UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

FACULTAD DE CIENCIAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Conceptualización de función en estudiantes de nivel medio superior y su importancia en la Ciencia de Materiales

TESIS PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciada en Matemática Educativa

PRESENTA:

María Reyna Salazar Rivera

Director de tesis

Dra. Martha Eugenia Compeán Jasso

San Luis Potosí, S.L.P **Febrero de 2019**

FORMATO DE AUTORIZACIÓN PARA LA IMPRESIÓN FINAL DE LA TESIS

SECRETARIA GENERAL

FACULTAD DE CIENCIAS

Nombre: María Reyna Salazar Rivera

Clave: 0173572

Fecha: ______

Carrera: Lic. en Matemática Educativa

Especialidad: ______

Generación: 2009

Título de la Tesis:
Conceptualización de función en estudiantes de nivel medio superior y su importancia en la ciencia de Materiales.

Asesor: Dra. Martha Eugenia Compeán Jasso

Adscripción del Asesor: Facultad de Ciencias

SINODALES ASIGNADOS

Presidente: Dr. Nehemías Moreno Martínez

Secretario: Dra. Martha Eugenia Compeán Jasso

Vocal: Dra. Lilia María Del Riego Senior

Suplente: Dr. Noé Samuel Sánchez Martínez

Por medio de la presente atestiguamos que después de leer el documento de tesis puesto a nuestra consideración, no tenemos recomendaciones o sugerencias a su contenido y damos nuestra aprobación para que se impriman las versiones finales del mismo.

Firmas:

Sinodal Presidente

Sinodal Secretario

L Del Riego

Sinodal Vocal

Sinodal Suplente

Vo.Bo.

Secretario General

SECRETARIA GENERAL

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS

“Nunca pierdas el asombro infantil. Muestra gratitud…
No te dejes; simplemente trabaja más duro… Nunca te rindas.”
Randy Pausch

Agradezco a dios y a mi familia por permitirme culminar una de tantas etapas de mi vida y siempre motivándome en continuar con esta investigación, un camino que no fue sencillo de recorrer, pero fue un reto tanto para mi familia como para mí; pero al final el resultado fue exitoso porque me abrió aún más el camino del conocimiento y la motivación de continuar en el maravilloso camino de la investigación. Gracias madre, gracias padre, aunque ya no estés más a mi lado, pero estás presente en mi corazón, gracias hermanos y gracias a dos personas muy especiales que son parte de mi vida, y son mi motor de superación y motivación. Gracias a todos por la paciencia y apoyarme en cada decisión y lo primordial por siempre creer en mí y gracias a Dios por darme fuerza, motivación, vida y salud.

También le estoy muy agradecida a mi asesora de tesis la Dra. Martha Eugenia Compeán Jasso que fue mi maestra, amiga y que me acompaño y me guio en este viaje lleno de enseñanzas y aprendizajes; por su apoyo incondicional, por su dedicación, por sus consejos, por su enseñanza, por su paciencia, por su humildad, por su optimismo de ver la vida y sobre todo verla siempre alegre. También agradezco a mis sinodales la Dra. Lilia del Riego, al Dr. Nehemías Moreno y al Dr. Noé Sánchez todos ellos por sus enseñanzas, paciencia, dedicación y apoyo y por sus aportaciones que fueron enriquecedoras en mi trabajo de tesis.

Finalmente, gracias a todos los profesores, amigos y compañeros que en mi instancia en la Universidad aportaron y formaron parte de mi vida en mi formación profesional.

Gracias a todos.

¡¡LO LOGRE!!

INTRODUCCIÓN

Actualmente vivimos en un mundo versátil en todos los aspectos; social, político, económico, educativo entre otros. En particular la educación ha sufrido varios cambios desde las exigencias en cómo se enseña hasta en cómo el alumno aprende. Haciendo un recordatorio de antes y ahora son otros requerimientos. A principios del siglo veinte, la educación se limitaba en la adquisición de destrezas básicas de alfabetismo como la lectura sencilla, escritura y aritmética suficientes para las demandas que exigía la sociedad en ese momento, por lo que el propósito de los sistemas educativos era el evitar preparar a las personas para pensar y leer con una visión crítica, así como también se buscaba que las personas no tuvieran la capacidad de resolver problemas complejos en ciencias y Matemáticas (Committee on Developments in the Science, 2000). Por tal motivo, al alumno se le veía como un sujeto pasivo en el sentido de que no se involucraba en el proceso de enseñanza, siendo el profesor quien tenía el control de los saberes. En contraste para Freire en su obra "Cartas a quién pretende enseñar" el enseñar y aprender ya no puede verse como una simple transmisión del llamado saber acumulado que se hace de generación en generación y el aprender no puede ser sólo la mecanización de algoritmos o procedimientos del objeto o del contenido transferido dejando a un lado la comprensión, dominio y aplicación de un saber enseñado (Freire, 2010). Por el contrario, el enseñar y el aprender va más allá de mecanizar ciertos conceptos y ser reproducidos en una prueba que mide que tanto retuvo el estudiante como si fueran unos robots programados para realizar ciertas tareas. Por consiguiente, Carlos Imaz Yanke y Eugenio Filloy del Departamento de Matemáticas del CINVESTAV, fueron los iniciadores del movimiento de la Matemática Educativa en México (Nieto, Viramontes, & López, 2009), pero hay que destacar la diferencia que existe entre la Matemática y la Matemática Educativa. La Matemática estudia las propiedades de los entes abstractos y de sus relaciones, genera conocimiento matemático, mientras que la Matemática Educativa es una disciplina de investigación científica que se ha planteado estudiar los problemas del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Dicho de otra manera, estudia los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en el contexto escolar y se propone describir y explicar los fenómenos implicados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, en relación a un saber, quién enseña, quién aprende y desde un contexto en el que sucede el aprendizaje por mencionar algunos (Cantoral, 1995).

En México y a nivel internacional del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV), la Matemática Educativa se crea con la finalidad de estudiar los problemas del aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas desde una perspectiva científica, desde el contexto escolar, se interesa por qué un estudiante no logra comprender el contenido matemático y va más allá de la práctica que se tiene en un salón de clases, agregando los factores que influyen durante el proceso enseñanza-aprendizaje, además de las cosas que pueden ser implementadas para un mejor aprendizaje. Luis Moreno jefe del Departamento de Matemática Educativa del (CINVESTAV) agrega que cuando no se tiene un nivel alto en los contenidos matemáticos, aparecen problemas de comunicación que influyen en el entendimiento de la otra persona citado en (Valencia, 2017), dicho de otra manera, si el alumno no cuenta con los conocimientos sólidos para resolver algún tipo de problema entonces le será complicado reconocer, dominar y comprender otras áreas de la Matemática como el Cálculo y disciplinas como la Física, la Química, por mencionar algunos e independientemente de la vocación e interés, esto porque todo lo que aprendemos de la Matemática básica a la avanzada, está ligada a otras áreas y son temas y subtemas que al paso de otro nivel académico puede ser la base.

Además, las demandas de destreza y habilidad para el trabajo profesional se han incrementado, en respuesta a las presiones que existen en el mundo competitivo de la era en la que vivimos. Por tanto, el papel que juega el alumno hoy en día es un sujeto activo responsable y con iniciativa propia para la construcción de un aprendizaje significativo, es decir, es un ser participativo que se involucra en el proceso de enseñanza y aprendizaje, donde la adquisición de saberes y habilidades se puede enriquecer y lograr de manera más fácil y rápida por el mundo digital en el que vivimos. Por consiguiente, la preocupación en los cambios que han sufrido las reformas educativas, que han sido respecto a la manera en cómo incorporar los contenidos y qué material didáctico es óptimo para el proceso de enseñanza y aprendizaje. Para ello, se implementó una enseñanza bajo el enfoque por competencias, cuya finalidad es formar a estudiantes con habilidades, actitudes y destrezas para resolver los problemas que demande la sociedad, eso debido a que la repetición o mecanización de los saberes no era suficiente para decir que el alumno ha adquirido un aprendizaje significativo que puedan aplicar en la vida, por lo tanto se esperaría que…"*la nueva ciencia del aprendizaje está comenzando a aportar conocimiento que ayude a mejorar de manera significativa las habilidades de las personas para convertirse en aprendices activos…y estén mejor preparados para transferir, a problemas y escenarios nuevos, lo que han aprendido"* (Bransford, Brown, & Cocking, 2003, pág. 54).

Dada la evolución en los procesos de enseñanza y la gran importancia actual en su estudio, sin duda la Matemática es muy importante en nuestra vida diaria y la aplicamos de manera consciente o inconscientemente, con mayor o menor grado de complejidad y con las herramientas que esta era nos permite, por lo que todo lo que hacemos está ligado a cálculos, medidas, porcentajes, por mencionar algunos. Un conocimiento básico de Matemáticas el cual se aborda en este trabajo es el concepto de función, es uno de los conceptos fundamentales en la Matemática y no es ajeno a que en los estudiantes se presentan problemas en el adquirir o aplicar los conocimientos en cuanto a los saberes involucrados en el tema tanto en lo académico como en la vida diaria. Este concepto básico que es parte de los contenidos programáticos de los estudios de nivel medio superior se sigue utilizando en los estudios posteriores de manera implícita o explícitamente independientemente de la carrera que se estudie. Para mostrar la importancia del tema, se presentan aplicaciones en una disciplina que involucra desde el aire que se respira, los artículos al alcance de cualquier persona hasta los avances tecnológicos, esta es la Ciencia de Materiales; disciplina multidisciplinaria que involucra la Física, Química, Ingeniería, Matemáticas, Medicina y muchas más.

Este trabajo de tesis se estructura en 8 capítulos los cuales se describen a continuación: en el primer capítulo se hace referencia al objeto de estudio, con el fin de delimitar el problema, se plantea la problemática respecto al concepto de función, el objetivo general, objetivos específicos y posteriormente se formula la pregunta central, la hipótesis y la justificación del tema de investigación. En el segundo capítulo se hace mención del marco de referencia resaltando algunos trabajos previos sobre el concepto de función, que presenta la problemática bajo cierto contexto. El tercer capítulo desarrolla el marco teórico que sustenta el trabajo de investigación, es decir, se centra en la teoría Dialéctica Herramienta – Objeto (D.H.O) y juego de contextos (Douady, 1984), citado en (Ferrari, 2001), también se hace una descripción del tema matemático respecto a los conceptos básicos de función tanto a nivel bachillerato como a nivel licenciatura para una descripción general de aplicaciones en donde se emplea el concepto de función. El cuarto capítulo presenta una breve descripción de la importancia de la comprensión de las funciones haciendo referencia a la Ciencia de Materiales, área que impacta en cualquier medio, área y/o disciplina. Se presentan funciones y sus aplicaciones, funciones de una variable que, de acuerdo con los objetivos de aprendizaje de los diversos niveles educativos, cualquier estudiante de nivel medio superior que haya visto el tema de funciones debería ser capaz de entender, utilizar, aplicar e interpretar. El quinto capítulo comprende el diseño metodológico, donde se describe el proceso y muestra de obtención de datos. El sexto capítulo describe los resultados obtenidos, así como el análisis. En el séptimo capítulo se presenta una secuencia didáctica que de la guía para cubrir el tema independientemente de la profundidad con la que se trabaje. Finalizando en el octavo capítulo con las conclusiones.

Capitulo 1. Objeto de estudio

1.1. PROBLEMA Y PROBLEMÁTICA

El aprender de manera repetitiva una definición, no es elemento suficiente para decir que se ha comprendido un conocimiento enseñado (Ferrari, 2001). Es decir, enseñar y aprender el concepto de función no es mecanizar conceptos y fórmulas sin comprender el por qué, para qué, cómo y cuándo aplicarlo, es algo que aún no se ve reflejado en la enseñanza y por consiguiente el alumno tiende a repetir los conceptos y a no darle sentido de aprender matemáticas, pensando en lo difícil y tedioso de aprender, debido a que la enseñanza se centra en definiciones y fórmulas quedando la práctica en segundo término. Entonces, pareciera que el propósito de los programas o de los currículos es reforzar la repetición y que los alumnos cursen las asignaturas de matemáticas con un sin fin de contenidos para luego finalizar con una calificación de aprobado o reprobado siendo el principal objetivo que se plantean muchos de los alumnos y/o padres de familia. Al continuar con los cursos superiores, los estudiantes llegan sin una comprensión de los temas matemáticos básicos y por tanto se presentan altos índices de reprobación en los primeros semestres de los programas educativos superiores, por lo que se presenta continuamente que los alumnos se depriman y opten por dejar de estudiar para buscar otras opciones.

Se esperaría que al finalizar el bachillerato, el estudiante sea capaz de trabajar en diferentes niveles con gráficas, es decir, el saber elaborar una gráfica, leer datos, hacer inferencias, manejar muy bien los conceptos básicos de Trigonometría y Geometría Analítica, con el propósito de prestar más atención a los aspectos intuitivos que a las estructuras algebraicas que subyacen a estos conceptos (Rodríguez & Zuazua, 2002).

Enseñar y aprender matemáticas es una materia que requiere de trabajo, compromiso y dedicación tanto de las autoridades como de los profesores en servicio para implementar e innovar estrategias de aprendizaje. Es decir, como docentes debemos aportar a la educación y dejar a un lado el estilo tradicional durante el proceso de enseñanza y aprendizaje y ser profesores con un pensamiento crítico y reflexivo de su propio quehacer docente. Formar en los educandos un pensamiento libre y crítico para que puedan responder a los problemas de la vida diaria, desde un enfoque reflexivo, con habilidades, destrezas y actitudes. Lograr esto es un reto, pero no imposible de alcanzar.

El concepto de función es parte fundamental en el estudio de otros temas como lo es el Cálculo, base fundamental para la comprensión y trabajo de la ciencia y la tecnología moderna, ya que se requiere de un dominio en su manejo y aplicaciones. Es por ello por lo que el estudiante, al momento de cursar Precálculo y Cálculo en la universidad, se ha venido enfrentado a dificultades como lo es diferenciar entre función y ecuación, que tipo de problemas responden, en manipular, representar una función en sus diferentes formas. Como lo señala (López Cahun, 2007, pág. 60) "… *actualmente gira alrededor del registro algebraico,…, como el gráfico, suele ser limitado a una simple ejemplificación. Por ello, se sugieren tratamientos alternativos del concepto, como el numérico, geométrico, etc., con especial énfasis en el aspecto discursivo para la resolución de problemas*…"

El concepto matemático formal de función tiene diferentes representaciones: algebraica, analítica, como una regla de correspondencia, como conjuntos, etc. Por consiguiente, se esperaría que el alumno domine las diferentes formas de representación, pero la realidad es otra, ya que cuando el profesor cambia el contexto de los conceptos y la representación que el alumno ha adquirido y éste último lo considera un tema completamente nuevo olvidando todo aquel conocimiento previo sin la capacidad ni el criterio para relacionarlo. De tal forma que los estudiantes no logran comprender que el nuevo conocimiento representa una función debido a que están familiarizados a ver siempre una expresión algebraica y por lo tanto no pueden deducir una función que existe entre dos conjuntos (López Cahun, 2007)**.** Para Eisenberg (1991), *"comprender un concepto matemático básico implica haberlo construido desde una base intuitiva y generalmente…. Entonces no logrando adquirir un pensamiento funcional, sino sólo una manipulación de mecanismos"*, por lo que tienden a procesar la información y resolver ejercicios analíticamente, no visualmente (Ferrari, 2001, pág. 9). Otras de las cuestiones es que llegar a un pensamiento matemático con comprensión, es un proceso cognitivo que requiere de habilidades y práctica, y maduración de los saberes tanto del profesor como del estudiante que se aprenden de generación en generación. Como lo menciona (Freire, 2010, pág. 53) en su obra “cartas a quien pretende enseñar”: *“La comprensión es trabajada, forzada por quién lee, por quién estudia, por quién, al ser el sujeto de ella, debe instrumentarse para hacerla mejor”.*

Por otro lado menciona Vinner (1989) que dentro de la Matemática se tiene la creencia que es más válido las representaciones algebraicas que la prueba visual, lo mismo se refleja en un examen escrito, que la preparación es reflejo de la enseñanza repetitiva y por lo tanto el alumno se le prepara para la repetición de fórmulas y técnicas algebraicas citado en (Planchart, 2002), esto provoca que los estudiantes se enfoquen en mecanizar los procesos algorítmicos en relación al problema que el profesor este explicando (Koh Catzin, 2011). Unas de las razones es debido al poco tiempo que disponen las clases de matemáticas y otra a las actividades que se destinan para que los estudiantes se acerquen a dicho concepto, rápidamente presentamos la definición formalmente como se define, cargada de palabras que suponemos de entrada que los alumnos conocen y comprenden y posteriormente pasamos al estudio de las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y trigonométricas, dejando por un lado las funciones especiales con las cuales se modelan ciertas situaciones de la vida cotidiana (Betancur & Yeni, 2013).

Se menciona en el libro “How people learn: brain, mind, experience and school” (Committee on Developments in the Science, 2000, pág. 46): “*El objetivo de la educación se concibe, mejor, como el de ayudar a los estudiantes a desarrollar las herramientas intelectuales y las estrategias de aprendizaje que se requieren para adquirir el conocimiento que le permite a la gente pensar productivamente acerca de la historia, la ciencia y la tecnología, los fenómenos sociales, las matemáticas y las artes”.*

Lo anterior pareciera que la enseñanza y aprendizaje en matemáticas es formar personas con conocimientos algorítmicos y repetitivos sin llegar a la comprensión del por qué se tiene que aprender dicho concepto sin tomar en cuenta otras habilidades como incluir actividades de razonamiento y solución de problemas. Algunos de los conflictos cognitivos a los que el alumno se enfrenta cuando se aborda el contenido de funciones, son los siguientes (López Cahun, 2007, págs. 57-60): “…*los alumnos definen a la función como una ecuación que representa una gráfica. Para ello comenta que las literales que se emplean tanto en ecuaciones como en funciones son las mismas, para ello es importante aclarar la diferencia entre variable e incógnita*”.

Para Ruiz (2000), menciona que la diversidad de objetos empleados para la enseñanza del concepto función (dominio, contra dominio, gráficas, tablas, diagramas, etcétera) pueden causar en el alumno la sensación de que para saber lo que es una función, es necesario conocer una amplia gama de elementos, es decir, el alumno ve muchos objetos ahí donde el matemático no ve más que uno (López Cahun, 2007).

Es claro que es un concepto que a pesar de ser básico, no es sencillo para muchos de los alumnos, así como tampoco lo es enseñar para los profesores, puesto que aparecen conceptos tales como imagen, dominio, variable, dependiente e independiente, crecimiento, continuidad, lo que genera por sí mismo dificultad de comprensión, puesto que implica vincular todos estos conceptos entre sí (Abrate, Pochulu, & Vargas, 2006). Por otra parte, una misma función la podemos representar de diferentes formas, tales como: por medio de una descripción verbal, diagramas de flechas, tablas, graficas, fórmulas. Entonces, se cree que las dificultades que generalmente un alumno presenta al pasar de una representación a otra son porque los profesores en servicio hacen hincapié en la elaboración de gráficas partiendo siempre de una expresión algebraica o fórmulas y pocas veces se trabaja de manera inversa, es decir, de un registro gráfico, extraer información (Abrate et al., 2006).

Agregando que los alumnos se van forjando ideas sobre el concepto, es decir, comúnmente creen que una función siempre tiene una representación algebraica, que la gráfica de la función siempre pasa por el origen de coordenadas y que los valores de una variable son siempre números enteros. Pero es porque la enseñanza se da de esa manera, las instituciones educativas exigen a los profesores terminar en tiempo y forma un programa sin prestar mucha atención en los problemas de aprendizaje de los alumnos, aunado al tiempo reducido que se le asigna a la materia, a los grupos numerosos de alumnos, a los bajos recursos didácticos con que cuenta la institución, en muchos casos al poco apoyo que se le da al profesor para implementar cosas novedosas en las clases de matemáticas y un sinfín de cosas que impiden a que no se logre el objetivo de los aprendizajes esperados durante el ciclo escolar.

La realidad Matemática actual depende de varias situaciones como: la situación de la Matemática en la actualidad, la situación del alumnado, la situación de los profesores y nuestro punto de vista sobre la Matemática que debería enseñarse (Rodríguez & Zuazua, 2002).

Cabe destacar que otra problemática radica en interpretar la información que se puede analizar desde una gráfica sin tener presente la representación algebraica que modela la gráfica. Curcio (1989) describe tres niveles distintos de comprensión cuando se trabaja con gráficas (Batanero, Godino, Vallecillos, Green, & Holmes, 1994, pág. 3):

- Leer los datos: este nivel de comprensión requiere de una lectura literal del gráfico; no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo.
- Leer dentro de los datos: incluye la interpretación de la información e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticos.
- Leer más allá de los datos: requiere que el lector realice predicciones o inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico.

Por otro lado, una de las creencias que da pauta para reflexionar, es si desarrollar clases de matemáticas centradas en el modelo de una enseñanza formalista, donde no se da cabida a los procesos de modelización, conceptualización e introducción de nuevas tecnologías, no se estaría beneficiando la discusión, la construcción, ni mucho menos la reflexión de los alumnos (Abrate et al., 2006).

En consecuencia, se recomienda proponer a los estudiantes actividades que permitan el hacer y de esta forma el comprender las nociones y conceptos que se desean ser aprendidos (Betancur & Yeni, 2013).

1.2. OBJETIVO GENERAL

Determinar los conocimientos y el dominio de los conceptos básicos de función en estudiantes de nivel medio superior. Entendiendo por dominio el poder que alguien tiene de usar y disponer de lo suyo (RAE, 2014), que, en este caso, se refiere a los conocimientos de los conceptos básicos de funciones (variable, dominio, rango, relación, conjunto, etcétera).

1.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Diseñar una encuesta para evaluar los conocimientos y dominio de los conceptos básicos de función con base a los alcances de los programas educativos del nivel medio superior.

Aplicar la encuesta a estudiantes de nivel medio superior de los últimos semestres de bachillerato en San Luis Potosí, así como a estudiantes de los primeros semestres del nivel superior de la Facultad de Ciencias.

Analizar y determinar los conocimientos básicos de función que tienen los estudiantes de nivel medio superior y superior.

Determinar el dominio de los conocimientos de función de los estudiantes de nivel medio superior y de los primeros semestres de nivel superior.

1.4. PREGUNTA CENTRAL

¿Se logra el dominio de los conocimientos de los conceptos básicos de función en los alumnos de nivel medio superior?

1.5. HIPÓTESIS

Las deficiencias en el conocimiento de los conceptos básicos de función en los alumnos de nivel medio superior llevan a una insuficiencia en el dominio.

1.6. JUSTIFICACIÓN

Se han reportado trabajos de investigación en relación a deficiencias en conceptos de matemáticas, inclusive en el tema de función, México no es la excepción, ya que a pesar de que en el bachillerato se estudia durante un semestre, existen dificultades en su aprendizaje por parte de los estudiantes, y esto se ve reflejado en el bajo rendimiento en estudios posteriores inmediatos como son los cursos de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral; materias que se fundamentan en la naturaleza de las funciones, ya que es sabido que un estudiante que no logra comprender y dar un significado al concepto, no va avanzar en los cursos posteriores, por ejemplo en conceptos de límite, derivada, integral entre otros, ni mucho menos se espera que vea a la Matemática de manera funcional; modelar y resolver problemas de su entorno (López Cahun, 2007). Es decir, un alumno que ingresa a una licenciatura se esperaría que dominara los conceptos, primeramente, comprendiera el concepto de función, dominio, rango, imagen, conjunto, relación, variable entre otros y pudiera resolver ejercicios y/o problemas relacionados con funciones y lo pudiera ser desde las diferentes representaciones (gráfica, tabular, algebraica entre otros) como herramientas. También se requieren de diversas estrategias de aprendizaje para que los estudiantes utilicen los objetos matemáticos como herramientas y resuelvan problemas dentro de su contexto.

En este trabajo se presenta una secuencia didáctica con base a la experiencia propia (asesorías formales e informales, práctica docente, servicio social y experiencia profesional), a trabajos de investigación publicados y al estudio previo de los libros de texto que se maneja en los niveles de bachillerato y nivel superior. Esta secuencia se propone ser utilizada como una guía para apoyo tanto para el profesor como para el alumno, e incluso permite aportar evidencias como parte de un proceso de evaluación del tema.

Capitulo 2. Marco de referencia

Existen diversos problemas que atañen a profesores y alumnos respecto a la enseñanza y aprendizaje debido a los altos índices de reprobación sobre todo en ciencias. Para ello, investigadores han intervenido a este problema con el hecho de proponer alternativas para dar solución y mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje en particular al tema de funciones.

En relación con la enseñanza del concepto, (López Acosta, 2011) se enfocó en los procesos cognitivos asociados al concepto en estudiantes de bachillerato, cabe mencionar que aún ellos no tenían el concepto formal, para esto diseño una secuencia de actividades tomando la teoría Socioepistemológica y las etapas de aprendizaje de la teoría APOE. Entre las conclusiones se considera que la mayoría de los alumnos establecen relaciones sin pensar en la dependencia de las variables, para esto es importante diseñar actividades o tareas ligadas a lo social puesto que no significa que tanto se conoce del tema matemático, debido a que está ligado a las experiencias para determinar si un estudiante se encuentra en una etapa cognitiva de aprendizaje.

Mientras tanto (López Cahun, 2007) realizaron un análisis de los errores tanto conceptuales (significados que posee el alumno desde la Matemática formal) como procedimentales (aquellas faltas que se observan en las operaciones que los alumnos usan), que presentan los alumnos de preparatoria para diferenciar entre función y ecuación usando la Ingeniería Didáctica. Algunas dificultades que menciona es que el alumno no logra encontrar la función que relaciona los elementos de dos conjuntos, es decir, si se le pide que encuentre la función que asocie a los siguientes conjuntos: $A = \{1,2,3,4\}\ Y\ B = \{2,4,6,8\}$.

Uno de los problemas que detectan es la falta de transferencia del concepto, consideran que la función $f(x) = x$, donde x solo toma valores enteros y que no corresponde a una función puesto que no es continúa a otras situaciones o problemas y el no reconocer una función cuando se le cambia el contexto. Entre las conclusiones que se destacan a nivel cognitivo, los alumnos tienden a relacionar las gráficas que usan cuando manipulaban ecuaciones, a nivel didáctico los profesores no hacen énfasis en la diferencia entre función y ecuación, esto debido a que mantienen un formato estándar cuando se refieren a funciones. Recomienda trabajar en actividades que ayuden a comprender los conceptos de función y ecuación (ÍDEM).

Existe un estudio sobre las dificultades que surgen durante el proceso de aprendizaje de las funciones, en los aspectos de proceso didáctico en la adquisición de las funciones, visualización, sistemas de representación y la modelación desde el contexto físico y geométrico (Planchart, 2002), donde se elaboró entrevistas y actividades de simulación en estudiantes de bachillerato. En este trabajo se concluye que los estudiantes tuvieron dificultades respecto a las gráficas que no son continuas, debido a que no las consideran funciones, algunos interpretan a la función simbólica como operaciones algebraicas, en leer la expresión algebraica, usan la recta vertical como única comprobación para decir si es función o no, las estrategias utilizadas son tablas, diagramas de Venn, gráficas y cuando es función constante tienden a sustituir el valor de la variable, por lo que recomienda trabajar entre las distintas representaciones para la construcción de función, incluir en los programas aplicaciones del tema de funciones, trabajar con actividades de modelación y simulación e incorporar la visualización como herramienta didáctica.

Otra investigación centra su atención en los cambios conceptuales usando la teoría de Pozo, en los estudiantes desde la secundaria hasta los principiantes universitarios (Casarrubias, 2003). Para esa investigación, aplican un cuestionario con el fin de explorar los cambios conceptuales en los alumnos acerca del concepto de función. Los resultados que reportan son que en los niveles medio básico, medio superior y superior puede que no sea significativo el concepto de función, es decir, la mayoría de los estudiantes del nivel medio básico tienen la idea de relación, de pares ordenados, de gráficas, de dependencia, pero no señalan las condiciones específicas de esas relaciones, también en el nivel medio superior algunos estudiantes tienen la idea de pares ordenados, de expresiones algebraicas y de operación. Ella recomienda diseñar una propuesta para la enseñanza-aprendizaje del concepto de función en el bachillerato acorde a la teoría de Pozo y de Jungk.

Por otra parte, hay indagaciones respecto a la construcción de la noción de función desde el contexto del profesor, es decir, en conocer las concepciones sobre la Matemática y enseñanza en el nivel medio superior, donde se hace un estudio descriptivo e interpretativo respecto a las prácticas de dos profesores de preparatoria en el aula, y entrevistas enfocadas a las prácticas en el salón (Koh Catzin, 2011), las conclusiones de ese trabajo son que para introducir el concepto de función parten desde la noción intuitiva, partiendo desde las experiencias de los estudiantes, promoviendo la interacción entre el profesor y alumno y empleando un lenguaje al nivel de ellos, estos profesores son reflexivos y se sujetan a los cambios y adecuaciones, también se refleja la organización de la materia, valores como el respeto y la tolerancia, influye la experiencia profesional de los profesores, quienes conciben a la Matemática como una herramienta para la vida y recomiendan rediseñar actividades a partir de las condiciones del grupo.

Un estudio respecto a la función constante se hace a partir de una aproximación a la teoría Socioepistemológica e Ingeniería Didáctica, donde concluyen que la función constante en el escenario escolar no logra un entendimiento de este concepto en nociones como dependencia de variables y variación de variables, en relación a la noción de "regla" de correspondencia entre cantidades o valores cambiantes (López Alonzo, 2009), la definición de función que se maneja en este trabajo, por lo general en la Matemática Escolar, es la correspondencia entre conjuntos, el tratamiento que se le da se basa en la idea de relación entre variable y los estudiantes no adoptan como función a la función constante.

En otro trabajo de investigación se centran en actividades de variación y cambio respecto al concepto de función en estudiantes de nivel medio superior, con el fin de beneficiar en argumentos de tipo variacional desde la teoría de la Ingeniería Didáctica (Pech & Ordaz, 2009), las conclusiones a las que llegaron son que los estudiantes tienen la noción del concepto de función aún después de la experimentación, es decir, si logran dar argumentos variacionales, pero su conocimiento queda limitado a una expresión algebraica o fórmula esto debido al discurso escolar bajo el cual se han enfrentado a dicho concepto.

Por otra parte hay quienes se enfocaron principalmente en las dificultades de concepto de función en estudiantes de Ingeniería, orientada hacia los registros algebraicos y gráficos, para lo que diseñaron y aplicaron un test relacionado a los contenidos (García, Vázquez, & Hinojosa, 2004), algunos resultados y conclusiones que mencionan son que los estudiantes a pesar de que continúan avanzando en sus estudios, no se reafirman las bases del concepto de función ni se logra la maduración del concepto debido a que en la práctica tradicional se observa en general que el estudiante utiliza el registro algebraico con muy pocas conexiones con otros registros semióticos, por consiguiente, el análisis del test y de los resultados les deja como evidencia que el cambio entre registros es la gran dificultad que encuentran los estudiantes, principalmente cuando se trata de pasar del registro gráfico al algebraico. Para mejorar el aprovechamiento, este trabajo sugiere que se incrementen las aplicaciones del registro gráfico y las actividades de transferencia entre registros para el desarrollo de habilidades de pensamiento dentro de la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos.

Otras de las investigaciones son respecto a las deficiencias que existen en el trazado de gráficas de funciones con alumnos de primero de bachillerato, en escuelas tanto públicas como privadas en Valladolid, quienes centran la atención y hacen el análisis tanto de los apuntes que el estudiante hace durante la enseñanza de los saberes matemáticos y de las participaciones de los alumnos (Arce & Ortega, 2013), donde algunas de las conclusiones son que existen dificultades, en algunas funciones para visualizar o eliminar cuál es su comportamiento o propiedades basándose únicamente de su representación gráfica en papel y como recomendación didáctica para los docentes es plantear tareas donde se presente las propiedades de una función, además de tareas en parejas donde se intercambien representaciones graficas elegidas por el docente para que los alumnos tengan que demostrar las propiedades involucradas, proponen tareas donde los alumnos visualicen las diferencias que provoca la elección de escalas en la representación gráfica de una función y tareas donde se discuta cuál es la escala más adecuada para su representación gráfica.

Por otro lado analizan las diferencias y la aplicación del concepto de función en la práctica por medio de un cuestionario para alumnos de tercero y segundo de bachillerato, donde se concluye que la representación de una función debe de coincidir con imágenes familiares a la experiencia, como lo son rectas, curvas continuas y redondas, parábolas, hipérbolas; las falsas concepciones sobre el concepto son las creencias de que una función debe manifestarse a través de una expresión algebraica, identifican las funciones con fórmulas, por tanto el proceso de aprendizaje de los alumnos está influido por la enseñanza del profesor, por ello es necesario reflexionar sobre lo que los profesores enseñan, en qué ponen énfasis y qué tipo de ayuda y recursos ofrecen (De Prada, 1996).

Bajo otro contexto, en la educación Argentina, trabajos de investigación se centran en las dificultades que presentan dos grupos de alumnos pertenecientes a niveles distintos de la educación media y universitaria acerca del concepto de función, donde se aplica una evaluación diagnóstica acerca de concepto de función, imagen, dominio y conjunto imagen, se concentran en la representación gráfica de funciones, en la relación que existe entre la gráfica de una función y la ecuación algebraica, el trabajo lo basan en la perspectiva teórica de las construcciones mentales desde el enfoque de abstracción reflexiva de Piaget, las dificultades reportadas son el identificar una función por su representación gráfica, ver al dominio y la imagen como conjuntos, la confusión con puntos aislados y determinar analíticamente los puntos de intersección de dos funciones, por tanto se concluye que algunos alumnos no resuelven algunas cuestiones por carecer de los conocimientos necesarios para concluir la actividad (Oviedo, 2003).

Respecto a programas matemáticos aplicando la tecnología, existe una propuesta sobre el concepto de función desde el aprendizaje significativo y las alternativas del proceso de aprendizaje relacionadas con los sistemas de representación que conducen a la modelación de las funciones en cursos de Pre cálculo usando como herramienta tecnológica Graph y GeoGebra, algunas de las recomendaciones que se presentan en ese trabajo es integrar las tecnologías de la información puesto que se hace el camino más atractivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, así como también el permitir procesos de metacognición en los estudiantes y en los mismos docentes, como propuestas proponen docentes estudiosos y comprometidos en el asunto de enseñar significativamente la Matemática (Guevara, 2011).

En el trabajo de investigación que hace Zúñiga, la atención se centra en las dificultades que presentan los estudiantes del curso de Calculo I en la construcción del concepto matemático como es el de función, las capacidades y debilidades en cuanto a tareas de interpretación, articulación de representaciones y de visualización, estudiando desde el marco teórico los Sistemas de Representación Semiótica y de Visualización (Zúñiga, 2009), diseñan actividades para analizar las dificultades, capacidades y debilidades, dando como conclusiones que las dificultades de interpretación, conversión y construcción del concepto de función son evidentes en los alumnos, el concepto de función en su representación de lenguaje natural no está presente en los alumnos, los alumnos conciben como única forma de definir una función la representación algebraica, la forma tabular y la forma gráfica, son para ellos las únicas herramientas utilizadas, es decir, que los alumnos no llegan a reconocer el mismo objeto en sus diferentes representaciones Semióticas posibles, como única estrategia para determinar si una gráfica es función es usando la recta vertical, en su mayoría no pueden graficar, a partir de la expresión algebraica que se les proporciona, puesto que al hacer los cálculos, al tabular y al momento de ubicar los puntos en el sistema de ejes cartesianos, presentan dificultad, y como recomendación, el no minimizar las diferentes representaciones de un concepto de manera significativa ni la importancia a la visualización Matemática que es importante para la comprensión y adquisición de conceptos.

Hay quién aborda el tema de funciones de forma no convencional y diseña una experiencia de aula en estudiantes de preparatoria de manera experimental con situaciones de variación y medición, aplicando tablas, gráficos, expresiones analíticas y el lenguaje natural con el fin de que los estudiantes determinen las variables dependiente e independiente involucradas en la actividad y concluye que los estudiantes se muestran motivados y con disposición para el trabajo matemático logrando aproximarse al concepto de función quienes enfatizaron el hecho de que las matemáticas se relacionan con actividades de la vida real (Betancur & Yeni, 2013).

Como se puede ver, trabajos de investigación reportan temas con relación a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, dificultades que se presentan al enseñar el tema matemático, la forma de introducir el concepto o la importancia de rediseñar actividades de simulación y modelación que ayuden a comprender los conceptos de función, en la representación e integración de las herramientas tecnológicas de la información o promoción de la participación en el aula.

Capitulo 3. Marco teórico

3.1. DIALÉCTICA HERRAMIENTA- OBJETO Y JUEGO DE CONTEXTOS

Este modelo se ajusta en la adquisición del saber del alumno, partiendo de las concepciones existentes en él, las cuales se ponen a prueba para ser mejoradas o bien construir nuevo conocimiento para el desarrollo intelectual del alumno. Por tanto, esta teoría se ajusta a lo que se quiere ver en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función.

La teoría Dialéctica Herramienta-Objeto (D.H.O) y juego de contextos sustenta la investigación de este trabajo de tesis y permite analizar el concepto de función desde el enfoque de (Douady, 1984) citado en (Ferrari, 2001). Esta teoría propone un acercamiento a la comprensión de los alcances y significados de aprender puestos en juego en una situación escolar. Su interés se centra en el aprendizaje que sucede en el aula, conformada por el alumno, el docente y el saber matemático. Por tanto, se habla de (D.H.O) en el sentido que las nociones pueden ser abordadas, modificadas y trabajadas en las situaciones propuestas a los alumnos.

La D.H.O. es un proceso cíclico que establece un análisis y reflexión en el proceso de enseñanza-aprendizaje considerados en el acto educativo; el profesor y el alumno; en torno a un saber matemático (Ferrari, 2001). Llámese saber matemático a un conocimiento enseñado o aprendido, desde una noción, una definición, fórmulas, hasta teoremas y demostraciones de conceptos o definiciones, es decir, la acumulación de conocimientos matemáticos que el alumno va adquiriendo a través de los grados de escolaridad que haya o vaya cursando.

Por otro lado, se le llama objeto el reconocimiento de nociones, definiciones, algoritmos y teoremas construidos por una comunidad de científicos matemáticos, es un saber erudito socialmente validado y reconocido. Por ejemplo, una función se define de la siguiente manera:

Una definición de función es (Cárdenas, Lluis, Raggi, & Tomas, 2007):

“Sean A y B conjuntos. Una función:

f: A $\rightarrow$ B es una relación R en A $\times$ B que satisface:

$D_R = A$; es decir, para toda $x \in A$ existe una pareja $(x, y) \in R$.

Cada elemento $x \in A$ tiene asociado uno solo de B; es decir, $(x, y_1) \in R$ y $(x, y_2) \in R$ implica que $y_1 = y_2$.

En este sentido, el uso de algoritmos, modelos, definiciones o teoremas toma el nombre de herramienta, siempre y cuando los conocimientos matemáticos se activen para resolver e interpretar situaciones problemáticas. Ambos conceptos van de la mano en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir, el conocimiento va apareciendo de manera alternante de herramienta y objeto. Para clarificar lo antes mencionado se ejemplifica de la siguiente manera:

Supongamos que se le pide a un alumno determinar el dominio y el rango de la siguiente Figura 1, además de deducir la expresión algebraica que representa.

Como objeto se tiene el concepto de función, función cuadrática, dominio y rango.

Como herramienta, el conocimiento previo que el alumno tiene para resolver el problema, es decir, a que se le llama dominio y rango y cuáles son las características de una función cuadrática.

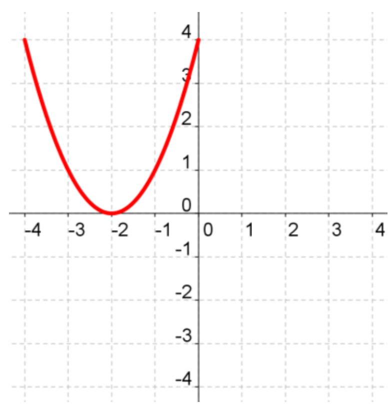


Figura 1. Complemento de ejercicio.

Por consiguiente, el profesor y el alumno aplican el término objeto, es decir, la enseñanza y el aprendizaje se limita en que el profesor en sus prácticas docentes expone al alumno definiciones formales que son posteriormente ejemplificadas con casos concretos que ayudan a darle sentido a la definición obtenida**.** En consecuencia, nos referimos por objeto a las definiciones matemáticas que son dichas por el profesor dejando a un lado las conexiones que existen. Por consecuencia, se debe tener en cuenta que, para muchos alumnos, el estudio de objetos matemáticos formales como son presentados o expuestos, son tan complejos y alejados a su realidad, sumándole a ello también la falta de aplicabilidad cotidiana o la ausencia de sentido del estudio del objeto mismo.

El avance del conocimiento matemático que se da cuando el estudiante aplica y construye herramientas conceptuales, se convierten posteriormente en objetos de reflexión (Douady, 1984). Dicho de otra manera, si el conocimiento que el alumno tiene lo sabe aplicar en la situación adecuada y logra dar fundamentos teóricos e inferencias a su conclusión se dice que ha llegado a una reflexión sobre el objeto.

Hay que considerar que un alumno, ante un problema matemático, puede recurrir a una herramienta implícita o explícitamente (Ferrari, 2001). Para Douady, una herramienta explicita son aquellas nociones que un alumno pone en juego, que puede formular y cuya utilización puede justificar.

Considere el siguiente ejemplo:

Analiza la función:

$$f(x) = x^2$$

En el dominio de los números reales y determina el intervalo donde la función es creciente o decreciente.

Una herramienta implícita es cuando se pone en juego ideas que permiten utilizar un procedimiento cuya justificación hace referencia a nociones para formular o expresar en términos de acciones en un contexto particular (Ferrari, 2001). Ejemplificando lo anterior, el ejercicio quedará de la siguiente manera:

Analiza la función:

$$f(x) = x^2$$

y determina donde la función es creciente o decreciente.

Para esto se esperaría que el alumno tenga los conocimientos previos de lo que tiene que hacer para justificar su resultado.

Cabe destacar que el dominio de validez que se le da a un conocimiento adquirido y aprendido dependerá de la madurez que dispone un alumno y de su grado de escolaridad, por tanto, el profesor es quién crea las condiciones para que el alumno aprenda y vaya adquiriendo un saber. Entonces concluimos que un concepto juega el rol de herramienta cuando nuestro propósito es la aplicación o la utilidad que nos ayuda para resolver un problema o ejercicio. Ahora se entiende como juego de contexto cuando se habla de marco algebraico, marco numérico, marco gráfico, icónico entre otros, implica que el alumno interactúe con varios contextos, es decir, que se familiarice en los diferentes tipos de contextos que existen para la resolución de un problema, ya sea provocado por el profesor u otro alumno. El cambio de contexto permite a su vez atacar las dificultades encontradas en el uso de un marco y hacer uso de otro tipo de herramientas para la resolución de un problema. Para Ferrari, los juegos de contextos son fuente de desequilibrios y la re-equilibración de aprendizajes. En la Figura 2 se muestra un esquema de función en sus diferentes representaciones.

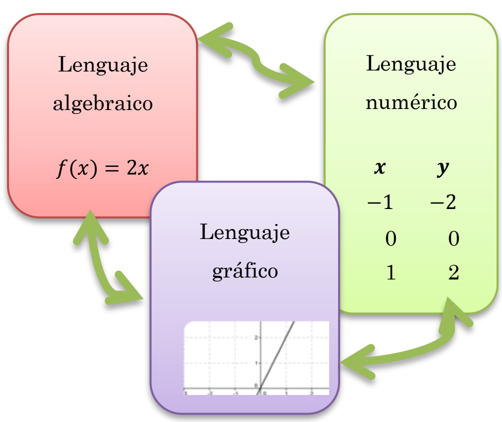


Figura 2. Esquema de juego de contexto en el concepto de función

Según Ferrari, *en* un cambio de contexto se pueden distinguir tres fases:

1. La transferencia e interpretación, pues los alumnos son enfrentados a un problema, entonces desde su experiencia y habilidades lo asocian a su contexto para su interpretación.

2. Las correspondencias imperfectas entre contextos debido a razones matemáticas o a conocimientos insuficientes. La situación que se le proponga al alumno debe ser fuente de desequilibrio.

3, La mejora de las correspondencias y progreso del conocimiento ya que el juego y comunicación entre contextos es un factor de re-equilibración.

La encuesta aplicada se desarrolla en el Capitulo 5. Se basa en parte en esta teoría, se hace énfasis en el juego de contexto sin dejar de lado el papel que juegan cada uno de los elementos involucrados como es el objeto matemático y la herramienta. En la encuesta se utiliza el cambio de marcos como el algebraico, gráfico y tabular aplicando en los ejercicios herramientas implícitas y explicitas.

3.2. FUNCIONES

En la vida cotidiana encontramos situaciones en las que se aplican las funciones, pero en el aula se estudia el tema de manera descontextualizada, se enfatiza en la teoría más no en la práctica y por consiguiente no permite la reflexión en los alumnos, tan así pasan desapercibidos en la forma en cómo se aplican; cómo y en dónde se visualizan las funciones en su contexto, quedando a criterio del profesor como abordar el tema. Para ejemplificar, se considera una situación real como es el caso de la persona que vende tortillas o el operador de camiones, hacen uso de una tabla en donde por un lado se tiene el precio y por otro la cantidad de personas o kilos, para dar como resultado el monto a cobrar, por tanto esas personas sin tener el conocimiento teórico que un alumno de nivel medio superior tiene, se puede llevar a una representación gráfica de kilos en el eje x y monto a pagar en el eje y, o número de personas en el eje x por monto a pagar en el eje y, donde aparecen valores que van cambiando dependiendo de una regla fija. Este tipo de actividades son las que se deben utilizar e implementar en la enseñanza para un mejor dominio del concepto matemático formal. Con esta ejemplificación se observa, sin saberlo, la utilidad en la vida diaria y más aún en problemas más complejos de diversas áreas como la de Finanzas, Economía, Estadística, Ingeniería, Medicina, Química, Física, etc. puesto que existen modelos matemáticos que se modelan por medio de funciones. Por ejemplo: la utilidad de un producto, distancia del flujo de agua, movimiento de una pelota, funciones de oferta, calentamiento global entre otros (Tan, 2012), o en áreas de aplicación como es la Ciencia de Materiales, que permite abordar temas de acuerdo con el contexto de interés.

El estudio de las funciones y sus gráficas son un tema interesante, se puede analizar desde lo que enseña el profesor, de los apuntes del alumno, del programa escolar y del libro de texto que es la principal herramienta que el alumno tiene a la mano. Cabe mencionar que, en la mayoría de los casos, no solo se da el aprendizaje con el conocimiento que el profesor enseña ni tampoco el alumno aprende con solo escuchar lo que el profesor dice. Por tanto, se cuenta con otras herramientas de aprendizaje que permiten en el alumno enriquecer su conocimiento.

Por tanto, este trabajo de investigación solo se está analizando desde el aprendizaje del alumno y el libro de texto, tomando en cuenta programas educativos de nivel medio superior y superior, así como los respectivos libros de texto. Este trabajo toma como base los programas de Matemáticas IV de la Dirección General de Bachillerato aprobada por la Subsecretaria de Educación Media Superior (Dirección General de Bachillerato, 2018) y el de la materia de Álgebra Superior de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí aprobado por el HCDU (Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, 2010). Los libros que se tomaron como base, son los de texto que se especifican en cada uno de los programas; Matemáticas IV (Ramírez, 2008) y Matemáticas IV (Garrido, 2015) para el nivel medio superior, mientras que para el nivel licenciatura es el libro de Álgebra Superior (Cárdenas, Lluis, Raggi, & Tomas, 2007). Cabe la aclaración de que se considera el libro de Colegio de Bachilleres (Ramírez, 2008), ya que la muestra de estudiantes de nivel medio superior para el desarrollo de este trabajo, provienen de esta institución de la capital Potosina como se describirá más adelante.

La materia de Matemáticas IV se ubica en el cuarto semestre en el nivel medio superior y el programa del Colegio de Bachilleres lo divide en cuatro bloques (Ramírez, 2008). El primer bloque lo destinan a relaciones y funciones, al segundo bloque a funciones polinomiales, al tercer bloque a las funciones racionales y el cuarto bloque a las funciones trascendentes. Mientras que para el nivel licenciatura en el programa sintético de Álgebra Superior ubicado en el primer semestre de licenciatura, le destinan la primera unidad a funciones y conjuntos; algunos temas que se abordan son: pertenencia, operaciones entre conjuntos, conjuntos finitos e infinitos, cardinalidad de conjuntos finitos, producto cartesiano, relaciones y funciones, funciones inyectivas, subyectivas y biyectivas.

Haciendo una descripción de los conceptos básicos de función, tanto a nivel bachillerato como a licenciatura se destaca lo siguiente:

En el libro de Ramírez Auces del Colegio de Bachilleres, comienzan definiendo lo que es una relación: "*implica la idea de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos que forman parejas ordenadas*" y para clarificar una relación agrega dos ejemplos triviales entre dos conjuntos, el primero con números enteros y el segundo define un conjunto S formado por los planetas, posteriormente define una función como: *"una relación es función si para dos conjuntos denominados dominio y rango establece una regla de correspondencia entre estos, de tal modo que a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo un elemento del rango"* (Ramírez, 2008). Cabe mencionar que la representación usual que el autor maneja para visualizar una función es usando diagramas como se muestra en la figura 2.

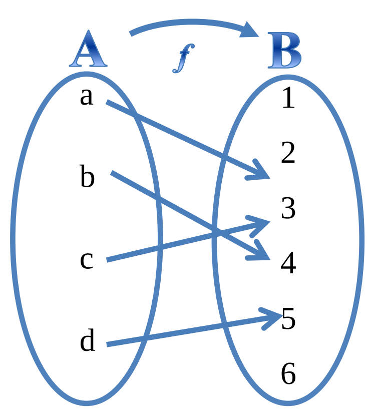


Figura 3. El concepto de función como una relación entre conjuntos

Por otro lado, Ramírez Auces menciona que la *"variable independiente es la* x *y la variable dependiente es* y" sin más detalle, dejándolo como tarea del profesor. Para ejemplificar lo antes mencionado agrega ejemplos sencillos con conjuntos usando diagramas y como parejas ordenadas, uno que no es función y el segundo que si cumple con las características de función. Menciona que las parejas ordenadas se ubican en un plano cartesiano y para esto describe como ubicar un punto en el plano cartesiano "*a través de dos ejes perpendiculares a los cuales llamó* x *e* y*, el eje* x *es horizontal y el eje* y *vertical, donde se intersecan inicia la graduación en* x*, los positivos hacia la derecha y los negativos a la izquierda y en* y *los positivos hacia arriba y los negativos hacia abajo*". *"Los elementos que integran la pareja ordenada son llamados abscisa y ordenada, la primera de estas corresponde a las* x *y la segunda a las* y*".* Para esto representa un par de puntos en un plano cartesiano.

Y para ejercitar los conceptos, las actividades son triviales, es decir, desde localizar puntos en un plano hasta decir si una serie de puntos corresponden a una función, y determinar rango y dominio. Cabe mencionar que no definen de manera general lo que es dominio y rango, estos conceptos lo trabajan por separado cuando trabajan con cada una de las funciones que existen y se deja como tarea para el profesor.

En la forma en como está estructurado el libro de texto a nivel medio superior, se observa que permite en los alumnos la problematización, es decir, que una vez que el alumno ve el tema, lo ejemplifica con ejemplos básicos y en los ejercicios plantean preguntas tanto de fenómenos físicos como de situaciones de la vida cotidiana. Los ejercicios son muy directos de resolver, esto implica que el alumno no se familiarice con otro tipo de ejercicios no tan directos. Cabe mencionar que el libro es una guía tanto del profesor como del alumno, complementándose con ejercicios extras que el profesor desde su experiencia proporcione a los alumnos.

Por otro lado, el libro de Matemáticas IV de la Secretaria de Educación Pública (SEP) a través de la Dirección General del Bachillerato (Garrido, 2015), que se puede consultar en línea, contiene ocho bloques de los cuales en el primer bloque lo destinan a los conceptos básicos de relaciones y funciones (regla de correspondencia, representación gráfica de funciones, evaluación de una función y dominio y rango de una función). De manera general se trabaja la misma estructura que en el libro de Ramírez Auces, es decir, dan la teoría, ejemplos y actividades de aprendizaje para cada tema. Aunque cabe resaltar que Garrido Méndez emplea más notación simbólica, es más extensa la teoría en cuanto a las definiciones, ejemplos, incluye problemas y ejercicios no tan directos y frecuentemente emplea las diferentes representaciones de función a diferencia al libro de texto de Ramírez Auces que solo se enfoca en las representación algebraica y gráfica.

Para (Garrido, 2015), antes de dar la definición de función, empieza definiendo de manera intuitiva lo que es un conjunto como: "*conjunto está relacionada con el concepto de agrupación o colección de objetos"* y ejemplifica diciendo que cuando escuchamos un grupo de músicos tocando juntos una melodía decimos que se trata de un conjunto musical. Entonces define un conjunto como "*el grupo o colección de personas, objetos, etc. Que tienen alguna característica en común*" y se denota con las letras mayúsculas y elemento como: "*los conjuntos están formados por elementos y es cada una de las personas u objeto"* y denota con las letras minúsculas. Menciona que conjunto se puede representar por extensión $A = \{rojo, azul, amarillo\}$, por comprensión $A = \{x \mid x \; es \; un \; color \; primario\}$ y por diagramas de Venn. Relación se define formalmente como: "*el subconjunto de un producto cartesiano formado por los elementos de este último, normalmente definido por una regla o ley dada. Tales elementos se denotan como* (x, y) *y significa que* x *está relacionado con* y*"*, y una relación se puede representar como una oración, un diagrama, una tabla, parejas ordenadas y ecuación. Otro de los conceptos es dominio y la define como "*el conjunto formado por los primeros componentes de las parejas que pertenecen a la relación en un conjunto A"*además de definir: *"Contradominio o codominio se refiere al conjunto al cual pertenecen los segundos componentes de las parejas contenidas en la relación en el conjunto B"* y rango o conjunto imagen como: "*Es el conjunto formado por los primeros componentes de las parejas que pertenecen a la relación*."

Por lo que una función la define como "*una relación tal que a cada elemento del dominio está relacionado con uno y sólo un elemento del codominio y su representación es* $f\colon A \to B$ *(se lee "*f*" va de* A *a* B*")*" y se denota como $y = f(x)$ y también la define como "*una regla de asociación entre dos conjuntos que raciona a cada elemento del primer conjunto con uno y solo* *un elemento del segundo*". Finalmente menciona que una constante es un símbolo que representa un valor fijo: mientras que una variable es un símbolo que puede representar diferentes valores. Menciona que para representar una función de manera gráfica se usa un sistema coordenado cartesiano, en el cual se localizan puntos en el plano cartesiano y de manera general, para evaluar una función $y = f(x)$ se sustituye el valor de la variable independiente, sobre la regla definida por la función.

Por otro lado, Cárdenas define antes de función, lo que es una relación como: *"Sean A y B conjuntos. Una relación entre A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$"* (Cárdenas, Lluis, Raggi, & Tomas, 2007). Cabe mencionar que en temas posteriores trabajan con los temas de conjunto y subconjunto. Se observa que la definición es más elaborada hablando matemáticamente, es decir, hace uso de notaciones y símbolos. Posteriormente define función en notación de conjunto y de relación, es decir, *"Sean A y B conjuntos. Una función $f: A \rightarrow B$ es una relación R en $A \times B$ que satisface:*

1) $D_R = A$; es decir, para toda $x \epsilon A$ existe una pareja $(x, y) \epsilon R$.
2) Cada elemento $x \epsilon A$ tiene asociado uno solo de B; es decir, $(x, y_1) \epsilon R$ y $(x, y_2)\ \epsilon R$ implica $y_1 = y_2$.

Una función la denota como: $f: A \rightarrow B$ es $A \rightarrow B$. El conjunto A es llamado el dominio de la función, el conjunto B es el llamado el codominio de la función y para cada $x \in A$, denota con $f(x)$ al elemento de B que le corresponde; es decir, $\left(x, f(x)\right)$ y llama a la imagen del elemento de x a $f(x)$ (Cárdenas, et al., 2007).

De manera general los ejercicios y ejemplos van por grado de dificultad desde lo más fácil a lo más complejo, algunos parten de lo general a lo particular, es decir, la respuesta no es tan inmediata, por consiguiente, permite en el alumno pensar un poco en la respuesta. A diferencia de los ejercicios que manejan a nivel bachillerato, que son repetitivos y de manera trivial. Es importante resaltar que el libro de Álgebra Superior de Cárdenas no contiene muchos ejemplos aplicados bajo un contexto de problemática de la vida diaria o de diversas áreas.

Otro de los conceptos del tema de funciones es la composición de funciones que para (Ramírez, 2008) la define como: *"Sean f y g dos funciones, la operación composición denotada por $(f\ o\ g)\ (x)$ se define como $f(g(x))$ esto es f aplicada en g."* y los ejemplos son muy básicos, es decir, son ejercicios de calcular, mientras que para (Cárdenas, et al., 2007) la definición es: "Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ dos funciones. Definimos la composición de f y g, denotada por $g \bullet f$, como la función $g \bullet f: A \rightarrow C$ dada por $(g \bullet f)(x) = g(f(x))$ *para toda* $x \in A$. Los ejercicios no son tan directos o fáciles de resolver por la notación matemática que se emplea.

A manera de resumen, el diagrama de la Figura 4 presenta los conceptos generales de función que deben de abordarse al ver el tema para un mejor dominio del tema en el momento y posteriormente.

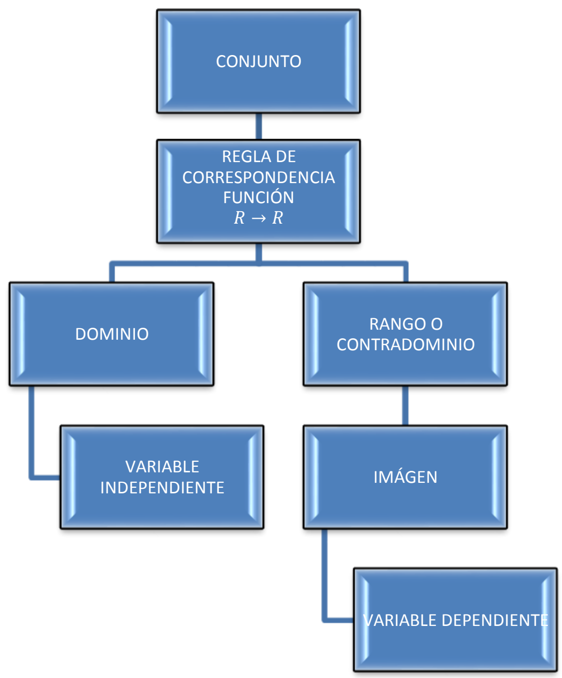


Figura 4. Conceptos básicos de función que se debe abordar en el proceso enseñanza-aprendizaje de cualquier nivel educativo.

Respecto a la clasificación que todo libro maneja tanto de bachillerato como a nivel licenciatura se pueden apreciar en el esquema de la Figura 5, que, aunado a las características y propiedades de las mismas, será de mucha utilidad para el alumno en el análisis y aplicaciones de funciones.

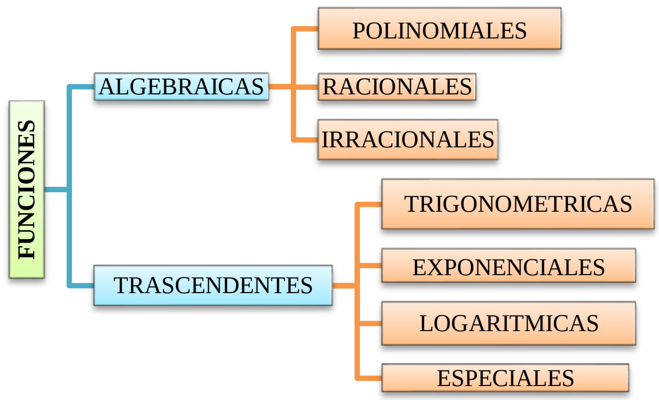


Figura 5. Clasificación de funciones con base a sus propiedades.

Capitulo 4. Importancia de las funciones en Ciencia de Materiales

En este apartado se hace una descripción sobre las aplicaciones de funciones que existen en la vida cotidiana que es la Ciencia de Materiales por mencionar uno de tanto ejemplos que existen puesto que es una ciencia que abarca áreas de la Matemática y disciplinas y que indudablemente alumnos tanto de bachillerato como de licenciatura desconocen la importancia que tiene el tema de función, aunque los usos están presentes. Entonces como docentes en ciencias es importante introducir y motivar a los alumnos a explorar otras cosas novedosas.

La Ciencia de Materiales, la cual es un área que abarca muchas disciplinas donde indudablemente se aplican funciones, además de que está presente en nuestra vida diaria independientemente de las actividades que se desarrollan. La Nanotecnología es uno de los campos científicos donde se combinan la Física, la Matemática, la Química, la Biología, la Medicina, la Informática y la Ingeniería, entre otros, todas ellas para ser aplicadas en cualquier área donde se apliquen materiales, inclusive en la vida diaria como en la fabricación de materiales, estructuras, dispositivos y sistemas funcionales. Es un área que ayuda a resolver problemas actuales y futuros, gracias a los modelos matemáticos ya definidos que se aplican para resolver un problema tomando en cuenta la situación o contexto.

Como parte fundamental de la Nanotecnología es el comprender las propiedades asociadas con los materiales, saber porque existen, como se pueden alterar, como medirlas, como impactan en el desempeño, los efectos al paso del tiempo y muy importante, como evaluar las consideraciones económicas, ecológicas y de salud.

Dado el campo tan extenso, solo se presentan algunas de las funciones básicas de una variable independiente de gran impacto que se pueden encontrar y aplicar en la Nanotecnología y que cualquier alumno que culmina el nivel medio superior debería tener la capacidad de entender, utilizar, aplicar e interpretar sin mayor problema. Para ejemplificar enseguida se mencionan algunas aplicaciones que se modelan con funciones de una variable.

Hablando de propiedades mecánicas, se menciona la dureza Brinell (HB) que es una escala utilizada para evaluar la resistencia de la superficie de un material a la penetración (Newell, 2011), que lo podemos utilizar para saber si un material resiste a ralladuras como los parabrisas, a golpes como los cascos de construcción, etc. Esta medida se describe con la siguiente función:

$$HB = \frac{F}{\left(\frac{\pi}{2}\right) D \left(D - \sqrt{D^2 - D_i^2}\right)}$$

En donde F está en kilogramos y representa la carga aplicada en una esfera de carburo y tungsteno ya establecida por norma, ésta se utiliza para realizar el ensayo de la dureza y tienen un diámetro establecido D. Mientras que D_i es el diámetro de la impresión que deja la esfera en el material de ensayo en milímetros. El resultado puede representar algo tan suave equivalente al talco o tan duro como el diamante de acuerdo con escalas que se han generado.

La importancia que se tiene el enseñar el tema de función, no se limita en solo mecanizar la definición sino comprender sus componentes que la define como función, esto nos permite analizar, evaluar e interpretar los resultados. Tal es el caso que, para la dureza, el diámetro de la impresión que deja la esfera jamás podrá ser mayor a la de la esfera utilizada, pues eso hará referencia a otros factores que afecten el sistema, también se debe considerar que mientras mayor sea este diámetro impreso, menor será la dureza del material. Por otro lado, a mayor fuerza aplicada con un mismo diámetro de impresión, mayor será la dureza.

Dentro de las propiedades ópticas, se podría encontrar casos en la vida diaria como la mostrada en la Figura 6, la cual puede explicarse con un concepto muy sencillo que obedece a la Ley de Snell.

La Ley de Snell que afirma que el ángulo de incidencia de un haz de luz es función del ángulo de refracción bajo la siguiente función:

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\theta_2\right)$$

Figura 6. Fotografía donde se observa la diferencia de los índices de refracción en dos medios.

Aunque comúnmente se puede encontrar en distintos libros de texto expresada con la siguiente ecuación (Bueche, 1991), (Serway & Jewett, 2015):

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Donde n_1 y n_2 son el índice de refracción del medio 1 y el medio 2 respectivamente. Para el caso de la imagen (Figura 6) puede considerarse que el medio 1 es el aire, mientras que el medio 2 es el agua donde está sumergido el cuerpo del oso.

θ_1 y θ_2 corresponden al ángulo de incidencia y al ángulo de refracción del haz que atraviesa los dos o más medios.

Estas expresiones pueden ser mucho más compleja dependiendo del área de estudio, donde se agregan funciones vectoriales, diferenciales, constantes de corrección, funciones continuas, entre otras (Yu, y otros, 2011).

En esta era de los avances tecnológicos no se puede dejar de lado el mencionar las propiedades eléctricas, una de las funciones básicas es la Ley de Ohm, la cual afirma que para muchos materiales la razón de la densidad de corriente al campo eléctrico es una constante σ que es independiente del campo eléctrico que produce la corriente (Serway & Jewett, 2015), y se define con la siguiente función de la densidad de corriente J con respecto al campo eléctrico E:

$$J = \sigma E$$

Donde σ es referente a la conductividad eléctrica y es una constante para cada material, ya sea plata, vidrio, agua, cobre, etc.

Se pueden obtener resultados importantes con la Ley de Ohm; aunado a otros conceptos y funciones compuestas; en problemas de situaciones importantes como el determinar el paso de una corriente peligrosa por el cuerpo humano, calibre de alambre a utilizar para evitar un incendio, costos, etc. Esta Ley permite conocer propiedades de los materiales muy importantes como la resistencia y conductividad (Julio-Betancourt & Hooton, 2004) y puede ser generalizada (Chernov, Eyink, Lebowitz, & Sinai, 1993) para estudios de simulación en estimulaciones nerviosas por ejemplo (Roth & Basser, 1990).

El concepto de función en la Ciencia de Materiales es de gran importancia para el estudio y desarrollo que atañen al mundo entero, así como en cualquier área de estudio, es un área de la que pueden obtenerse aplicaciones específicas con base a los intereses de los estudiantes y al nivel de complejidad del estudio deseada.

Capitulo 5. Metodología

5.1. DISEÑO METODOLÓGICO

El desarrollo de esta investigación se basa en un estudio cualitativo y experimental, considerando que un enfoque cualitativo utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación y se basan en explorar y describir y luego generar perspectivas teóricas, es decir, parten de lo particular a lo general (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010).

Población y muestra

La encuesta se aplicó a una muestra de 148 estudiantes (cuatro grupos) de sexto semestre del turno vespertino del Colegio de Bachilleres plantel 25 de la capital de San Luis Potosí, cabe mencionar que los grupos son de 35 a 40 alumnos aproximadamente y son de una edad promedio entre 18 y 19 años. Por otro lado, la misma encuesta se aplicó o una segunda muestra de 14 alumnos a nivel licenciatura del primer semestre entre 18 y 20 años de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP).

Como instrumento se diseñó una encuesta para ambos niveles, en bachillerato se les aplicó a los alumnos del turno vespertino haciendo estudios descriptivos y analizando los datos por medio de gráficas y cuadros usando como herramienta tecnológica Excel para el vaciado y análisis de datos.

Fases para la recolección de datos

La primera fase se dedicó a la elaboración y diseño de la encuesta, para esto se hizo una investigación previa de los conceptos de función que se ven en el nivel medio superior y en el superior durante el semestre, para esto, se recurrió a los programas de estudio para los dos niveles y al libro de texto que emplean como herramienta de trabajo.

El propósito de aplicar las encuestas fue el analizar y reflexionar sobre las posibles dificultades que presentan los estudiantes al aprender el concepto. La estructura de la encuesta y el objetivo de cada reactivo se muestran a continuación, así como también la forma en cómo se aplican los juegos de contexto de acuerdo con el marco teórico (D.H.O.).

FASE 1: TRANSFERENCIA E INTERPRETACIÓN

REACTIVO 1: Define que es función y da un ejemplo de función polinomial.

Objetivo: Determinar la comprensión del concepto de función y la capacidad de ejemplificar.

REACTIVO 2. Menciona los tipos de función que recuerdas.

Objetivo: Determinar los tipos de funciones que conoce el estudiante.

FASE 2: CORRESPONDENCIAS IMPERFECTAS

REACTIVO 3. En la fórmula $°F = (°C)(1.8) + 32$, determina lo siguiente:

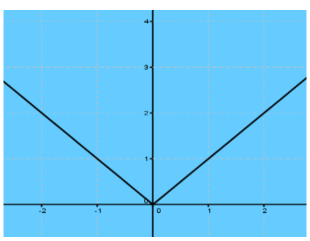
Variable dependiente: _______________

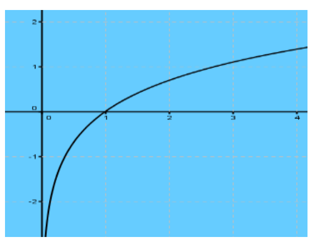
Variable independiente: _____________ Constantes: _______________

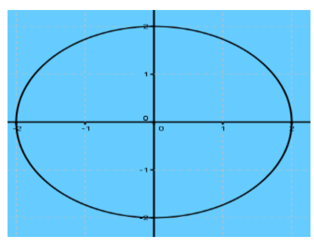
Objetivo: Determinar los elementos presentes en una función que identifica el estudiante. Verificar la comprensión del estudiante de la variable dependiente, independiente y de las constantes con un ejemplo especificado.

FASE 1: TRANSFERENCIA E INTERPRETACIÓN

REACTIVO 4. De las siguientes gráficas selecciona el inciso que no representa una función:

a) 

b) 

c) 

Objetivo: Determinar si el estudiante razona y distingue gráficas de funciones.

FASE 2: CORRESPONDENCIAS IMPERFECTAS

REACTIVO 5. Relaciona las siguientes funciones con su representación gráfica (no todos los incisos se relacionan a una gráfica).

a) $f(x) = \ cos\, x$

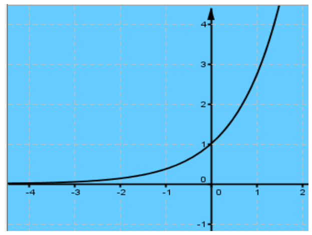
b) $f(x) = \ sin\, x$

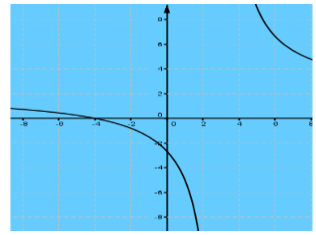
c) $y = \frac{2x+8}{x-3}$

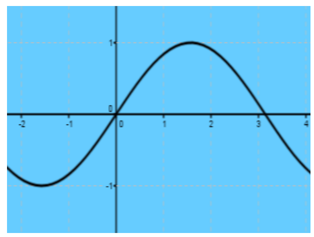
d) $y = e^{x}$

e) $y = \log x$

f) $y = x^2 + 3$







Objetivo: Determinar si el estudiante tiene la capacidad de seleccionar y clasificar un gráfico con su representación algebraica.

FASE 1: TRANSFERENCIA E INTERPRETACIÓN

REACTIVO 6. Sean $f(x) = 2x$ y $g(x) = x^2 - 1$, determine la función compuesta $(f \bullet g)(x) = f\big(g(x)\big)$

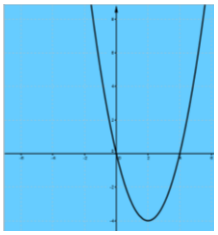
Objetivo: Identificar si el estudiante conoce y Calcula la función compuesta.

REACTIVO 7. Usando las funciones del ejercicio anterior calcula el producto de $f(x)$ y $g(x)$.

Objetivo: Verificar que el estudiante opera el producto de dos funciones.

FASE 2: CORRESPONDENCIAS IMPERFECTAS

REACTIVO 8. Cuál de los incisos corresponde al dominio y rango de acuerdo con la gráfica:



a) Dominio: $[-2,6)$ Rango: $[-4,8)$

b) Dominio: $(-\infty,\infty)$, Rango: $(-\infty,\infty)$

c) Dominio: $(-\infty,\infty)$, Rango: $[-4,\infty)$

Objetivo: Garantizar la comprensión del concepto de dominio y rango para aplicarlo.

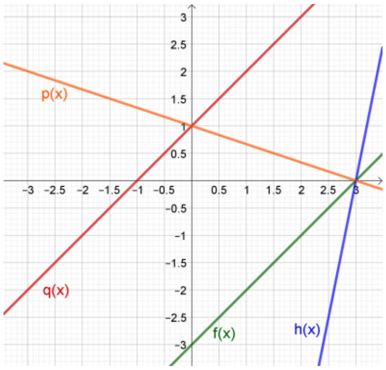
FASE 1: TRANSFERENCIA E INTERPRETACIÓN

REACTIVO 9. Gráfica la siguiente función $f(x) = x + 2$ para valores de x desde -3 hasta 3.

Objetivo: Determinar si el alumno es capaz de graficar una función lineal considerando el intervalo.

FASE 2: CORRESPONDENCIAS IMPERFECTAS

REACTIVO 10. Relaciona la función de la gráfica con su función algebraica dada la gráfica de $f(x)$ en la figura.



a) $f(x) + 4$

b) $-1/3\, f(x)$

c) $5f(x)$

Objetivo: Determinar si el estudiante deduce una función algebraica a partir de otra.

En la segunda fase, se solicitó el permiso a la subdirectora del Nivel Medio Superior, externándole los motivos y el propósito de la visita, así como también se presentó el tipo de encuesta que se les aplicaría a los alumnos, obteniendo como respuesta una actitud positiva y toda la disposición de apoyo en cualquier momento antes, durante y posterior a la aplicación del material. De tal forma, que los profesores en servicio demostraron su apoyo en el proceso. Lo primero que se realizó, fue la presentación de quien realizó la actividad mencionada en cada grupo, así como se explicó el propósito, resultando como único inconveniente que los alumnos estaban en proceso de evaluación, por lo que se percibió la preocupación y la presión de los estudiantes por terminar sus trabajos, por lo que algunos no se tomaban todo el tiempo necesario y/o otorgado para responder la encuesta con conciencia. La aplicación se concluyó en una semana aproximadamente. Y para los de licenciatura fue más fluido puesto que era un grupo pequeño de 14 alumnos de primer semestre de la Facultad de Ciencias UASLP con otra visión y otros intereses.

La tercera fase comprende la revisión y concentración de los datos obtenidos en la encuesta para ambos niveles, usando Excel para el vaciado de los datos.

La cuarta fase comprende el análisis e interpretación de los resultados para proceder a formular las conclusiones.

Capitulo 6. Resultados y análisis de resultados

6.1. NIVEL MEDIO SUPERIOR

A continuación se presenta la Tabla 1 del registro de datos sobre las respuestas que obtuvieron los alumnos de bachillerato de acuerdo a la encuesta, aplicada a 148 alumnos correspondiente a los cuatro grupos de sexto grado del Colegio de Bachilleres plantel 25 turno vespertino en la materia de Matemáticas IV en el tema del concepto de función con una duración de 15 minutos máximo. A las preguntas contestadas correctamente se les asignó el valor de 1, las preguntas contestadas incorrectamente se les asignó el número 0 y finalmente las preguntas no contestadas se etiquetan con NC.

Tabla 1. Resultados de la encuesta aplicada en nivel medio superior.

	Número de pregunta																
ALUMNO	**1**		**2**	**3**			**4**	**5**			**6**	**7**	**8**	**9**	**10**		
	A	**B**		**A**	**B**	**C**		**A**	**B**	**C**					**A**	**B**	**C**
A1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	NC	NC	1	0	NC	NC	NC
A2	NC	NC	NC	0	0	0	0	0	0	0	NC	NC	NC	NC	0	0	0
A3	NC	NC	1	0	0	0	1	0	0	0	0	NC	0	1	0	0	0
A4	NC	NC	1	0	0	1	0	0	0	0	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
A5	NC	NC	1	0	0	0	1	0	0	0	0	NC	0	NC	0	0	0
A6	NC	NC	1	0	0	0	0	0	0	0	NC	0	0	0	0	0	0
A7	NC	NC	1	0	1	1	1	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
A8	NC	NC	1	0	0	0	0	0	0	0	NC	NC	0	NC	1	0	0
A9	NC	NC	1	0	0	0	1	0	0	0	0	NC	0	0	0	0	0
A10	NC	NC	1	0	1	1	0	0	1	0	NC	NC	1	0	1	0	0
A11	NC	NC	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
A12	NC	NC	1	0	1	1	1	0	0	0	NC	1	1	0	0	0	0
A13	NC	NC	1	0	0	1	1	NC	NC	NC	NC	NC	1	NC	0	1	0
A14	NC	NC	1	0	0	0	1	NC	NC	NC	NC	NC	0	NC	0	0	0
A15	NC	NC	1	0	0	0	1	0	0	0	NC	NC	1	0	0	0	0
A16	NC	NC	1	1	1	1	0	0	0	0	NC	NC	0	NC	NC	NC	NC
A17	NC	NC	1	0	0	0	1	0	0	0	NC	NC	0	NC	0	0	0
A18	NC	NC	1	0	0	0	0	0	0	0	0	NC	1	1	NC	NC	NC
A19	NC	NC	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	NC	1	0	0
A20	NC	NC	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	O
A21	NC	NC	1	0	0	0	1	0	0	0	NC	NC	1	NC	0	0	0
A22	NC	NC	NC	0	1	1	0	0	0	0	NC	NC	0	1	NC	NC	NC
A23	NC	NC	NC	0	0	1	0	0	0	0	NC	NC	0	NC	NC	NC	NC
A24	NC	NC	NC	1	0	1	0	0	0	0	NC	NC	0	NC	NC	NC	NC
A25	NC	NC	NC	0	0	1	0	0	0	0	NC	NC	0	0	0	0	1
A26	NC	NC	NC	0	0	0	1	0	0	0	NC	NC	0	0	NC	NC	NC
A27	0	0	NC	0	0	0	0	0	0	0	NC	NC	0	NC	0	0	0
A28	NC	NC	NC	0	0	0	1	0	0	1	NC	NC	0	NC	NC	NC	NC
A29	NC	NC	NC	0	0	1	0	0	1	1	NC	NC	0	NC	NC	NC	NC
A30	NC	NC	NC	0	1	1	0	0	0	0	NC	NC	0	0	NC	NC	NC
A31	NC	NC	NC	0	0	1	0	0	0	0	NC	NC	0	0	NC	NC	NC
A32	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A33	1	0	1	0	0	NC	0	0	0	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A34	0	0	1	0	0	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
A35	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	NC	0	0	0
A36	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
A37	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
A38	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
A39	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
A40	0	1	1	0	0	0	1	NC	NC	NC	NC	NC	0	0	NC	NC	NC

Correctamente=1

Incorrectamente=0

No contestada=NC

ALUMNO	Número de pregunta																
	1		2	3			4	5			6	7	8	9	10		
	A	B		A	B	C		A	B	C					A	B	C
A41	NC	1	0	0	0	1	0	0	0	0	NC	NC	0	1	NC	NC	NC
A42	0	1	0	1	0	1	1	NC	NC	NC	0	0	0	0	0	0	0
A43	0	1	0	1	1	1	1	NC	NC	NC	0	0	1	0	0	0	0
A44	1	NC	0	0	0	0	0	NC	NC	NC	0	0	0	0	0	0	0
A45	1	NC	NC	0	0	1		0	0	NC	NC	NC	0	0	NC	NC	NC
A46	0	NC	NC	0	0	NC	0	NC	NC	NC	NC	NC	0	NC	NC	NC	NC
A47	0	NC	NC	0	0	0	1	NC	NC	NC	NC	NC	0	NC	0	1	1
A48	1	1	NC	0	0	1	1	NC	NC	NC	1	0	0	0	0	0	0
A49	0	1	0	1	0	1	1	NC	NC	NC	0	0	0	0	NC	NC	NC
A50	0	1	NC	0	0	1	0	0	0	0	NC	NC	1	1	1	0	0
A51	0	NC	0	0	0	0	1	NC	NC	NC	NC	NC	0	0	NC	NC	NC
A52	0	NC	0	1	0	1	0	NC	NC	NC	0	0	0	0	0	0	0
A53	0	1	NC	0	0	1	0	NC	NC	NC	NC	NC	0	0	NC	NC	NC
A54	0	NC	1	1	0	1	0	NC	NC	NC	NC	NC	1	0	NC	NC	NC
A55	1	1	1	0	0	0	0	NC	NC	NC	NC	NC	0	1	NC	NC	NC
A56	NC	1	1	0	0	0	1	0	0	0	NC	0	1	1	1	1	0
A57	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	NC	NC	0	1	0	0	0
A58	0	NC	1	0	0	0	1	0	0	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A59	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A60	1	NC	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A61	0	NC	1	0	0	1	1	0	0	0	0	NC	0	0	NC	NC	NC
A62	0	NC	1	0	0	1	1	0	0	0	0	NC	0	0	1	1	0
A63	NC	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
A64	NC	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
A65	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
A66	1	NC	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A67	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	NC	NC	1	1	NC	NC	NC
A68	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
A69	1	NC	1	0		1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
A70	0	NC	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
A71	0	NC	1	0	0	0		0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
A72	NC	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	NC	0	1	0	0	1
A73	0	NC	1	0	0	0	1	NC	1	NC	NC	0	0	0	0	0	0
A74	NC	0	1	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
A75	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	NC	NC	0	1	NC	NC	NC
A76	0	NC	1	0	0	1	1	0	0	0	NC	1	0	1	0	0	1
A77	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	NC	NC	1	0	0	0	0
A78	0	NC	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	NC	0	0	0
A79	1	NC	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
A80	1	NC	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Correctamente=1

Incorrectamente=0

No contestada=NC

ALUMNO	Número de pregunta																
	1		2	3			4	5			6	7	8	9	10		
	A	B		A	B	C		A	B	C					A	B	C
A81	NC	1	1	0	0	NC	1	0	0	0	1	0	0	0	NC	NC	NC
A82	0	NC	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	NC	NC	NC
A83	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
A84	NC	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
A85	1	NC	1	0	0	1	1	0	0	0	0	NC	0	1	0	0	0
A86	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
A87	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A88	0	NC	1	0	0	0	1	NC	NC	NC	0	0	0	1	NC	NC	NC
A89	0	NC	1	0	0	1	1	0	0	1	NC	NC	1	1	NC	NC	NC
A90	NC	NC	NC	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	1	0	NC	NC	NC
A91	NC	NC	NC	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A92	NC	NC	NC	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A93	NC	NC	NC	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A94	NC	NC	1	NC	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A95	NC	NC	1	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	0	NC	NC	NC	NC
A96	NC	NC	1	NC	NC	NC	1	0	0	0	1	NC	0	NC	NC	NC	NC
A97	NC	NC	1	NC	NC	NC	0	0	0	0	NC	NC	0	0	NC	NC	NC
A98	NC	NC	1	NC	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC	NC	0	0	NC	NC	NC
A99	NC	NC	1	NC	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC	NC	0	1	NC	NC	NC
A100	NC	NC	1	NC	NC	NC	1	0	0	0	0	0	1	NC	NC	NC	NC
A101	NC	NC	1	NC	NC	NC		0	0	0	NC	NC	0	NC	NC	NC	NC
A102	NC	NC	1	NC	NC	NC	1	0	0	1	NC	NC	0	0	0	0	0
A103	NC	NC	1	NC	NC	NC		0	0	0	NC	NC	0	1	0	0	0
A104	NC	NC	1	NC	NC	NC	1	0	1	1	NC	NC	0	1	1	1	1
A105	NC	NC	1	NC	NC	NC	0	0	0	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A106	NC	NC	1	NC	NC	NC	1	0	NC	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A107	NC	NC	1	NC	NC	NC	1	0	0	1	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A108	NC	NC	1	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A109	NC	NC	1	NC	NC	NC	0	0	0	0	NC	NC	1	1	NC	NC	NC
A110	NC	NC	1	NC	NC	NC	0	0	0	0	NC	NC	0	0	NC	NC	NC
A111	NC	NC	1	NC	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC	NC	0	1	NC	NC	NC
A112	NC	NC	NC	NC	NC	NC	0	NC	0	NC	NC	NC	0	NC	0	1	1
A113	NC	NC	NC	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	0	NC	NC	NC	NC
A114	NC	NC	NC	NC	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC	NC	0	0	NC	NC	NC
A115	NC	NC	NC	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A116	NC	NC	NC	NC	NC	NC	1	0	0	1	NC	NC	0	NC	NC	NC	NC
A117	NC	NC	NC	NC	NC	NC	1	0	1	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A118	NC	NC	NC	NC	NC	NC	1	0	1	0	NC	NC	0	NC	NC	NC	NC
A119	NC	NC	NC	NC	NC	NC	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
A120	NC	NC	NC	NC	NC	NC	1	0	1	1	NC	NC	0	1	1	1	1

Correctamente=1

Incorrectamente=0

No contestada=NC

	Número de pregunta																
ALUMNO	1		2	3			4	5			6	7	8	9	10		
	A	B		A	B	C		A	B	C					A	B	C
A121	NC	NC	NC	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A122	NC	NC	NC	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	0	NC	NC	NC	NC
A123	NC	NC	NC	NC	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC	NC	1	NC	0	NC	NC
A124	NC	NC	NC	NC	NC	NC	0	0	0	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A125	NC	NC	NC	NC	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A126	0	NC	NC	NC	NC	NC	0	0	0	0	NC	NC	1	0	0	0	0
A127	NC	0	NC	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A128	NC	0	NC	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	0	NC	0	0	0
A129	1	NC	NC	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	1	0	NC	NC	NC
A130	NC	0	NC	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	1	NC	1	0	1
A131	NC	1	0	NC	NC	NC	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A132	0	0	0	0	NC	NC	1	1	1	1	0	NC	1	1	0	1	0
A133	1	NC	1	NC	NC	NC	1	1	0	0	NC	NC	0	NC	NC	NC	NC
A134	0	NC	1	NC	NC	NC	0	NC	NC	NC	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A135	0	0	1	NC	NC	NC	1	0	0	0	1	NC	0	1	1	0	1
A136	1	NC	1	NC	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A137	1	NC	1	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A138	1	NC	1	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	0	NC	NC	NC	NC
A139	1	NC	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A140	0	NC	1	NC	NC	NC	0	0	0	0	0	0	1	NC	NC	NC	NC
A141	1	1	1	NC	NC	NC	1	0	0	0	NC	NC	0	0	NC	NC	NC
A142	NC	1	1	0	0	0	0	0	0	0	NC	NC	0	0	0	1	0
A143	1	NC	1	NC	NC	NC	0	0	0	0	0	NC	0	0	NC	NC	NC
A144	0	NC	1	NC	NC	NC	0	0	0	1	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A145	0	NC	1	NC	NC	NC	0	0	0	0	NC	NC	1	NC	0	0	0
A146	1	NC	1	NC	NC	0	1	0	1	0	NC	NC	1	NC	NC	NC	NC
A147	0	NC	1	NC	NC	NC	0	NC	NC	NC	0	0	0	NC	NC	NC	NC
A148	0	NC	1	NC	NC	NC	0	0	0	0	NC	NC	1	1	NC	NC	NC

Correctamente=1

Incorrectamente=0

No contestada=NC

Lo primero que se observó, es que independientemente del interés de los estudiantes en responder la encuesta, a favor o en contra, todos contestaron al menos 2 preguntas, el que menos contestó, fue un estudiante con 15 NC de las 17 preguntas realizadas, sin embargo, las dos preguntas que si contestó, las contestó correctamente y se encuentran ubicadas en medio y al final de los reactivos (reactivo 4 y 8), lo que nos permite considerar que todos reflexionaron el responder la encuesta. Por otro lado, se registraron 3 alumnos que no respondieron correctamente pregunta alguna dando al menos 5 respuestas incorrectas cada uno.

En la Tabla 2 se puede observar la distribución de las respuestas a cada una de las preguntas; se especifica el número y porcentaje de aciertos, preguntas contestadas incorrectamente y las no contestadas (NC).

Tabla 2. Distribución de respuestas del nivel medio superior.

Pregunta	1 A	1 B	2	3 A	3 B	3 C	4	5 A	5 B	5 C	6	7	8	9	10A	10B	10C
Correctas	26	31	99	14	14	46	90	6	17	16	8	6	57	34	16	12	10
Incorrectas	44	13	9	78	76	41	57	111	101	100	44	39	86	53	55	58	60
NC	78	104	40	56	58	61	1	31	30	32	96	103	5	61	77	78	78
% Correctas	18	21	67	9	9	31	61	4	11	11	5	4	39	23	11	8	7
% Incorrectas	30	9	6	53	51	28	39	75	68	68	30	26	58	36	37	39	41
% NC contestadas	53	70	27	38	39	41	1	21	20	22	65	70	3	41	52	53	53

Cabe mencionar que los reactivos de la encuesta son 10, mientras que el número de preguntas a analizar son 17, por el caso de los reactivos que tienen más de una pregunta a evaluar, por ejemplo, la pregunta 1 incisos A se refiere a la pregunta: ¿qué es una función?, mientras que el inciso B pide un ejemplo de función polinomial.

A continuación, se describe con detalle el análisis de cada una de las preguntas.

Pregunta 1.

En esta pregunta se espera que el alumno por un lado comprenda el concepto de función definiéndola y por otro lado la ejemplifica con una función polinomial. Por lo tanto, de los 148 alumnos que realizaron la encuesta, 26 de ellos que representan un 18 % tiene la noción, pero, no tienen presente la definición matemática de función, es decir, saben que una función resuelve problemas, que los puntos obtenidos se representan en un plano cartesiano, es una representación gráfica, es un conjunto de pares ordenados, es algo variable y funcional. Por otro lado, se observa que 44 alumnos que representan el 30% de la población responden de manera incorrecta y definen a la función como una ecuación. El mayor porcentaje que representa un 53% se concentra en las no contestadas (NC). La pregunta 1B pide dar un ejemplo de función polinomial. La mayoría de la población que comprende un 70% se concentra en las NC y solo el 21% responde correctamente.

Pregunta 2

El alumno debe de mencionar los tipos de función que recuerda, con el fin de saber si el alumno conoce los tipos de funciones. La Tabla 2 presenta que 99 alumnos del total correspondiente al 67% responden correctamente, de las respuestas que predominaron fueron la función lineal, cuadrática, cúbica y racional de las cuales se clasifican como función polinomial. Otras funciones que mencionaron fueron las trigonométricas, exponencial y logarítmicas. El 27% NC y un 6% contestaron incorrectamente, ya que mencionaron la clasificación de una expresión algebraica.

Pregunta 3

Los conceptos que abarca la pregunta tres, son el identificar la variable dependiente, variable independiente y las constantes dada una fórmula. Solo se obtuvo respuesta de alrededor del 60% de los estudiantes, sólo el 9% contestaron correctamente lo referente a las variables dependiente e independiente, mientras que el 31% contestó correctamente solo lo referente a las constantes. Es importante resaltar, que quienes no contestaron la pregunta fue un número considerable que está alrededor del 38 al 41%.

Pregunta 4

El objetivo de la pregunta 4 es razonar y distinguir gráficas de funciones, donde deben seleccionar una de las gráficas que no corresponde a una función, los esquemas gráficos de las funciones que se presentan son del valor absoluto, del logaritmo y de la circunferencia; a lo cual la mayoría contestó, pero solo el 61% lo hizo correctamente mientras que el 39% contestó de manera errónea, de las respuestas incorrectas que más predominó fue la gráfica del valor absoluto.

Pregunta 5

En esta pregunta se pide relacionar una función algebraica con la gráfica correspondiente. Las gráficas corresponden a una función exponencial, una trigonométrica que es la función seno y una racional. El 4% respondió correctamente a la gráfica exponencial y solo el 11% a la función seno y a la racional. Por otro lado, el 75% respondió de manera errónea el grafico que le corresponde a una función exponencial, siendo las respuestas más comunes la función $\cos(x)$ y un 68% para ambas funciones seno y racional. Alrededor del 20% no contestaron a la pregunta.

Pregunta 6

Calcular la función compuesta dadas dos funciones. Solo el 5% respondieron correctamente, mientras que el 30% contesto incorrectamente y un 65% que fue la mayoría, no contesto. Cabe mencionar que de los que contestaron incorrectamente no acertaron por errores de cálculo y otros realizaron operaciones algebraicas como el producto de dos funciones.

Pregunta 7

Calcular el producto de las funciones de la pregunta 6. Por consiguiente, pocos fueron los que acertaron que comprende un 4%, mientras que la mayoría no contesto y fue un 70%, el resto, el 26% contesto erróneamente.

Pregunta 8

El objetivo de la pregunta es comprender el dominio y rango basándose en una gráfica, solo el 39% respondió correctamente mientras que la mayoría que comprende el 58% respondió erróneamente de las respuestas que más seleccionaron fue el inciso b donde no se analiza los valores posibles para y, mostrándose en la imagen claramente que no admite todos los valores de los números reales.

Pregunta 9

Se les pide graficar dada una función en el intervalo de -3 a 3. El resultado obtenido comprende del 23% respuestas correctas, mientras que un 36% contestaron erróneamente, analizando las respuestas se concluye que los errores son debido al cálculo y/o de graficación. Menos de la mitad que es un 41% no contestaron.

Pregunta 10

Deducir una función algebraica a partir de otra. Se debe relacionar la función que corresponde a la gráfica. El 11% de los alumnos encuestados respondió correctamente a la función $f(x) + 4$, un 8% a la función $-\frac{1}{3}f(x)$ y un 7% a la función $5f(x)$, por otro lado, respondieron erróneamente el 37%, 39% y el 41% respectivamente. Finalmente, más del 50% no respondieron.

6.2. NIVEL SUPERIOR

La tabla 3 muestra los resultados obtenidos para cada una de las preguntas de cada reactivo correspondientes a la encuesta. La muestra se forma de 14 alumnos de primer semestre de un grupo de la asignatura de Álgebra Superior de licenciatura de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP), se les aplicó la encuesta dando un tiempo de respuesta de 15 minutos máximo. Para esto las preguntas contestadas correctamente se identifican con el número 1, las preguntas contestadas de manera incorrecta se identifican con el número 0 y finalmente las preguntas no contestadas se etiquetan con NC.

Tabla 3. Resultados de la encuesta aplicada en nivel superior.

	Número de pregunta																
ALUMNO	1		2	3			4	5			6	7	8	9	10		
	A	B		A	B	C		A	B	C					A	B	C
B1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
B2	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
B3	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
B4	1	1	1	NC	NC	NC	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0
B5	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
B6	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
B7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0
B8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
B9	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B10	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
B11	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
B12	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	NC	NC	NC
B13	1	0	0	1	1	1	1	1	NC	NC	1	NC	0	1	NC	NC	NC
B14	1	1	0	1	1	1	1	NC	0	NC	1	1	1	1	0	0	0

Correctamente=1
Incorrectamente=0
No contestada=NC

Es notorio que el 71% de los estudiantes de nivel superior a los que se les aplicó la encuesta contestaron todas las preguntas, todos contestaron al menos el 85% y si se diera una valoración en la escala de 0 a 10, más del 60% obtuvo una calificación mayor a 6. El estudiante con la mayoría de las respuestas correctas acertó 16 de 17 reactivos, mientras que en el nivel medio superior el mayor número de preguntas no contestadas por alumno fue de 15 y en el nivel superior sólo fueron 6.

La Tabla 4 presenta la distribución de los resultados de la encuesta aplicada a los alumnos de nivel superior.

Tabla 4. Distribución de respuestas del nivel superior.

Pregunta	1A	1B	2	3A	3B	3C	4	5A	5B	5C	6	7	8	9	10A	10B	10C
Correctas	13	11	9	10	11	12	13	8	7	7	14	12	5	14	4	6	5
Incorrectas	1	3	5	3	2	1	1	5	6	5	0	1	9	0	8	6	7
NC	0	0	0	1	1	1	0	1	1	2	0	1	0	0	2	2	2
% Correctas	93	79	64	71	79	86	93	57	50	50	100	86	36	100	29	43	36
% Incorrectas	7	21	36	21	14	7	7	36	43	36	0	7	64	0	57	43	50
% NC	0	0	0	7	7	7	0	7	7	14	0	7	0	0	14	14	14

Pregunta 1

La pregunta 1 comprende definir una función y dar un ejemplo de función polinomial. 13 estudiantes de 14 respondieron correctamente la primera parte y corresponde al 93% mientras que el 79% dieron el ejemplo, de tal manera que contestaron erróneamente el 7% y 21% respectivamente.

Pregunta 2

El alumno debe de mencionar los tipos de función que recuerden, entonces los resultados obtenidos son el 64% correctamente mientras que el 36% respondió incorrectamente.

Pregunta 3

Los conceptos que se abarcan en la pregunta tres son el identificar la variable dependiente, variable independiente y las constantes dada una fórmula y se obtuvo que el 71% de los estudiantes respondieron correctamente la variable dependiente, el 79% respondieron correctamente la variable independiente y el 86% contestaron correctamente las constantes. Por otro lado, el 21%, 14% y 7% respectivamente contestaron incorrectamente. Sólo el 7% no contesto.

Pregunta 4

El objetivo de la pregunta 4 es razonar y distinguir gráficas de funciones, donde seleccionaban la gráfica que no es función de las tres funciones que se les mostraba, a lo cual la mayoría contestó correctamente (93%) y la minoría (7%) contestó erróneamente.

Pregunta 5

Relacionar una función algebraica con la gráfica correspondiente. Las gráficas que tenían que relacionar es la exponencial, seno y racional. A lo cual el 57% respondió correctamente la gráfica exponencial y el 50% para la función seno y la función racional. Por otro lado, el 36%, 43% y 36% respectivamente respondieron incorrectamente. Por último y en general, menos del 15% no contestaron.

Pregunta 6

Calcular la función compuesta dadas dos funciones, en esta pregunta el 100% contestó correctamente, siendo la pregunta con mayor número de respuestas correctas al igual que la pregunta 9.

Pregunta 7

Calcular el producto de las funciones de la pregunta 6. En esta pregunta la mayoría de los estudiantes contesto correctamente con un 86%, y solo el 7% contesto incorrectamente y 7% no contesto.

Pregunta 8

El objetivo de la pregunta es comprende el dominio y rango basándose en una gráfica, la mayoría de los estudiantes con un 64% respondieron incorrectamente, mientras que solo el 36% contesto correctamente.

Pregunta 9

Se les pide graficar una función en un intervalo de -3 a 3. Los resultados que arrojó la encuesta fueron satisfactorios con un 100% que contestaron correctamente.

Pregunta 10

Deduce una función algebraica a partir de otra. El objetivo era relacionar la función con la gráfica correspondiente. 29% respondió correctamente a la función $f(x) + 4$, mientras que un 57% respondió incorrectamente y solo un 14% no contesto manteniéndose en las dos preguntas siguientes. Para la segunda función $-\frac{1}{3}f(x)$, el 43% contestó correctamente, el 43% contesto incorrectamente y para la tercera función $5f(x)$ el 36% contesto correctamente y el 50% de manera errónea.

6.3. COMPARATIVO

En contraste y haciendo una comparación general de algunas preguntas específicas que se considera centrar toda la atención. La Figura 7 muestra la gráfica de la distribución de los resultados de nivel medio superior, la cual tienen una distribución no muy enorgullecedora, debido a que la sección de las preguntas contestadas correctamente deja mucho que desear, pudiéndose observar una gran cantidad de preguntas con porcentajes menores al 20% e inclusive menores al 10%.

Figura 7. Porcentaje por reactivo a nivel medio superior.

En la Figura 8, se muestran los resultados de los reactivos en el nivel superior, donde es evidente que las respuestas correctas es lo que más domina en el gráfico.

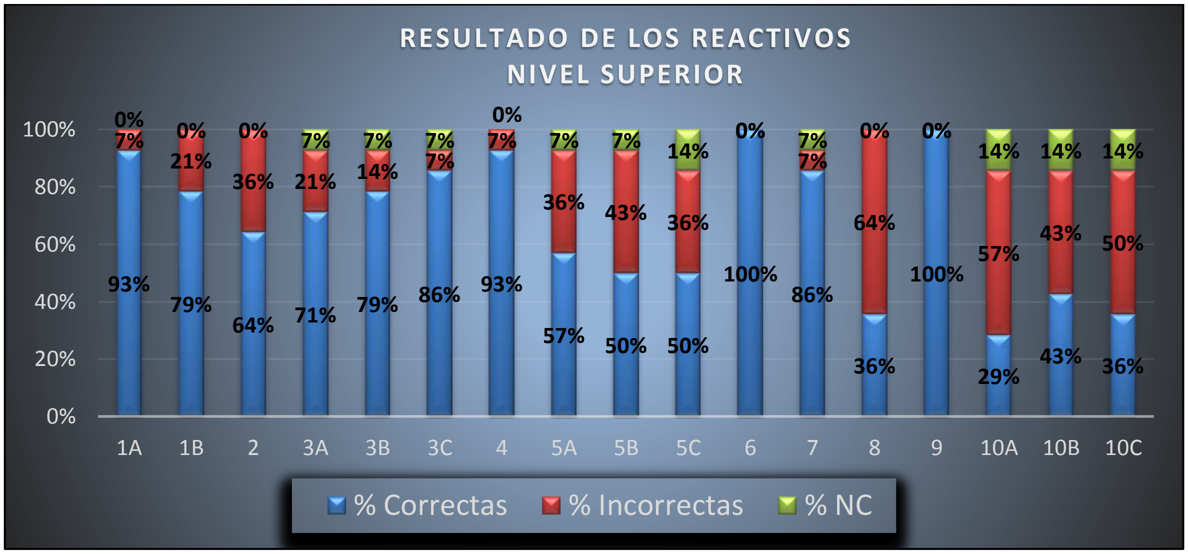


Figura 8. Porcentaje por reactivo a nivel licenciatura

El color que más predomina en nivel medio superior es el color rojo seguido por el color verde que corresponde a las respuestas incorrectas y a las no contestadas respectivamente, mientras que en el nivel superior hay una gran diferencia, puesto que el color que más prevalece es el azul de las respuestas correctas, que para el medio superior quedó en último lugar. Se puede observar en segundo término el color rojo, siendo el más importante en el medio superior. Por lo que se puede determinar que existe una notoria diferencia en ambos niveles y como era de esperarse, los estudiantes de nivel superior tienen un mejor desempeño en responder esta encuesta, a pesar que en su mayoría, son alumnos recién ingresados a la licenciatura.

Los reactivos que involucran gráficas de funciones como parte del planteamiento del problema son 4, 5, 8 y 10. Se puede observar que en tres de ellos; preguntas 4, 5 y 8; la mayoría de los estudiantes de ambos niveles respondieron, teniendo un mínimo de NC, lo cual no coincide para la pregunta 10, donde casi el 50% de los estudiantes del nivel medio superior contestaron, pero es importante resaltar que es la pregunta que menos estudiantes de nivel superior respondieron y mayor número de respuestas incorrectas generó en este nivel, lo cual puede atribuirse a la complejidad del problema, o a la falta de tiempo para el análisis, ya que sólo se dio 15 minutos para responder la encuesta. Este resultado puede llevar a considerar que existe mayor interés en analizar y responder las preguntas con alguna gráfica dentro del planteamiento.

Las preguntas 2 y 8 son dos de las 3 preguntas con mayor número de respuestas correctas por parte de los estudiantes del nivel medio superior, e inclusive tuvieron ligeramente mayor porcentaje que los de nivel superior. Dejando en claro que todos los estudiantes están familiarizados con lo que respecta al tipo de funciones, al dominio y rango independientemente del nivel educativo. Esto no quita el hecho de que falta reforzar el conocimiento con respecto al dominio y rango o inclusive con los intervalos. Las pregunta 8 se refiere a encontrar el dominio y rango a partir de una gráfica, mientras que la pregunta 2 que es una de las preguntas abiertas donde se pide mencionar los tipos de funciones que recordaban; ambos niveles dieron respuestas casi idénticas.

La pregunta 9 donde se pide graficar una función algebraica bien definida; la cual corresponde a una función lineal; no resultó ser un reto para los estudiantes de nivel superior, lo cual era de esperase, ya que el 100% respondió correctamente, mientras que para los estudiantes de nivel medio superior no reflejaron lo mismo, ya que la mayoría no respondió, lo cual es preocupante y se debe poner atención en este punto.

La pregunta 6 tampoco resultó ser un reto para los estudiantes de nivel superior a diferencia de los estudiantes de nivel medio superior quienes prácticamente no contestaron o contestaron mal, que junto con la pregunta 7, se puede deducir que a nivel superior pueden hacer un buen manejo de las funciones compuestas y sus operaciones, mientras que en el nivel medio superior dejaron en claro que no hacen un buen manejo de ellas, ya que son dos de las preguntas con menor respuestas correctas en este nivel.

Capitulo 7. Secuencia didáctica

Con base a este trabajo y a la experiencia profesional, se consideró diseñar y agregar este apartado referente a una secuencia didáctica con el propósito de dar una guía tanto para profesores como alumnos que ayude en la complejidad que existe al enseñar el concepto de función.

En el ejercicio profesional docente, es importante y de gran utilidad el utilizar guías para abordar algunos temas de trascendencia académica, profesional y personal, de tal forma que se evite limitar el alcance del conocimiento. Es importante promover la importancia y trabajar con aplicaciones de los temas que se ven en el ámbito escolar, así como el evitar el reproducir los conceptos o procedimientos solo para aprobar un examen o tener buenas notas, sobrepasando las fronteras del salón de clase con aplicaciones que permitan interesar al estudiante. Se sabe que la Matemática es una ciencia nada fácil de percibir en muchos casos, el aprender Matemáticas es como aprender otro idioma por la variedad de simbología que se emplea. La secuencia propuesta a continuación, no pretende sustituir los libros de texto, pero si ser una guía para abordar el tema y concretar lo que se busca en el libro, que le permita al estudiante seguir avanzando con conocimientos sólidos para enfrentarse al mundo competitivo y que sea capaz de que lo aprendido lo aplique en el campo laboral para responder ante las exigencias que demande la sociedad.

Esta secuencia, además de ser una guía para el profesor, se puede aplicar a los estudiantes como proyecto o como evaluación integral durante el tema, y puede ajustarse al nivel de estudios con problemas al tema de interés y nivel de estudios. Las actividades que se proponen son problemas cercanos al contexto del alumno que le permitan involucrarse en los servicios básicos de su entorno, así como abarcar todo el tema de acuerdo al programa educativo de nivel medio superior, ya que en ocasiones, por falta de tiempo y para cubrir el programa de la materia, el profesor ve solo la primer parte con mayor profundidad olvidando o dejando a un lado los últimos temas, quedando los conocimientos incompletos y a los alumnos sin herramientas para estudios posteriores.

Dado este mundo competitivo, en esta era tecnológica se sugiere utilizar las tecnologías de la información, gran cantidad de material que puede ser utilizado para reforzar los conocimientos de gran diversidad de temas y/o niveles de complejidad, que se puede ajustar al tiempo con que cada individuo cuente. A continuación se sugieren algunas páginas de fuentes reconocidas que contienen la información que se desea que el estudiante conozca para incrementar el panorama, opciones, dudas y aprovechamiento del tema. Una fuente es la que proporciona la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), quienes ha desarrollado el Apoyo Académico para la Educación Media Superior, donde podemos encontrar material del tema de funciones y muchos otros, los cuales se deben aprovechar para obtener mejores resultados del proceso enseñanza-aprendizaje (Universidad Nacional Autónoma de México, 2013).

Otra página que presenta una gran cantidad de material didáctico para ser utilizado en diversos niveles educativos, es la página del software libre GeoGebra; https://www.geogebra.org/materials; que además de ser un software libre, ha generado un sinnúmero de actividades como apoyo al profesor o para ser utilizada por el alumno y enriquecer su conocimiento y/o entendimiento.

SECUENCIA DIDÁCTICA

TEMA: <u>FUNCIONES</u>

OBJETIVOS GENERALES:

- Comprender y aplicar los conceptos básicos de función de una variable mediante actividades de reflexión y análisis dentro del contexto del estudiante.
- Impulsar el trabajo colaborativo durante la discusión de las actividades propuestas con el fin de impulsar la autonomía de los estudiantes y el papel del docente como guía en la realización de las actividades.
- Fomentar el uso de herramientas tecnológicas como es el uso del software libre GeoGebra durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

ACTIVIDADES DE INICIO

Objetivo: Reafirmar en el alumno, el conocimiento previo de funciones y obtenga los objetos Matemáticos (definición de función, variable, dominio, rango, etcétera).

<u>SESIÓN 1</u> INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO

Tarea para el alumno y actividades guiadas por el profesor:

1) Explorar las páginas:

   http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/index_funciones.html

   "Lecciones de funciones y sus gráficas", sección "Concepto y notación de función y gráfica de una función"

   y https://www.geogebra.org/m/GMFMavaM

2) Visualizar un video que contenga el concepto de función como introducción.

   Links sugeridos:

   https://www.youtube.com/watch?v=-YCrf-fmS-Q

3) Resolver los ejercicios que se encuentre y escribir las dudas generadas:

   http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/index_funciones.html

"Lecciones de funciones y sus gráficas", sección "Concepto y notación de función y gráfica de una función".

4) Resolución de las dudas generadas a partir de los ejercicios encontrados del punto anterior.
5) Elaborar un mapa mental de los conceptos principales, como concepto de función, variable dependiente e independiente, dominio, rango, las diferentes formas de representar una función entre otros.

Actividad del profesor en clase: Crear un foro de discusión donde cada alumno reflexionará sobre la pregunta: ¿cómo está implicada el concepto de función en la vida cotidiana desde el contexto del alumno?

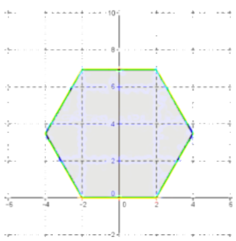
SESIÓN 2

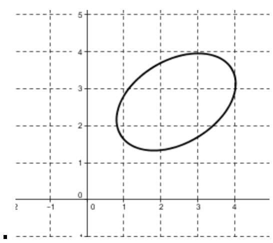
Objetivo: Basándose en los objetos matemáticos previos, aplicarlos como herramientas para determinar en qué situaciones son o no funciones, justificar la respuesta y responder a las preguntas.

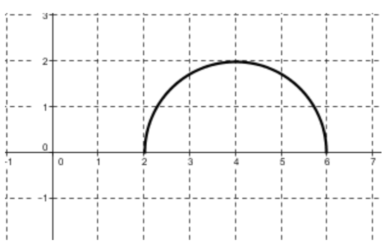
Actividad para el alumno.

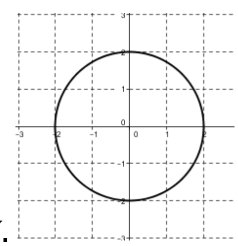
1) Determinar las gráficas que representan una función.

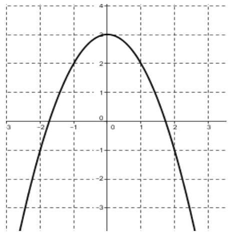
Gráficas:

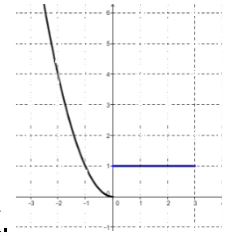
I. 

III. 

II. 

IV. 

V. 

VI. 

2) Responde a las siguientes preguntas:
   a) ¿Qué elementos o conceptos te ayudaron para tomar la decisión de decir que es una función o no es una función?
   b) ¿Las gráficas te son familiares desde tu experiencia?
   c) ¿Podrías deducir cuál es su función algebraica para cada una de las gráficas del ejercicio anterior?
   d) Toma una de las gráficas y redacta una situación en donde se pueda modelar con la gráfica elegida.

3) Identificar y escribir el dominio y rango que cumplan la condiciones de función.

SESIÓN 3

FASE 2: Las correspondencias imperfectas.

Objetivo: Con el juego de contextos (tabular-algebraico-regla de correspondencia), utilizar los objetos matemáticos que respondan a las herramientas tanto implícitas como explicitas para resolver cada uno de los puntos a responder y alcanzar el dominio de cada uno de ellos.

4) Elaborar la gráfica que representa cada una de las tablas de valores mostradas a continuación usando algún software especializado (se sugiere el GeoGebra).
5) Formular la regla de correspondencia para cada conjunto de valores.
6) Determina el dominio y el rango.

I.

X	3	2	-1	-2	0
Y	0	-1	-4	-5	-3

II.

X	3	2	1	0	-1	-2
Y	-7.5	-5	-2.5	0	2.5	5

III.

X	3.5	2.5	1.5	0	-1.5	-2.5
Y	1.4	1	0.6	0	-0.6	-1

ACTIVIDADES DE DESARROLLO

<u>SESIÓN 1</u>

FASE 3: La mejora de las correspondencias y progreso del conocimiento.

Objetivo: Mejorar el progreso en el conocimiento de funciones respecto a los cambios de contexto que se aplicaran en cada situación.

PROBLEMA DE CONSUMO DE ENERGÍA

En una cuenta de consumo de energía en una vivienda de cuatro integrantes. El señor de la casa está haciendo un análisis sobre el gasto de energía (kW/h) por bimestre debido a que ha tenido variaciones en cuanto a los pagos. Él tiene como referencia, que en promedio el pago que le llega bimestralmente es alrededor de 250 a 500. Los datos que tiene es que Comisión tiene un costo fijo de $0.85 para los primeros 150 kW/h gastados y para mayores de 150 kW/h el costo es de $0.95 y de IVA le cobran el 10% del total a pagar. Realiza lo siguiente.

Completa la siguiente tabla.

Gasto de kW/hora por bimestre

Datos	250	270	290
Menor 150 kW/h			
Mayor a 150 kW/h			
Total a pagar con IVA			

a) El consumo de energía ¿de qué datos depende?
b) ¿Qué datos puedes considerar variables dependientes?
c) ¿Qué datos puedes considerar variables independientes?
d) ¿Cuáles son las constantes del problema?
e) Haciendo uso de un software especializado (se sugiere GeoGebra), elabora un gráfico en donde el eje horizontal represente el número de kW/h y el eje vertical represente el costo en pesos.
f) ¿Qué clase de curva se obtiene?
g) Determine el dominio y rango
h) ¿Cuánto pagará si gasta 320.80, 350, 460.30 o 500 kW/h?

Sugerencia adicional: Se puede pedir al alumno analizar el problema anterior usando un recibo de sus hogares ya sea de luz, agua, gas, teléfono entre otros.

SESIÓN 2

Un plan de teléfono celular el pago por mes es de $250. El plan incluye 300 minutos gratis y por cada minuto adicional se cobra $1.30. Formule la función que modela el número de minutos usados y determine cuánto se pagará cuando se llame por 100 min, 250.44, 310.50 y 320.60 min.

SESIÓN 3

FASE 3: La mejora de las correspondencias y progreso del conocimiento.

Objetivo: Aplicar el nuevo conocimiento y aplicar los diferentes contextos desde la experiencia del alumno.

Observa a tu alrededor…

Piensa un poco en otras situaciones en donde te imagines que se aplica el concepto de función y elabora lo siguiente.

a) Redacta la situación.
b) Elabora una tabla.
c) Realiza un bosquejo gráfico y qué tipo de gráfica es.
d) Encuentra el dominio y rango.
e) Determina las variables dependientes, independientes y constantes si las hay.
f) Encuentra la función que modele el problema.

ACTIVIDADES DE CIERRE

SESIÓN 1

Objetivo: Resolver, analizar y explorar las respuestas haciendo uso de la herramienta tecnológica Geogebra y objetos matemáticos dependiendo de las actividades sugeridas a continuación.

De las siguientes funciones use un software especializado para trazar la gráfica (se sugiere GeoGebra).

$$f(x) = 8$$

$$f(x) = \sqrt{\boldsymbol{x+2}}$$

$$f(x) = |\boldsymbol{x}|$$

a) Escribe el nombre de las funciones de arriba.
b) Menciona las características de cada una.
c) Determine el dominio y rango de las funciones del ejercicio anterior a partir de la gráfica. Puedes usar GeoGebra para visualizarlas.
d) Evalúe las funciones anteriores cuando $f(3.5)$, $f(4)$, $f(6.3)$ y $f(8)$.
e) Responde a las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Define con tus propias que es una función?
- ✓ ¿Cuál es la diferencia entre una función y una ecuación?

- ✓ ¿Qué características debe cumplir para decir que es función?
- ✓ ¿A qué se le llama dominio y rango?
- ✓ ¿Qué es una variable dependiente, independiente y una constante?
- ✓ Menciona las formas de representar una función.
- ✓ Completa lo siguiente:

FASE 3: La mejora de las correspondencias y progreso del conocimiento.

1) FUNCIÓN: $f(x) =$____________________

TABLA DE VALORES:

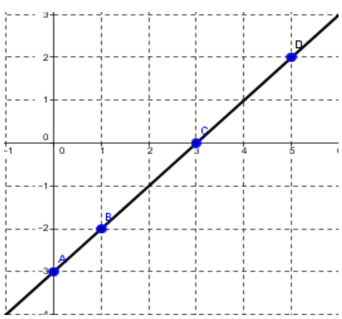
x					
y					

NOTACIÓN DE CONJUNTO: $f: R \to R = \{(\ \ ,\ \ ), (\ \ ,\ \ ), (\ \ ,\ \ ), (\ \ ,\ \ ), (\ \ ,\ \ )\}$

DOMINIO: $X = \{\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ \}$

RANGO: $Y = \{\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ \}$

GRÁFICA:



2) FUNCIÓN: $f(x) =$

TABLA DE VALORES:

x					
y					

NOTACIÓN DE CONJUNTO: $f: R \rightarrow R = \{(-2,2), (0,-2), (0,2)\}$

DOMINIO: $X = \{\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ \}$

RANGO: $Y = \{\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ \}$

GRÁFICA:

3) FUNCIÓN: $f(x) =$

TABLA DE VALORES:

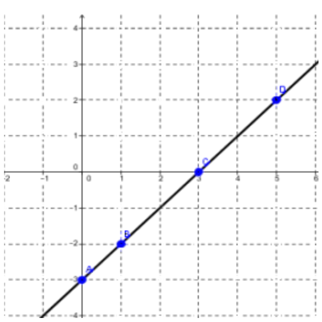
x	-0.5	0	1.5	2.5	5
y		3			5

NOTACIÓN DE CONJUNTO: $f: R \rightarrow R = \{(\ \ ,\ \ ), (\ \ ,\ \ ), (\ \ ,\ \ ), (\ \ ,\ \ ), (\ \ ,\ \ )\}$

DOMINIO: $X = \{\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ \}$

RANGO: $Y = \{\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ \}$

GRÁFICA:



4) FUNCIÓN: $f(x) = x^2$

TABLA DE VALORES:

x					
y					

NOTACIÓN DE CONJUNTO: $f: R \to R = \{(0,0), (-1,1), (1,1), (2,4), (-2,4)\}$

DOMINIO: $X = \{\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ \}$

RANGO: $Y = \{\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ \}$

GRÁFICA:

5) FUNCIÓN: $f(x) =$

TABLA DE VALORES:

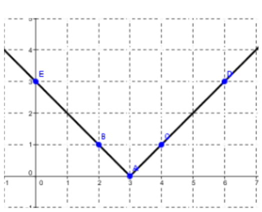
x	0	2	3	4	6
y	3	1	0	1	3

NOTACIÓN DE CONJUNTO: $f: R \to R = \{(\ \ ,\ \ ), (\ \ ,\ \ ), (\ \ ,\ \ ), (\ \ ,\ \ ), (\ \ ,\ \ )\}$

DOMINIO: $X = \{\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ \}$

RANGO: $Y = \{\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ \}$

GRÁFICA:



Bibliografía adicional: https://es.khanacademy.org/math/algebra. El alumno la puede visitar con el fin de reafirmar su aprendizaje o consultar dudas respecto al tema de función, es una organización educativa creada en 2006 por el educador estadunidense Salman Khan egresado del Instituto Tecnológico de Massachusetts y de la Universidad de Harvard. En ella se imparten cursos como: Geometría, Cálculo, Aritmética, Trigonometría, Ecuaciones Diferenciales, Probabilidad y Estadística entre otras. Así como también incluye videos muy cortos, explicados y entendibles que facilitan el aprendizaje.

En la página https://www.wolframalpha.com/ se puede trabajar con el software en línea, que es un programa utilizado en áreas científicas, de Ingeniería, Matemática y áreas computacionales. Originalmente fue concebido por Stephen Wólfram, quien continúa siendo el líder del grupo de matemáticos. La base es un programa de paga, pero nos permiten trabajar en línea de manera gratuita.

Capitulo 8. Conclusiones

El desarrollo de este trabajo de investigación y sus resultados llevan a las siguientes conclusiones:

Se observó una gran diferencia en cuanto al manejo y dominio de los conceptos matemáticos de función en los dos niveles (medio superior y superior), siendo el nivel superior sobresaliente en gran medida con respecto al nivel medio superior.

De los resultados que se percibieron en los alumnos de bachillerato respecto a cómo se define una función, tienen las nociones más no tienen presente las características de una función, ya que la confunden con la ecuación considerándolas lo mismo; las variables para ellos son incógnitas y no diferencian de una variable dependiente de la independiente ni de las constantes. Esto se atribuye a una ausencia de sentido matemático para los conceptos de variable dependiente e independiente (Garijo, 2014). Se observa confusión al analizar el dominio, rango y al relacionar gráficas con su respectiva función algebraica y principalmente cuando se trabaja con los diferentes juegos de contexto por ejemplo el marco gráfico al marco algebraico.

En el contexto tabular al gráfico en un intervalo establecido, se percibió que las respuestas incorrectas son debidas a errores de cálculo, puesto que estos errores se originan por actitudes afectivas y emocionales, es decir, por descuidos, falta de concentración, etcétera. Es importante resaltar que cuando se trabaja con graficas se requiere de habilidad y destreza matemática, desde interpretar la información, leer e integrar datos que no se visualizan directamente con gráficas (Batanero, Godino, Vallecillos, Green, & Holmes, 1994).

Los conceptos básicos que se enseñan no se le atribuye a que no tengan el conocimiento sino que la mayoría de las veces es porque lo aprenden de manera errónea según Socas, Palarea y Ruano (2003) citado en (Garijo, 2014) y no se trabaja ni se práctica con otras representaciones, ya que es común que en los cursos se parte de la forma algebraica y luego la ejemplifican por medio una gráfica solamente.

Como resultado final se obtuvo que los alumnos de nivel superior logran el dominio de los conocimientos en cuanto a los conceptos básicos de función, mientras que en el medio superior no, ya que presentan deficiencias en el conocimiento de los conceptos básicos como: conjunto, regla de correspondencia, dominio, rango, variable dependiente e independiente por mencionar algunos. Se sugiere incluir en la enseñanza, actividades que involucren juegos con las diferentes representaciones de función; gran problemática detectada; y no limitarlos implementando situaciones diversas de problemas y/o ejercicios, reforzando los juegos de contextos (algebraico, grafico, tabular, entre otros) y a partir de esto analizar las diferentes representaciones, siempre ver un tema matemático o unidad desde una perspectiva teórica dependiendo que es lo que nos interesa observar y analizar en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Hacer uso de la variedad de herramientas tecnológicas para dar diversidad en el manejo de los conceptos, representaciones y aplicaciones de la función y cualquier otro tema de interés. Cabe mencionar que pocos alumnos conocen y/o recurren a estas herramientas puesto que generalmente no son aplicadas en sus clases y/o no tienen motivación propia o por parte de sus profesores. Puesto que algunos estudiantes si tienen conocimiento de la existencia de software de este tipo, saben poco de ella o requieren de un motivo.

Fue notorio como los estudiantes mecanizan los conceptos para un fin a corto plazo que es obtener una calificación, porque así es como están diseñados y/o se orientan los planes de estudio, a pesar del esfuerzo de las diversas instancias en trabajar bajo el enfoque de las competencias. Aun así falta mucho por hacer por parte de las autoridades encargadas de la renovación de los planes de estudio como para las autoridades académicas responsables de que se alcancen los objetivos de la educación. A pesar de todo, no se debe descartar la diversidad de factores socioeconómicos, culturales y emocionales que impactan en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Se requiere que parte de la misión de los profesores es hacer un cambio en la perspectiva de los alumnos respecto a la Matemática, rediseñando actividades motivacionales para cada grupo y/o individuo, de tal manera que independientemente de repetir o reproducir o no la información, se llegue a una comprensión.

Bibliografía

Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Buenos Aires, Argentina: UNIVERSIDAD NACIONAL DE VILLA MARÍA.

Arce, M., & Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *Investigación en enseñanza matemática*, 61-73.

Batanero, C., Godino, J., Vallecillos, A., Green, D., & Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 25*(4), 527-547. doi:10.1080/0020739940250406

Betancur, A., & Yeni, M. (Mayo de 2013). UNA PROPUESTA METODOLOGICA PARA ENSEÑAR EL CONCEPTO DE FUNCIÓN DESDE LA EXPERIMENTACIÓN. *Tesis de Maestría*, 56. Medellín, Colombia.

Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (2003). Cómo Aprende la Gente Cerebro, Mente, Experiencia y Escuela. *Revista del Instituto de Matemática y Física Hechos y Reflexiones*, 44-64.

Bueche, F. J. (1991). *Fundamentos de Física* (Vol. II). Edo. de México, México: McGraw-Hill.

Cantoral, R. (1995). Matemática, Matemática escolar y Matemática Educativa. *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de profesores e investigación en Matemática Educativa, 1*.

Cárdenas, H., Lluis, E., Raggi, F., & Tomas, F. (2007). *Álgebra Superior* (1 ed.). Trillas.

Casarrubias, S. (2003). Un estudio de los cambios conceptuales en los alumnos del nivel medio y superior acerca de concepto de función. *Tesis de Maestría*. Chilpancingo, Guerrero, México.

Chernov, N., Eyink, G., Lebowitz, J., & Sinai, Y. (1993). Derivation of Ohm's Law in a Deterministic Mechanical Model. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, *70*(15), 2209-2212.

Committee on Developments in the Science. (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School.* National Academies Press.

De Prada, M. D. (1996). El concepto de función: dificultades en su aprendizaje. *Monografias IEPS*(20).

Dirección General de Bachillerato. (2018). *Programas de Estudio para la Generación 2017 - 2020 y Subsecuentes.* Recuperado el 01 de Octubre de 2018, de Programa de Estudios Matemáticas IV: https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/4toSEMESTRE/Matem%C3%A1ticas%20IV.pdf

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire.* Tesis de Doctorado, Universidad de París VII, París, Francia.

Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí. (Junio de 2010). *Propuesta curricular para la carrera de Licenciatura en Matemática Educativa*. Recuperado el Octubre de 2018, de Página de la Facultad de Ciencias de la UASLP: http://www.fc.uaslp.mx/informacion-para/archivos/propuesta_curricular_Lic_Mat_Educativa_HCDU_Junio2010.pdf

Ferrari, M. (Mayo de 2001). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. *Tesis de Maestría*. México, D.F., México.

Freire, P. (2010). *Cartas a quién pretende enseñar.* (S. Mastiangelo, Trad.) Argentina: Siglo veintiuno.

García, L., Vázquez, R. A., & Hinojosa, M. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingenieria. *Ingenierías, VII*(24), 27-34.

Garijo, L. (14 de Junio de 2014). Enseñanza de funciones y gráficas en 1o de bachillerato basado en el uso de GeoGebra. *Tesis de maestría*, 69. La Rioja, España: Universidad Internacional de la Rioja.

Garrido, M. (2015). *Matemáticas IV.* México D.F.: Secretaria de Educación Pública.

Guevara, C. A. (2011). Propuesta didáctica para lograr aprendizaje significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación. *Tesis de Maestría*, 55. Medellín, Colombia.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. d. (2010). *Metodología de la Investigación* (5a ed.). México, D.F., México: McGraw Hill.

Julio-Betancourt, G., & Hooton, R. (2004). Study of the Joule effect on rapid chloride permeability values and evaluation of related electrical properties of concretes. *Cement and Concrete Research*, 1007-1015.

Koh Catzin, E. (2011). El contexto del profesor en la construcción de la noción función: Un estudio de caso. *Tesis de Licenciatura*, 205. Mérida, Yucatan, México.

López Acosta, L. (Julio de 2011). Tesis de Licenciatura. *Etapas de aprendizaje asociadas al concepto función. Un estudio socioepistemológico*, 88. Mérida, Yucatán, México.

López Alonzo, S. (Julio de 2009). Un estudio sobre la noción de función constante. *Tesis de Licenciatura*, 82. Mérida, Yucatan, México.

López Cahun, J. M. (Julio de 2007). Dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto de función. *Tesis de Licenciatura*, 72. Mérida, Yucatán. Obtenido de https://intranet.matematicas.uady.mx/portal/dme/docs/tesis/Tesis_JesusLopez.pdf

Newell, J. (2011). *Ciencia de materiales, Aplicaciones en ingeniería.* New Jersey, USA: Alfaomega.

Nieto, N., Viramontes, J. d., & López, F. (2009). ¿QUÉ ES MATEMÁTICA EDUCATIVA? *Cultura Científica y Tecnológica*, *6*(35), 16-21.

Oviedo, L. M. (2003). Las Funciones...un obstáculo para nuestros alumnos. *Investigaciones Didácticas*, 89-97.

Pech, V. J., & Ordaz, M. G. (2009). El concepto función en situaciones variacionales. Un estudio de las argumentaciones de los estudiantes. *XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (págs. 38-47). Ciudad Madero.

Planchart, O. (2002). Tesis de Doctorado. *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función*, 176. Cuernavaca, Morelos, México.

RAE. (2014). Diccionario de la lengua española. (23a). Madrid, España. Recuperado el 2018, de http://dle.rae.es/?id=E7NKfBh

Ramírez, M. (2008). *Matemáticas IV*. San Luis Potosí: Colegio de Bachilleres de San luis Potosí.

Rodríguez, R., & Zuazua, E. (2002). Enseñar y aprender matemáticas: Del instituto a la universidad. *Revista de educación del MEC*.

Roth, B. J., & Basser, P. J. (1990). A Model of the Stimulation of a Nerve Fiber by Electromagnetic Induction. *IEEE TRANSACTIONS ON BIOMEDICAL ENGINEERING, 37*(6), 588.597.

Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2015). *Física para ciencias e ingeniería* (Vol. 2). México, México: Cengage.

Tan, S. T. (2012). *Matemáticas Aplicadas a los negocios las ciencias sociales y de la vida* (quinta ed.). (L. Peralta Rosales, & M. E. Ocampo Malagamba, Trads.) México: Cengage Learning.

Universidad Nacional Autónoma de México. (2013). *Apoyo académico para la educación media superior*. (UNAM, Editor, T. Vázquez Mantecón, M. Hernández Mayorga, & A. Navarro Mendoza, Productores) Recuperado el Octubre de 2018, de DGTIC: http://www.objetos.unam.mx/index.html

Valencia, H. (2017). La matemática educativa como disciplina de enseñanza. *Agencia informativa CONACYT*, 1-5.

Yu, N., Genevet, P., Kats, M. A., Aieta, F., Tetienne, J.-P., Capasso, F., & Gaburro, Z. (2011). Light Propagation with Phase Discontinuities: Generalized Laws of Reflection and Refraction. *Sciencexpress*, 7. doi:DOI: 10.1126/science.1210713

Zúñiga, M. I. (Mayo de 2009). Un estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización. En alumnos de un curso de cálculo I. *Tesis de Maestría*, 148. Tegucigalpa, Honduras.