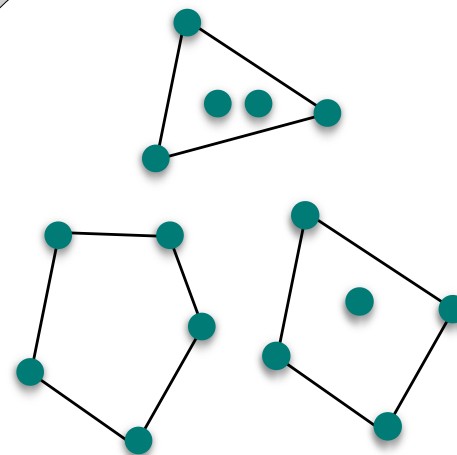
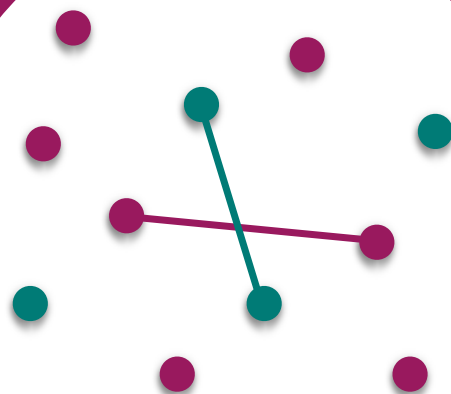
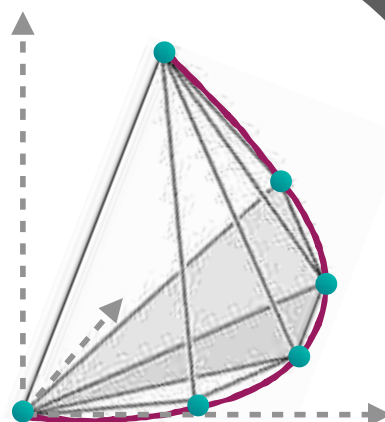


Natalia García-Colín (CONACYT -INFOTEC)
Luis P. Montejano (CONAYT-CIMAT)
Jorge Ramírez-Alfonsín (Université Montpellier)

EL TEOREMA DE LA COTA SUPERIOR E INFERIOR EN POLITOPOS CONVEXOS "PROYECTIVOS"

INTRODUCCIÓN

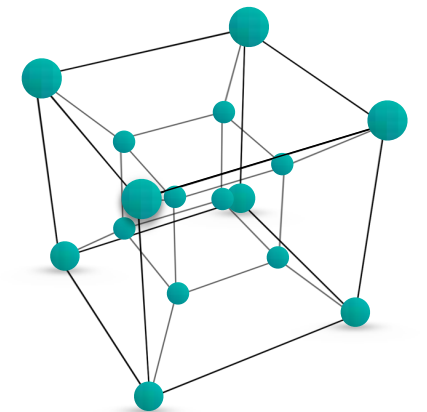
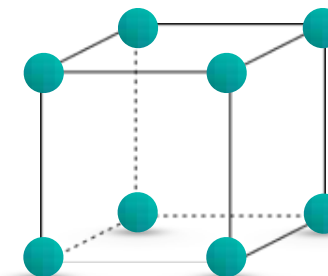
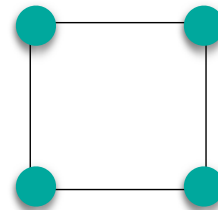
UNA
APLICACIÓN
MATEMÁTICA



EL PROBLEMA PROYECTIVO

INTRODUCCIÓN

Casco convexo de un conjunto finito de puntos en el espacio afín d -dimensional.

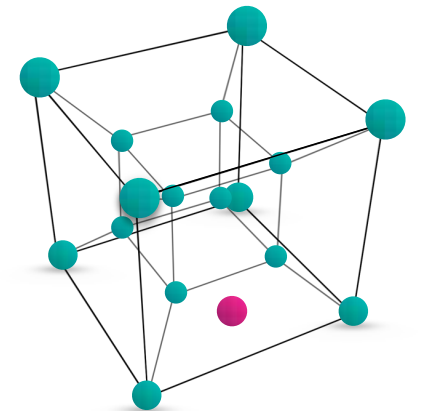
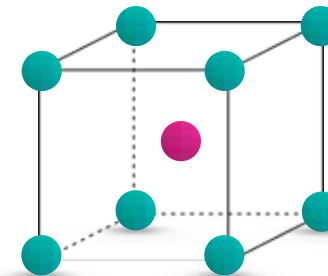
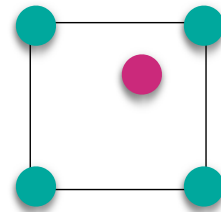


POLITOPO
CONVEXO

INTRODUCCIÓN

Casco convexo de un conjunto finito de puntos en el espacio afín d -dimensional.

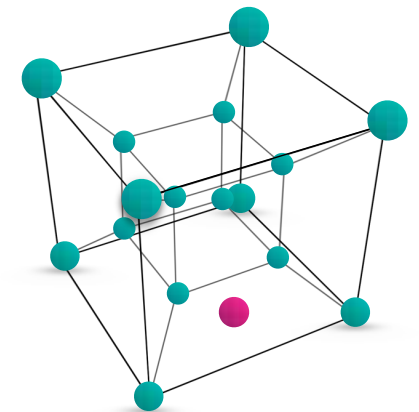
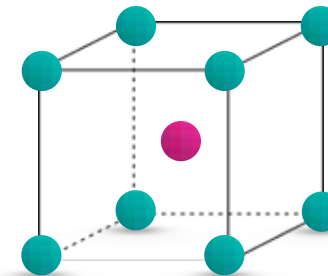
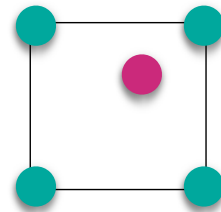
POLITOPO
CONVEXO



INTRODUCCIÓN

Casco convexo de un conjunto finito de puntos
(en posición convexa) en el espacio afín
 d -dimensional.

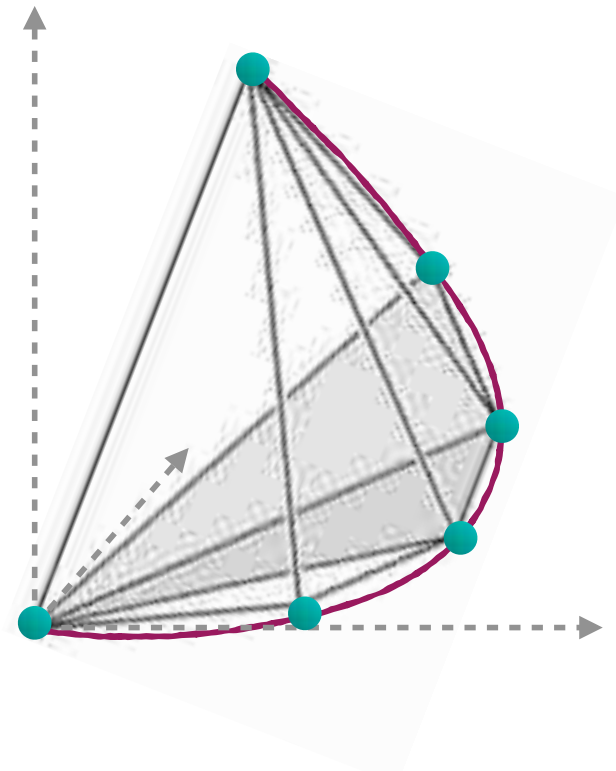
POLITOPO
CONVEXO



INTRODUCCIÓN

POLITOPO
CICLICO

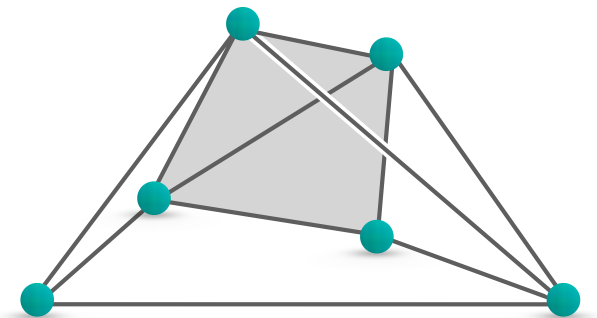
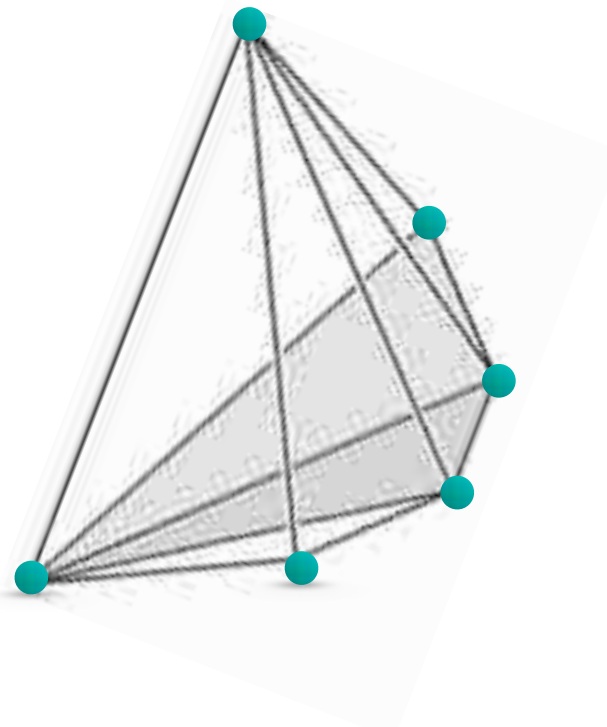
Casco convexo de n puntos $x_1, x_2, \dots, x_n$
sobre la curva de momentos $\gamma(t) = (t, t^2, t^3, \dots, t^d)$.



INTRODUCCIÓN

¿Cuál es el **máximo** número de caras que un politopo convexo con n vértices puede tener?

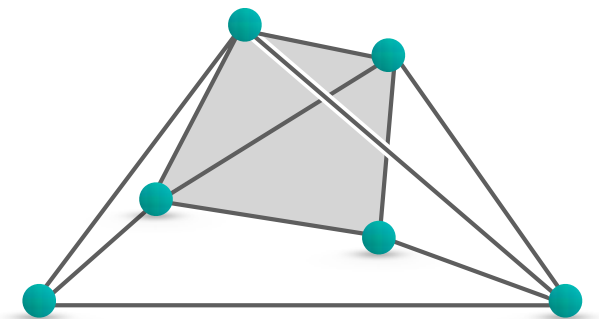
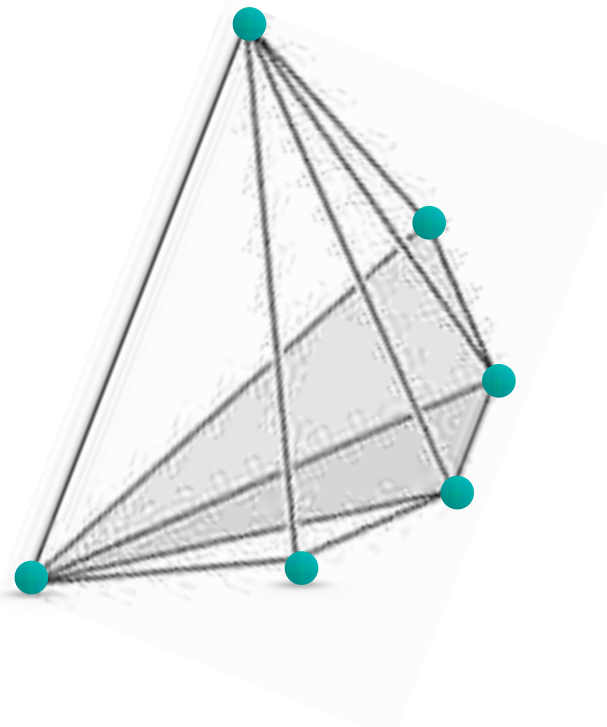
MÁXIMO NÚMERO
DE CARAS



INTRODUCCIÓN

¿Cuál es el **mínimo** número de caras que un politopo convexo con n vértices puede tener?

MÍNIMO NÚMERO
DE CARAS

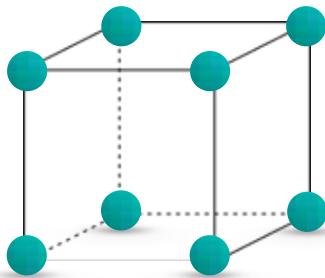


INTRODUCCIÓN

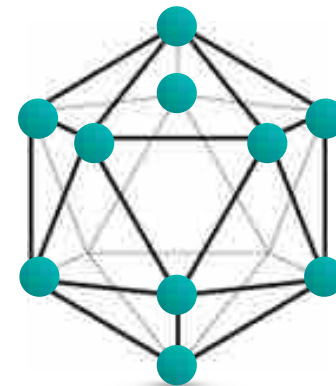
$$f(P) = (f_0(P), f_1(P), \dots, f_d(P))$$

f-VECTOR

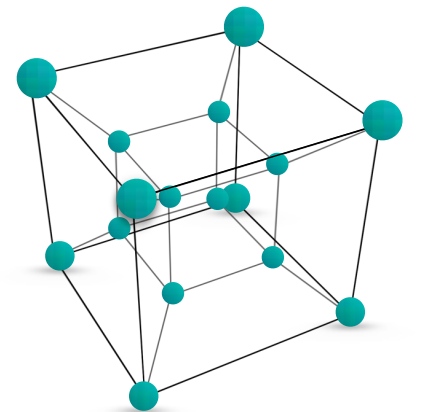
¿Cuál es el **máximo y el mínimo $f(P)$** ,
para cada d y n ?



(8, 12, 6, 1)



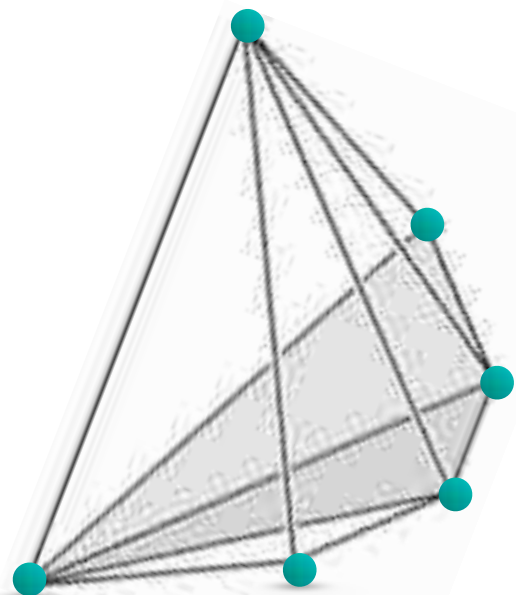
(12, 30, 20, 1)



(16, 32, 24, 8, 1)

INTRODUCCIÓN

[P.McMullen, 1970]
EL TEOREMA DE LA
COTA SUPERIOR

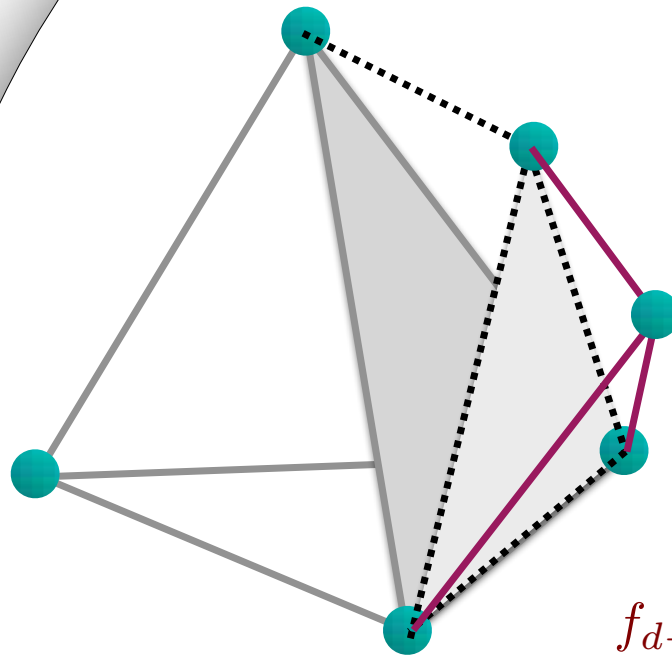


El **politopo cíclico** es aquel (entre los politopos convexos) que tiene el **máximo número de caras** en cualquier dimensión dado un número de vértices.

$$f_{d-1}(C(d, n)) = \binom{n - \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor}{n-d} + \binom{n - \lfloor \frac{d+2}{2} \rfloor}{n-d}$$

INTRODUCCIÓN

[D.Barnette, 1973]
EL TEOREMA DE LA
COTA INFERIOR

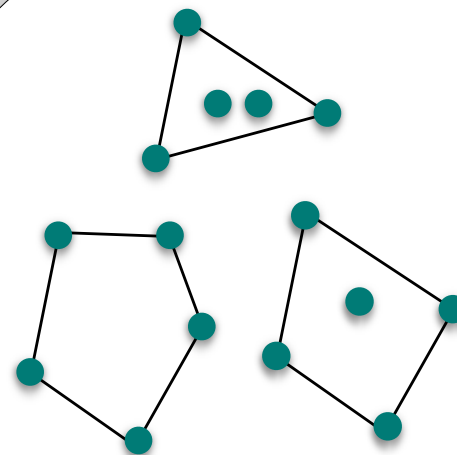
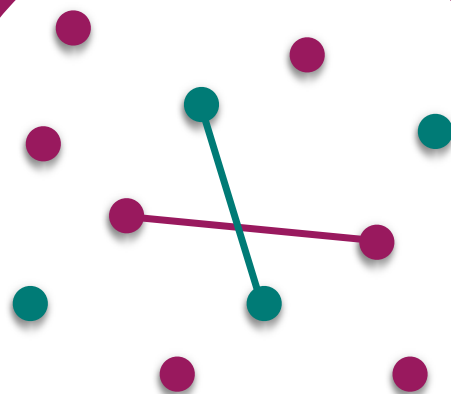
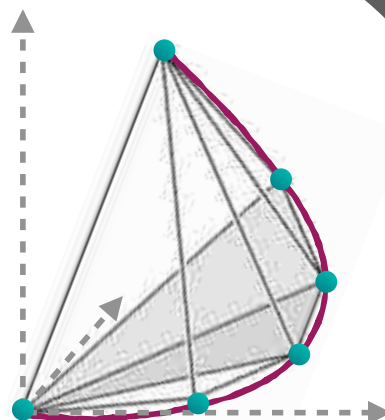


El **politopo apilado** es el que tiene el **mínimo número de caras** posible (entre los politopos convexos) en cualquier dimensión, dado un número de vértices.

$$f_{d-1}(S(d, n)) = (d - 1)n - (d + 1)(d - 2).$$

INTRODUCCIÓN

UNA
APLICACIÓN
MATEMÁTICA

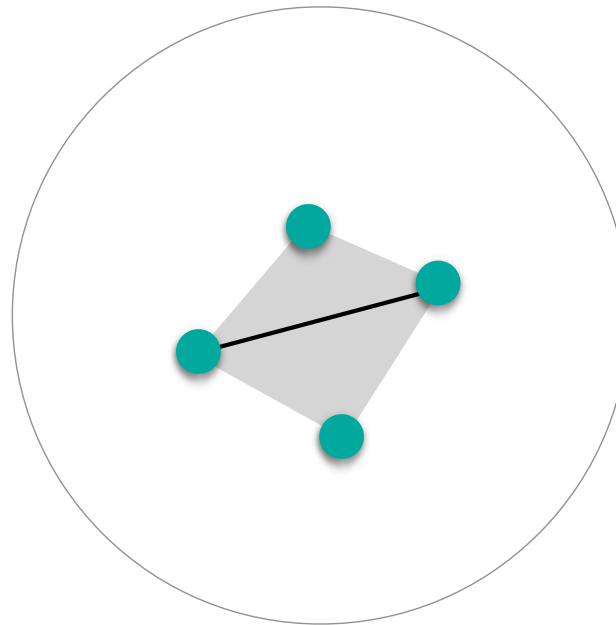


EL PROBLEMA PROYECTIVO

EL PROBLEMA PROYECTIVO

CONVEXIDAD

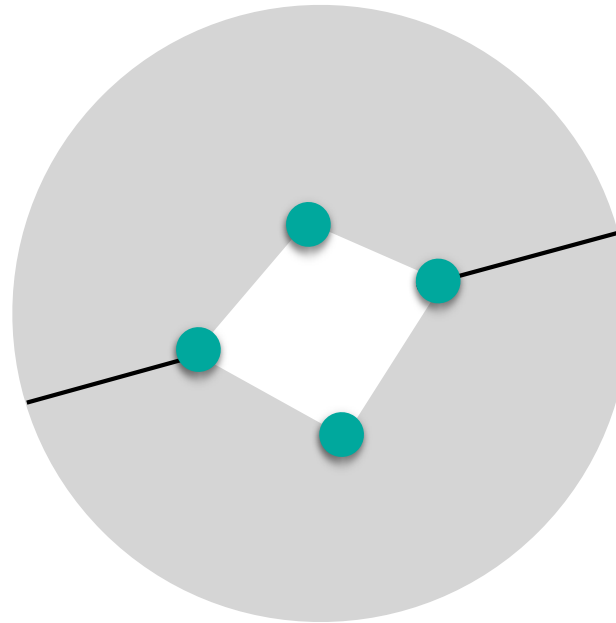
¿Qué es convexidad en el espacio
proyectivo?



EL PROBLEMA PROYECTIVO

CONVEXIDAD

¿Qué es convexidad en el espacio
proyectivo?

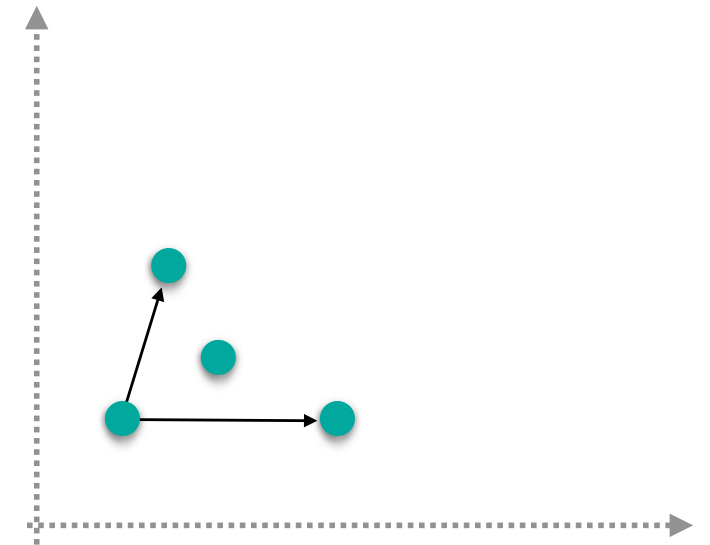


EL PROBLEMA PROYECTIVO

CONVEXIDAD

Vamos a decir que un conjunto (en el espacio afín) es **proyectivamente convexo** si existe una **transformación proyectiva** (permisible) **que lo vuelve convexo**.

$$T(x) = \frac{Ax + b}{\langle c, x \rangle + d}$$

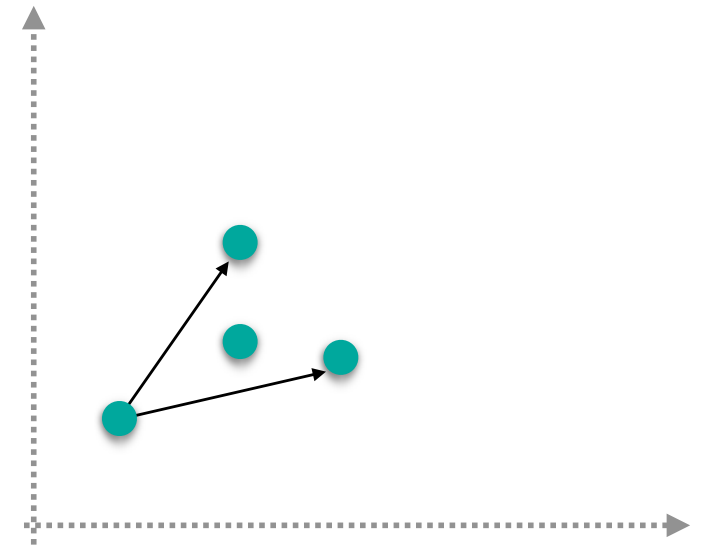


EL PROBLEMA PROYECTIVO

CONVEXIDAD

Vamos a decir que un conjunto (en el espacio afín) es **proyectivamente convexo** si existe una **transformación proyectiva** (permisible) **que lo vuelve convexo**.

$$T(x) = \frac{\boxed{Ax} + b}{\langle c, x \rangle + d}$$



EL PROBLEMA PROYECTIVO

CONVEXIDAD

Vamos a decir que un conjunto (en el espacio afín) es **proyectivamente convexo** si existe una **transformación proyectiva** (permisible) **que lo vuelve convexo**.

$$T(x) = \frac{Ax + \boxed{b}}{\langle c, x \rangle + d}$$

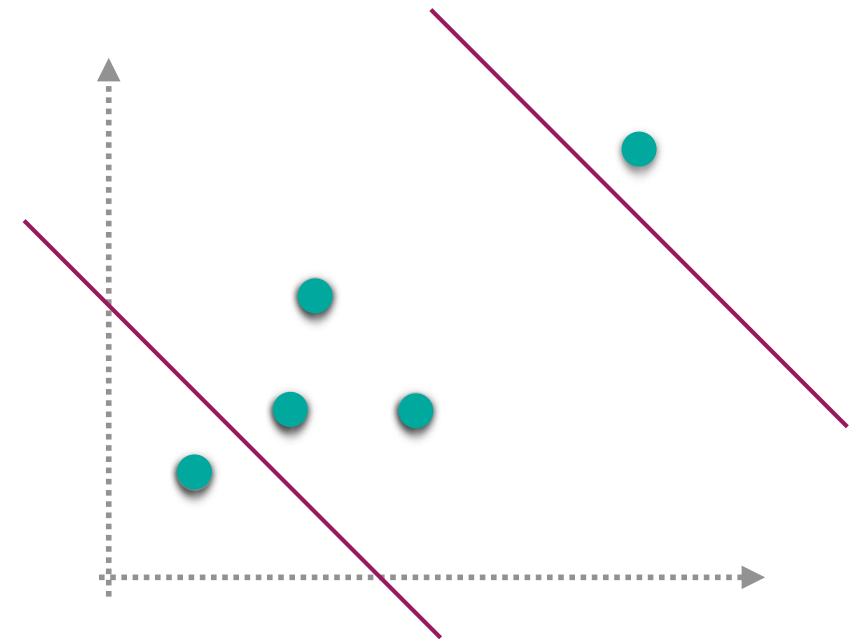


EL PROBLEMA PROYECTIVO

CONVEXIDAD

Vamos a decir que un conjunto (en el espacio afín) es **proyectivamente convexo** si existe una **transformación proyectiva** (permisible) **que lo vuelve convexo**.

$$T(x) = \frac{Ax + b}{\langle c, x \rangle + d}$$

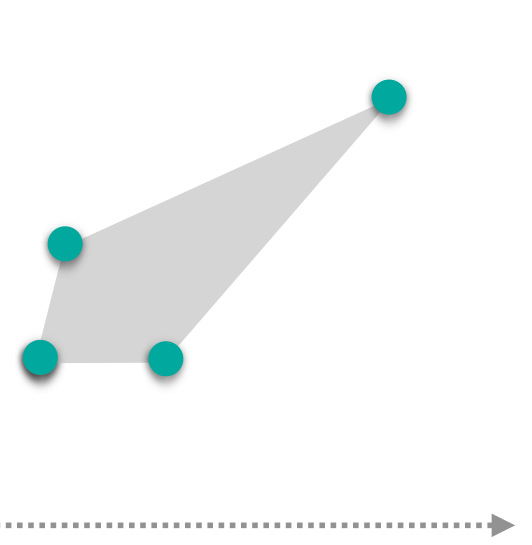


EL PROBLEMA PROYECTIVO

CONVEXIDAD

Vamos a decir que un conjunto (en el espacio afín) es **proyectivamente convexo** si existe una **transformación proyectiva** (permisible) **que lo vuelve convexo**.

$$T(x) = \frac{Ax + b}{\langle c, x \rangle + d}$$



EL PROBLEMA PROYECTIVO

UNA VERSIÓN
PROYECTIVA DEL
TEOREMA DE LA
COTA SUPERIOR

Dado un conjunto X de n puntos en (posición general) en dimensión d , ¿cuál es el **máximo número de caras** que puede tener $\text{conv}(T(X))$, entre todas las posibles transformaciones proyectivas T (permisibles para X) ?

$$f_d([X]) = \max_{Y \in [X]} f_d(\text{conv}(Y))$$

$[X]$ = la **clase proyectiva de la configuración X**

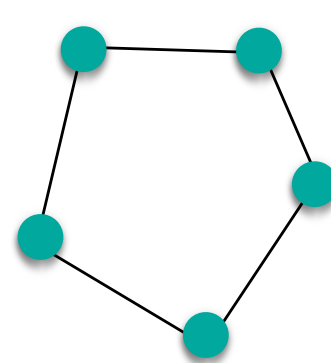
$[X] = \{T(X) | T \text{ transformación proyectiva}\}$

EL PROBLEMA PROYECTIVO

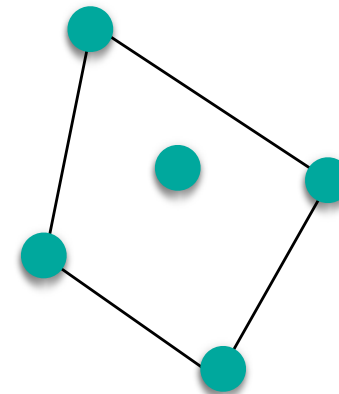
EL F-VECTOR DE UNA
CONFIGURACIÓN DE
PUNTOS

$$f([X]) = (f_0([X]), f_1([X]), f_2([X]), \dots, f_d([X]))$$

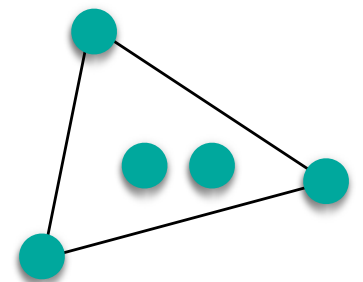
$$f_i([X]) = \max_{Y \in [X]} f_i(\text{conv}(Y))$$



(5, 5, 1)



(4, 4, 1)



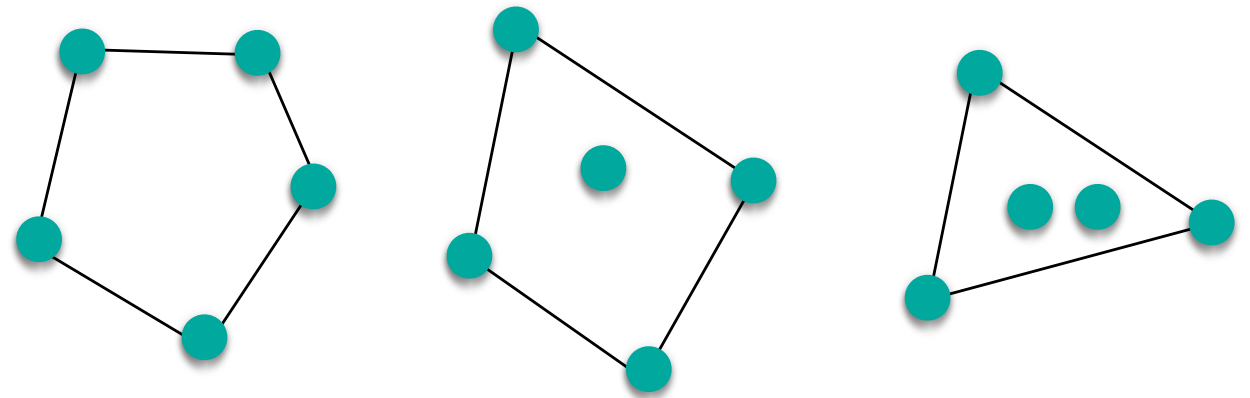
(3, 3, 1)

EL PROBLEMA PROYECTIVO

EL F-VECTOR DE UNA
CONFIGURACIÓN DE
PUNTOS

$$f(n) = (f_0(n), f_1(n), f_2(n), \dots, f_d(n))$$

$$f_i(n) = \min_{X \in P_n^d} f_i([X])$$



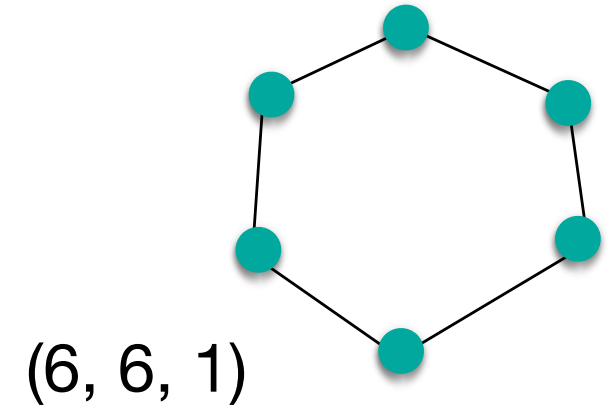
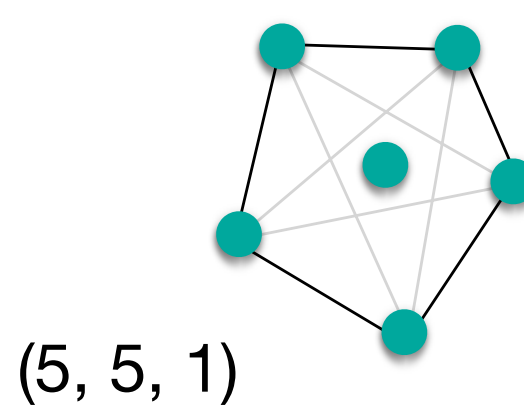
P_n^d = conjunto de las configuraciones de puntos en dimensión d

EL PROBLEMA PROYECTIVO

EL F-VECTOR DE UNA
CONFIGURACIÓN DE
PUNTOS

$$f(n) = (f_0(n), f_1(n), f_2(n), \dots, f_d(n))$$

$$f_i(n) = \min_{X \in P_n^d} f_i([X])$$



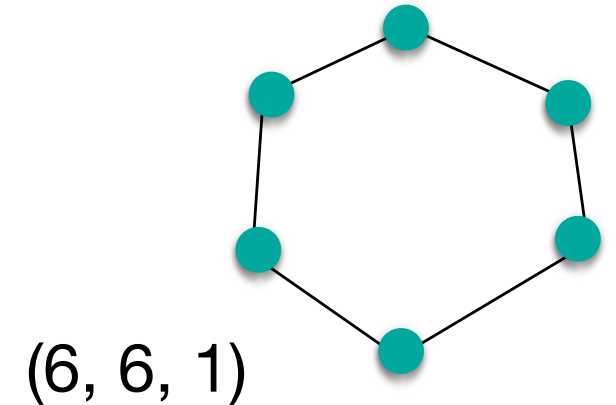
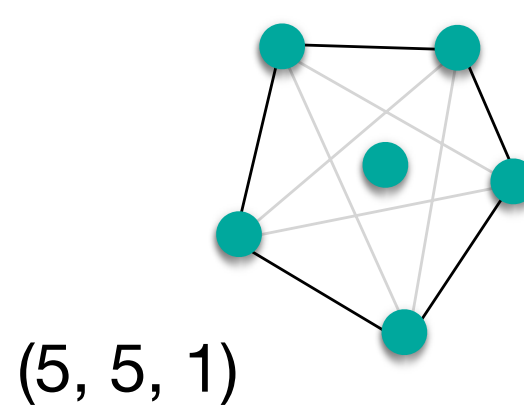
P_n^d = conjunto de las configuraciones de puntos en dimensión d

EL PROBLEMA PROYECTIVO

EL F-VECTOR DE UNA
CONFIGURACIÓN DE
PUNTOS

$$F(n) = (F_0(n), F_1(n), F_2(n), \dots, F_d(n))$$

$$F_i(n) = \max_{X \in P_n^d} f_i([X])$$

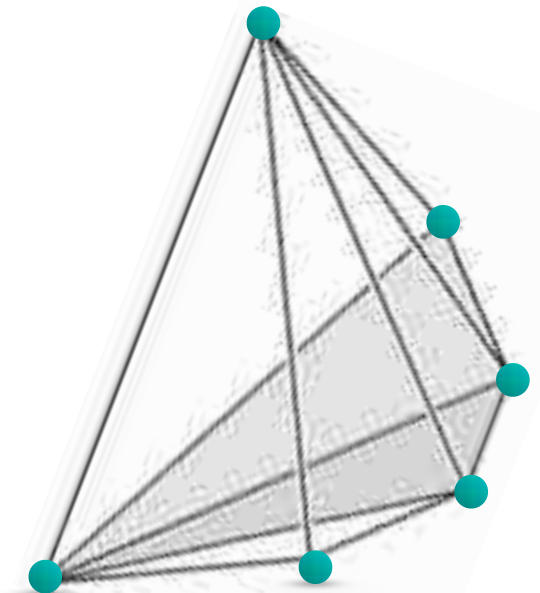
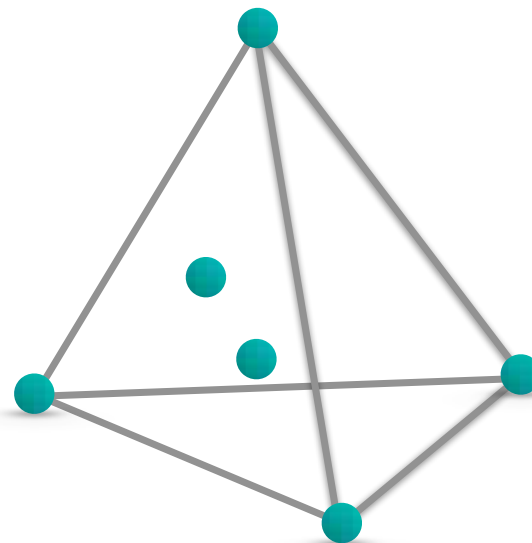


P_n^d = conjunto de las configuraciones de puntos en dimensión d

EL PROBLEMA PROYECTIVO

EL F-VECTOR DE UNA
CONFIGURACIÓN DE
PUNTOS

$$f_i(S^d) \leq f_i(n) \leq F_i(n) \leq f_i(C_n^d)$$



A. ¿se puede saber cuándo una configuración de puntos está en la clase proyectiva del politopo cíclico?

B. ¿del politopo apilado? ¿del tetraedro?

P_n^d

**Clase proyectiva
del politopo
cíclico**

**Clase proyectiva
del politopo
apilado**

**Clase proyectiva
del tetraedro**

- A. ¿se puede saber cuándo una configuración de puntos está en la clase proyectiva del politopo cíclico?
- B. ¿del politopo apilado? ¿del tetraedro?
- C. ¿se puede saber cuándo una configuración de puntos se puede convexificar? ¿casi convexificar?

P_n^d

**Clase proyectiva
del politopo
cíclico**

**Clase proyectiva
del politopo
apilado**

**Clase proyectiva
de cosas que no se
pueden convexificar**

EL PROBLEMA PROYECTIVO

¿se puede saber
cuándo una
configuración de
puntos se puede
convexificar?

[Larman 1972; Ramírez-A 2001] El **máximo** número de puntos n tal que **cualquier conjunto de n puntos (en p.g.) en dimensión d puede ser convexificado es:**

$$2d + 1 \leq n \leq \frac{5d}{2} + 1$$

Todos los conjuntos de orden menor a este número pueden ser convexificados

EL PROBLEMA PROYECTIVO

¿se puede saber
cuándo una
configuración de
puntos se puede
convexificar?

[Larman 1972; Ramírez-A 2001] El **máximo** número de puntos n tal que **cualquier conjunto de n puntos (en p.g.) en dimensión d puede ser convexificado es:**

$$2d + 1 \leq n \leq \frac{5d}{2} + 1$$

Existe un conjunto de este orden
que no puede ser convexificado

EL PROBLEMA PROYECTIVO

¿se puede saber
cuándo una
configuración de
puntos está en la clase
de un politopo cíclico?

[N.GC., Larman 2007] El **máximo** número de puntos n tal que **cualquier conjunto de n puntos (en p.g.) en dimensión d esta en la clase proyectiva de un politopo cíclico es:**

$$d + 4 \leq n \leq \frac{3d}{2} + 1$$

Todos los conjuntos de orden menor o igual a este número están en la clase de un politopo cíclico.

EL PROBLEMA PROYECTIVO

¿se puede saber
cuándo una
configuración de
puntos está en la clase
de un politopo cíclico?

[N.GC., Larman 2007] El **máximo** número de puntos n tal que **cualquier conjunto de n puntos (en p.g.) en dimensión d esta en la clase proyectiva de un politopo cíclico es:**

$$d + 4 \leq n \leq \frac{3d}{2} + 1$$

Existe un conjunto de este orden que no esta en la clase de un politopo cíclico.

EL PROBLEMA PROYECTIVO

¿se puede saber
cuándo una
configuración de
puntos se puede
convexificar salvo unos
cuantos puntos?

[N.GC, L.P. Montejano, J. Ramírez-A 2017] El **máximo** número de puntos n tal que **cualquier conjunto de n puntos (en p.g.) en dimensión d se puede convexificar con a lo más t puntos en el interior es:**

$$2d + t + 1 \leq n \leq 2d + (d - 2)t + 2$$

Todos los conjuntos de orden menor o igual a este número se pueden convexificar con a lo más t puntos en su interior.

EL PROBLEMA PROYECTIVO

¿se puede saber
cuándo una
configuración de
puntos se puede
convexificar salvo unos
cuantos puntos?

[N.GC, L.P. Montejano, J. Ramírez-A 2017] El **máximo** número de puntos n tal que **cualquier conjunto de n puntos (en p.g.) en dimensión d se puede convexificar con a lo más t puntos en el interior es:**

$$2d + t + 1 \leq n \leq 2d + (d - 2)t + 2$$

Existe un conjunto de este orden
que no se puede convexificar con
a lo más t puntos en su interior.

EL PROBLEMA PROYECTIVO

¿cómo nos ayuda esto
para calcular f_0 ó f_d ?

$$2d + t + 1 \leq n \leq 2d + (d - 2)t + 2$$

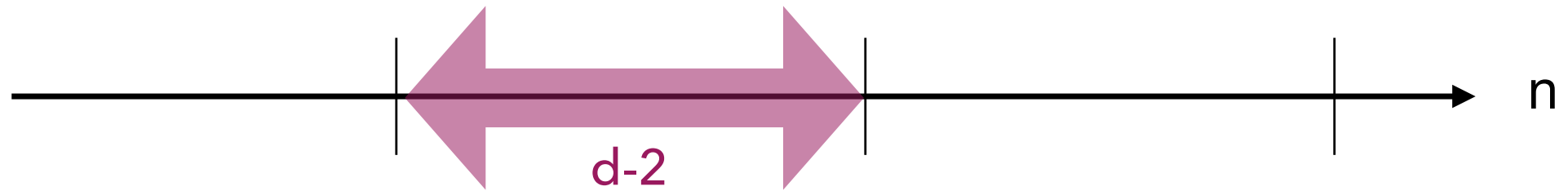
Cota Inferior

Teorema de la cota inferior

Cota inferior para $f_{d-1}(n)$

$$f_{d-1}(\text{Apilado}(2d+1)) \leq f_{d-1}(n)$$

$$2d + t + 1 \leq n \leq 2d + (d - 2)t + 2$$



Para cada n podemos encontrar $t=t(n)$ tal que:

$$2d+2+(d-2)(t(n)-1) \leq n < 2d+2+(d-2)t(n)$$

$$\text{Entonces } f_0(n) \leq n-t(n)$$

Cotas

Teorema de la cota superior

Cota superior para $f_{d-1}(n)$

$$f_{d-1}(n) \leq f_{d-1}(C_{n-t(n)}^d)$$

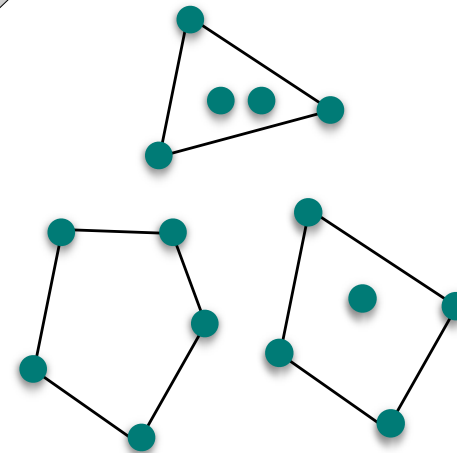
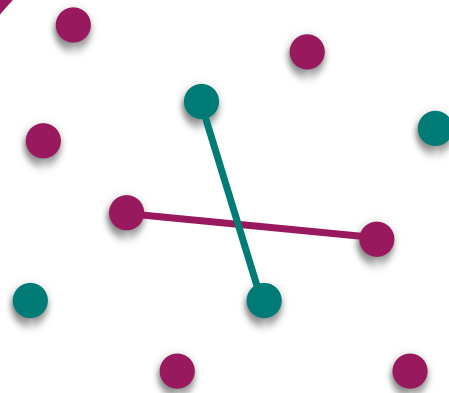
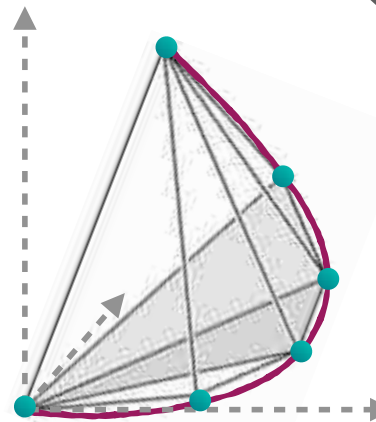
$$t(n) = \left\lceil \frac{n - 2(d + 1)}{d - 2} \right\rceil$$

$$2d + 1 \leq f_0(n) \leq n - t(n)$$

$$f_{d-1}(\textit{Apilado}(2d + 1)) \leq f_{d-1}(n) \leq F_{d-1}(n) \leq f_{d-1}(C_{n-t(n)}^d)$$

INTRODUCCIÓN

UNA
APLICACIÓN
MATEMÁTICA

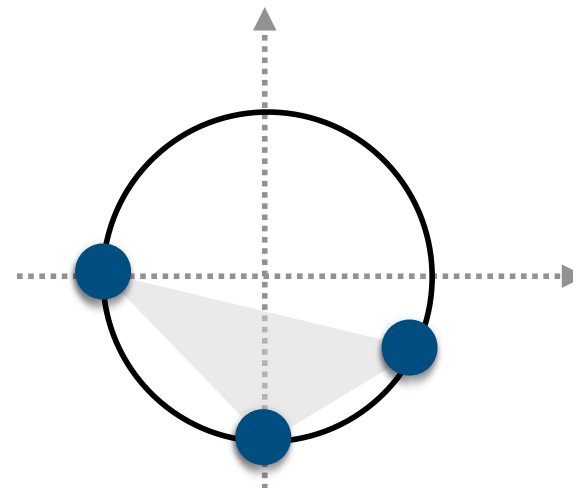


EL PROBLEMA PROYECTIVO

UNA APLICACIÓN

El teorema de la cota superior continuo

[U.Wagner, E.Welzl 2001] Para cualquier distribución de probabilidad absolutamente continua sobre la esfera, la probabilidad de que el casco convexo de $d+1$ seleccionados aleatoriamente contiene al origen es a lo más $1/2^d$ y esta cota es justa.



UNA APLICACIÓN

El teorema de la cota superior continuo

[U.Wagner, E.Welzl 2001] Para cualquier distribución de probabilidad absolutamente continua sobre la esfera, la probabilidad de que el casco convexo de $d+1$ seleccionados aleatoriamente contiene al origen es a lo más $1/2^d$ y esta cota es justa.

[Pach, Szegedy 2003] Presentan dos pruebas "combinatorias" de este resultado para el plano.

UNA APLICACIÓN

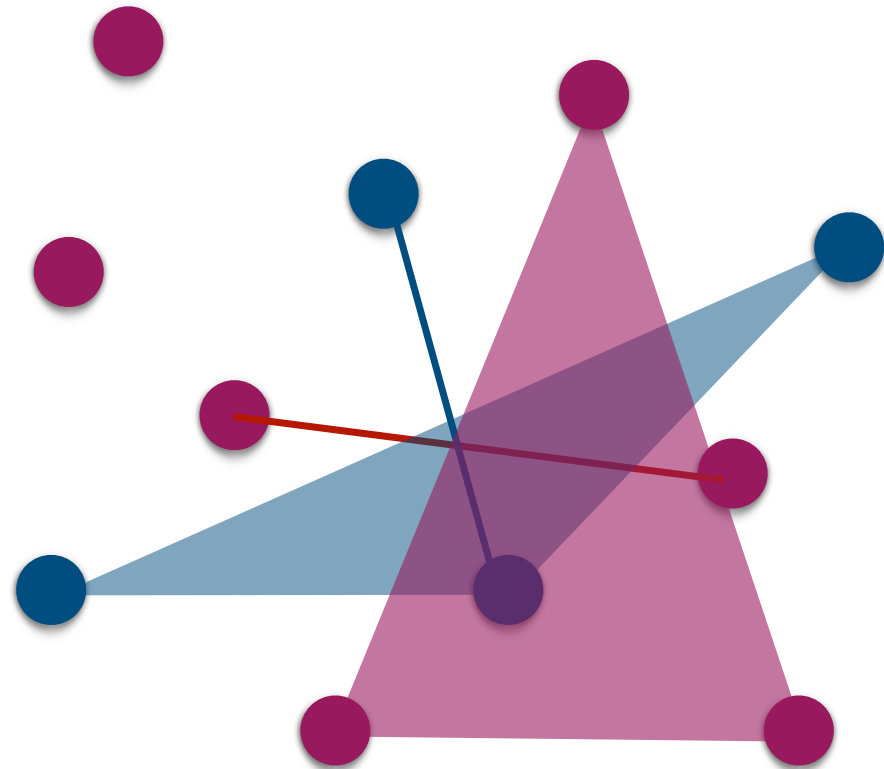
PREGUNTA SOBRE PARTICIONES DE RADON

Dados n puntos en el plano, coloreados de rojo y azul, ¿cuál es el **máximo número de subconjuntos** de 4 puntos con la propiedad de que forman una **partición de Radon inducida**?

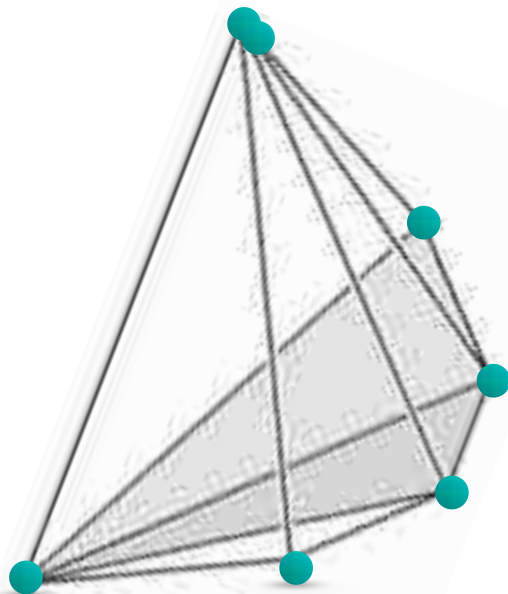
En particular, ¿es cierto que cuando se logra el **máximo**, el **número de puntos rojos y azules es aproximadamente el mismo**?

UNA APLICACIÓN

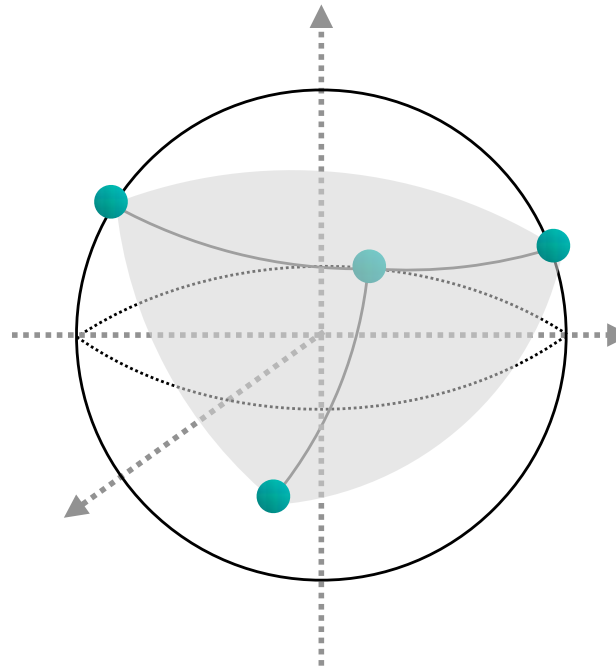
PREGUNTA SOBRE
PARTICIONES DE
RADON



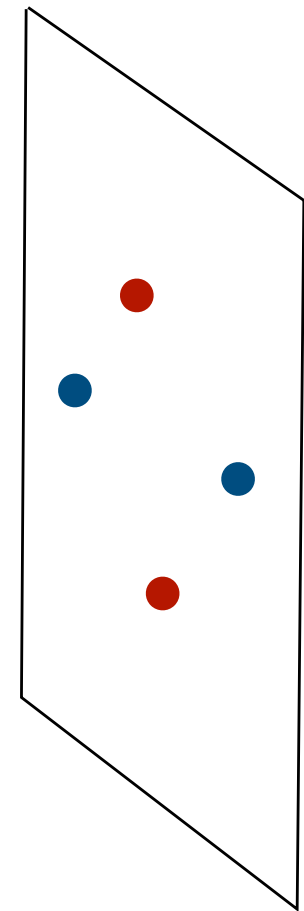
**Número de caras
de un politopo**



**Número de simplejos
que abrazan al origen**



**Número de particiones
de Radon**



UNA APLICACIÓN

PREGUNTA SOBRE PARTICIONES DE RADON

Dados n puntos en el plano, coloreados de rojo y azul, ¿cuál es el máximo número de subconjuntos de 4 puntos con la propiedad de que forman una partición de Radon inducida?

Dados n puntos en posición general en dimensión d , ¿qué tan grande puede ser $f_{d-1}(n)$?



GRACIAS