.- Sí, Contexto en determinar la sombra de algo o su altura, puede ser de una escalera, asta de bandera, etc.

2.- R= Una escalera se recarga en la pared la pared mide 10m y y la escalera 8m cuanto se recarga en el piso a la pared XD:

2.- Se utiliza para problemas algebraicos

2. Si, se utilza cuando sabes el precio de dos componentes para dar un resultado, pero solo tienes el resultado y un componente

- ~~no~~ si

2.- Es cuando quieres sacar el lado de un angolo.

2.- NO

2.- Se utiliza para sacar los problemas de matematicas

Anexo **N**: Resultados de los estudiantes al completar la tabla Figura 7.19.

**Estudiante 1**

| Tolvas | Altura | Base | Arista |
|---|---|---|---|
| Uno | 30 mm | 40 mm | 50 mm |
| Dos | 60 mm | 80 mm | 100 mm |
| Tres | 90 mm | 120 mm | 150 mm |
| Cuatro | 120 mm | 160 mm | 200 mm |
| Cinco | 150 mm | 200 mm | 250 mm |
| Seis | 180 mm | 240 mm | 300 mm |

**Estudiante 2**

| Tolvas | Altura | Base | Arista |
|---|---|---|---|
| Uno | 3 | 4 | 5 |
| dos | 6 | 8 | 10 |
| Tres | 9 | 12 | 15 |
| cuatro | 12 | 16 | 20 |
| Cinco | 15 | 20 | 25 |
| Seis | 18 | 24 | 30 |

**Estudiante 3**

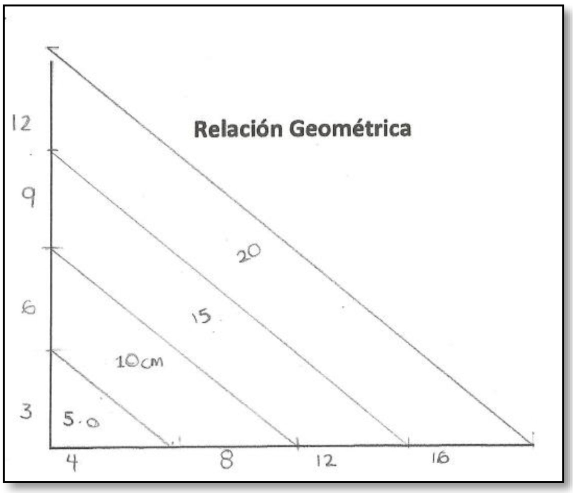
| Tolvas | Altura | Base | Arista |
|---|---|---|---|
| Uno | 3 | 4 | 5 |
| Dos | 6 | 8 | 10 |
| Tres | 9 | 12 | 15 |
| Cuatro | 12 | 16 | 20 |
| Cinco | 15 | 20 | 25 |
| Seis | 18 | 24 | 30 |

**Estudiante 4**

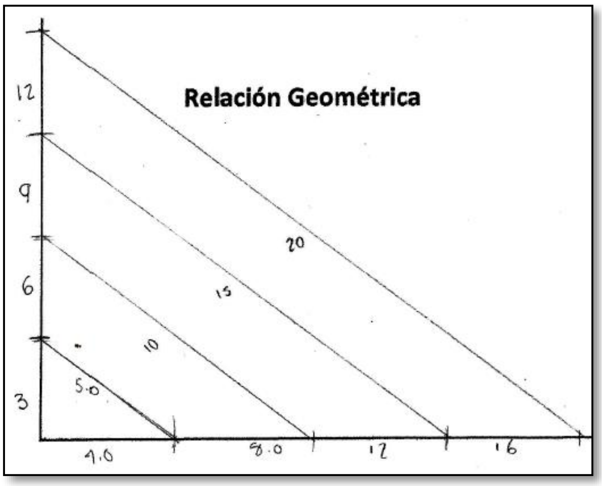
| Tolvas | Altura | Base | Arista |
|---|---|---|---|
| UNO | ? | 40 mm | 50 mm |
| DOS | 60 mm | 80 mm | 100 mm |
| TRES | 90 mm | 120 mm | 150 mm |
| CUATRO | 120 mm | 160 mm | 200 mm |
| CINCO | 150 mm | 200 mm | 250 mm |
| SEIS | 180 mm | 240 mm | 300 mm |

Anexo **O:** Resultados gráficos de la tabla 7.19.

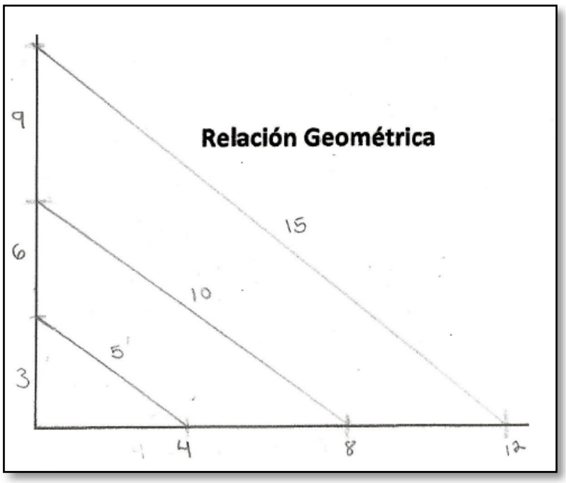
**Estudiante 1**



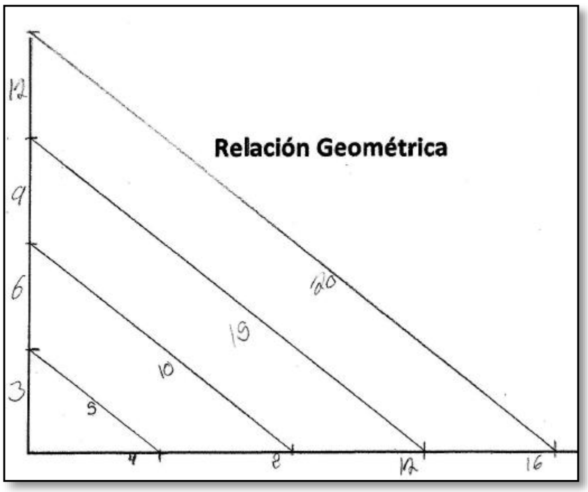

**Estudiante 2**



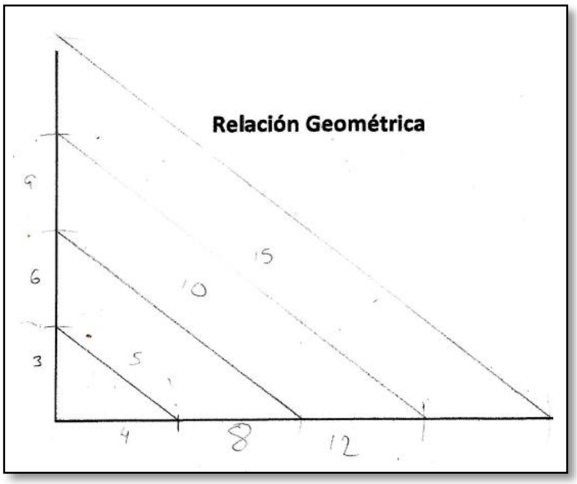

**Estudiante 3**



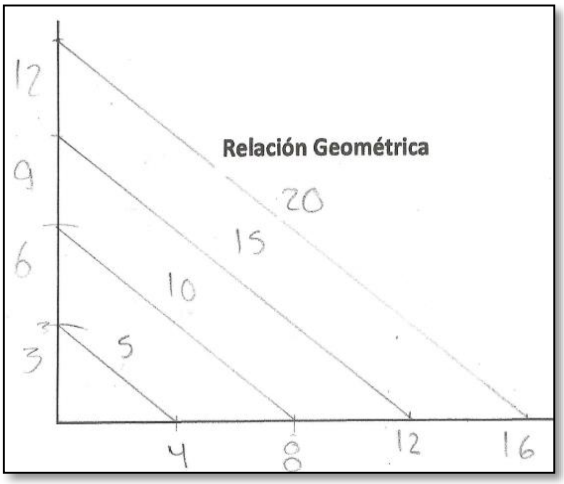

**Estudiante 4**




**Estudiante 5**




**Estudiante 6**



Anexo **P**: Respuesta de la pregunta 1 del cuestionario final.

R= Tambien se afectan los demas lados o medidas del triangulo y puede cambiar la forma de la Tolva y la forma de que se vacie o el tiempo

Si un lado del triangulo rectangulo se modifica.
Cque Pasa con los demas?: se Pueden alterar las
Otras medidas de lo que bendria Siendo la tolva.
Pues el contenido Podria vaciarse mas lento o
rapido segun la medida que le Pongas a un
Solo lado, Por ello tienes que tener presición,
o Poner las medidas correspondientes para elavorar
dicha tolva, si modificas uno tambien se modifican los demas.

Si un lado de un triangulo
rectangulo se modifica que pasa
con los demas? cambia o depende
de la modificación si sube o baja,
si sube se va duplicando y si baja
se diminuye x2 x3. (las medidas)

¿Si un lado del triangulo rectangulo se modifico
que sucede con los demás? Si se modifican por que
es un triangulo rectangulo ya que al modificar uno se
debe modificar un lado

R= se afectan los demas lados y se tendrian que modificar los lados por que es un triangulo rectangulo.

Distorciona todo el triangulo

Si se modifica un lado del triangulo rectangulo otro se va a modificar por la relación ÷ ellos. No podemos mover uno sin que se mueva el otro.

Anexo **Q**: Actividades en clase