Caminos accesibles sobre árboles regulares.

Frank Duque, Alejandro Roldán y Alexander Valencia

11 de abril de 2018

Caminos accesibles sobre árboles regulares

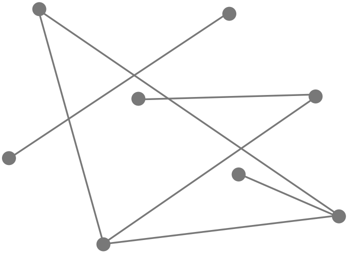
DEFINICIONES

Definiciones

Un grafo es un par ordenado $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito y E es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V.

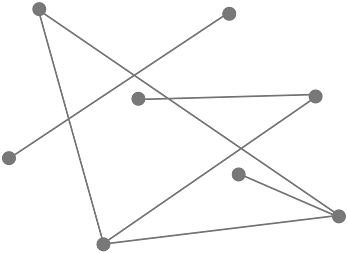
DEFINICIONES

Un grafo es un par ordenado $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito y E es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V.



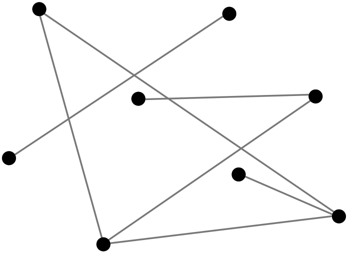
Definiciones

Los elementos de V son llamados vértices. Los elementos de E son llamados aristas. Dados dos vértices u y v, si la arista $uv = \{u, v\}$ está en E, se dice que u y v son adyacentes.



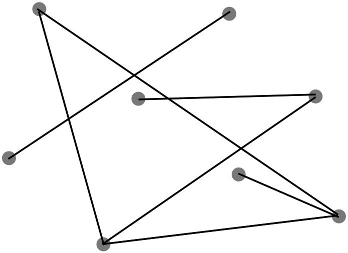
Definiciones

Los elementos de V son llamados vértices. Los elementos de E son llamados aristas. Dados dos vértices u y v, si la arista $uv = \{u, v\}$ está en E, se dice que u y v son adyacentes.



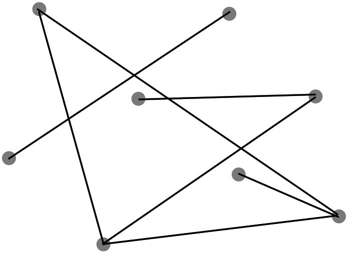
Definiciones

Los elementos de V son llamados vértices. Los elementos de E son llamados aristas. Dados dos vértices u y v, si la arista $uv = \{u, v\}$ está en E, se dice que u y v son adyacentes.



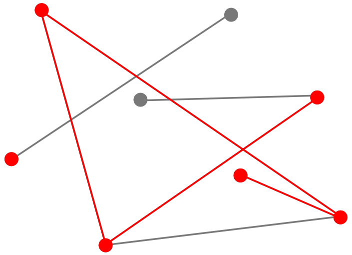
DEFINICIONES

Se dice que $G' = (V', E')$ es un subgrafo de G, si: G' es un grafo, $V' \subset V$ y $E' \subset E$.



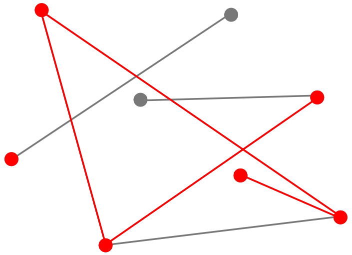
DEFINICIONES

Se dice que $G' = (V', E')$ es un subgrafo de G, si: G' es un grafo, $V' \subset V$ y $E' \subset E$.



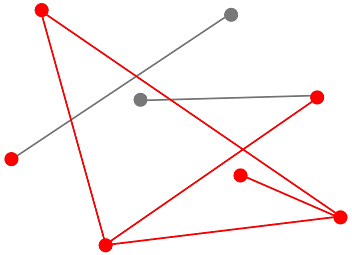
DEFINICIONES

Se dice que $G' = (V', E')$ es un grafo inducido de G, si G' es un subgrafo de G, y: para cualesquier $u, v \in V$, si la arista uv está en E entonces también está en E'.



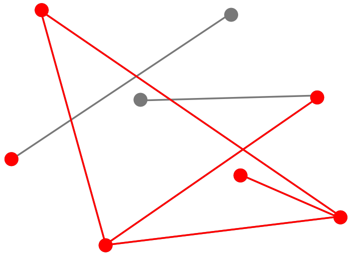
DEFINICIONES

Se dice que $G' = (V', E')$ es un grafo inducido de G, si G' es un subgrafo de G, y: para cualesquier $u, v \in V$, si la arista uv está en E entonces también está en E'.



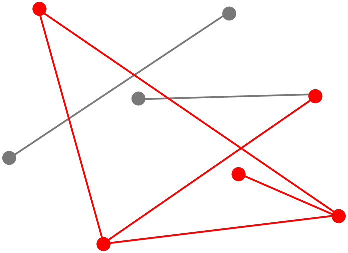
Definiciones

Se dice que $G = (V, E)$ es conexo, si cualquier par de vértices pueden ser conectados por un camino.



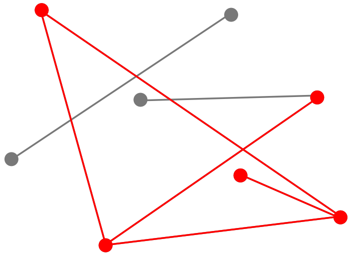
DEFINICIONES

Se dice que $G = (V, E)$ es conexo, si cualquier par de vértices pueden ser conectados por un camino.



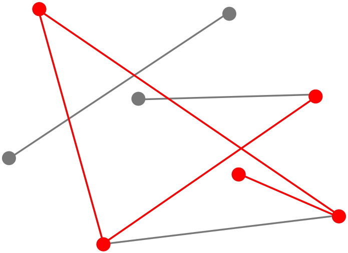
DEFINICIONES

Se dice que $G = (V, E)$ es aciclico, si G no contiene ciclos.



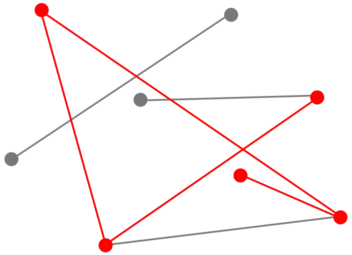
Definiciones

Se dice que $G = (V, E)$ es aciclico, si G no contiene ciclos.

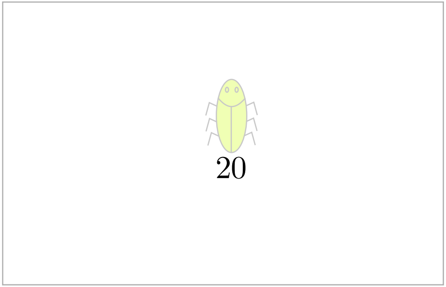


DEFINICIONES

Se dice que $G = (V, E)$ es un árbol, si G es conexo y no contiene ciclos.

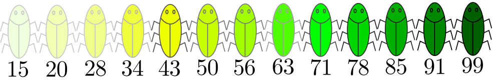


Landscape

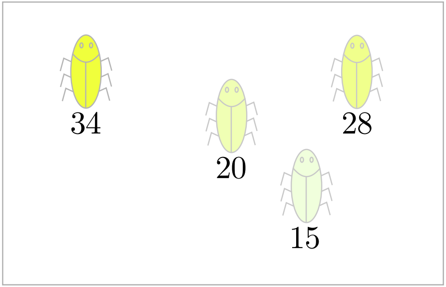


Crossing valleys

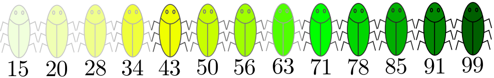
Fitness



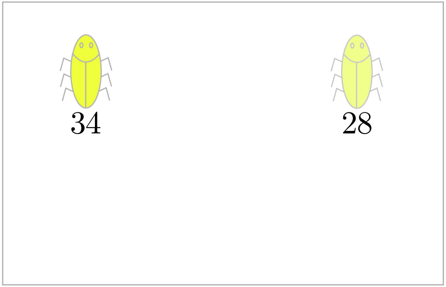
Landscape



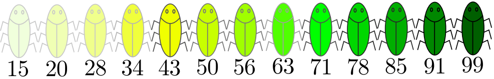
Fitness



Crossing valleys



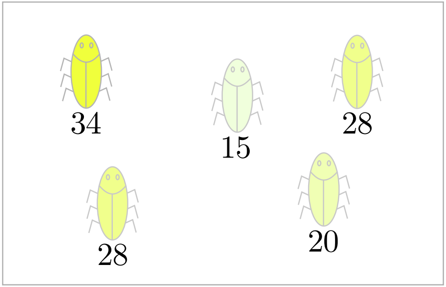
Fitness



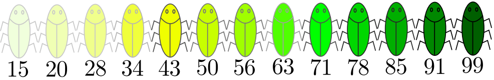
Landscape

Crossing valleys

Landscape

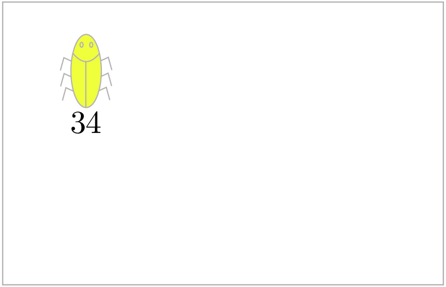


Fitness

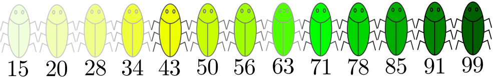


Crossing valleys

Landscape

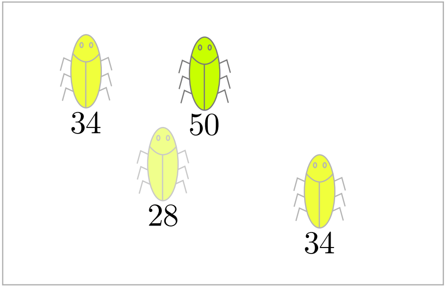


Fitness

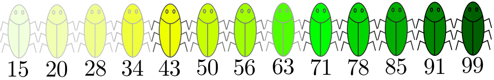


Crossing valleys

Landscape

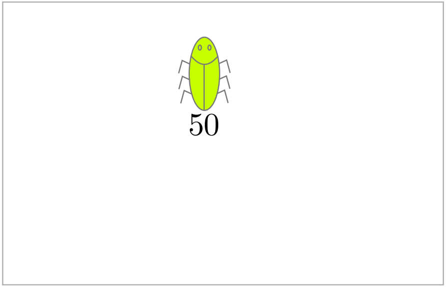


Fitness

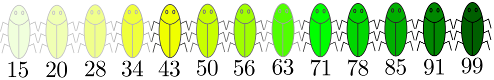


Crossing valleys

Landscape

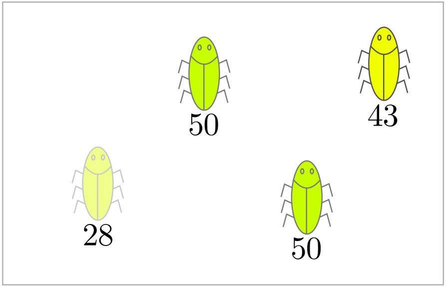


Fitness

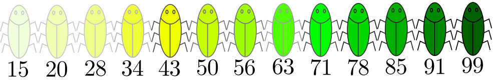


Crossing valleys

Landscape

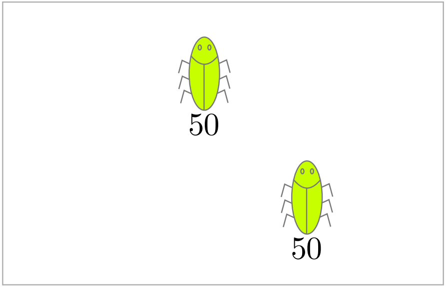


Fitness



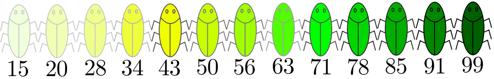
Crossing valleys

Landscape

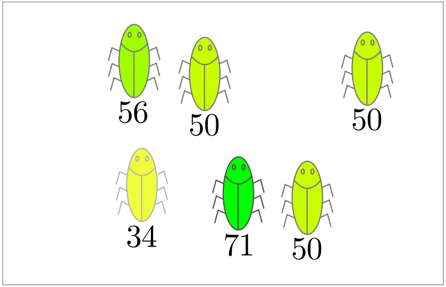


Crossing valleys

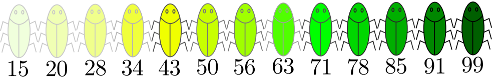
Fitness



Landscape

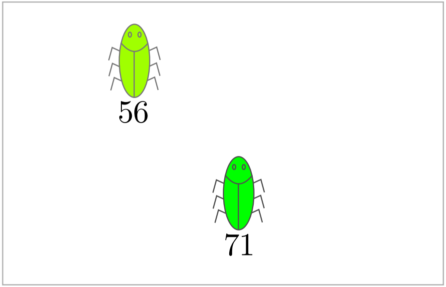


Fitness



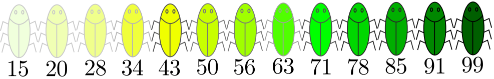
Crossing valleys

Landscape

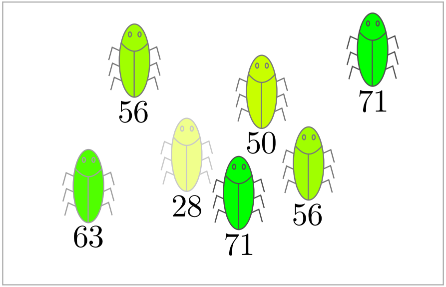


Crossing valleys

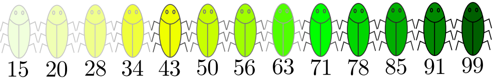
Fitness



Landscape

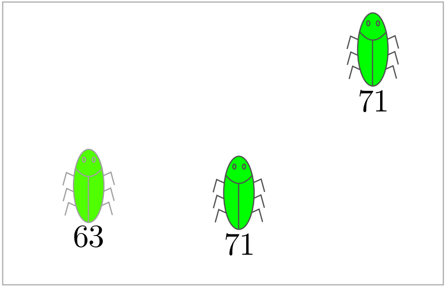


Fitness



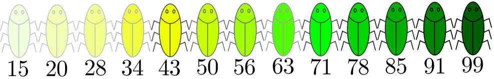
Crossing valleys

Landscape

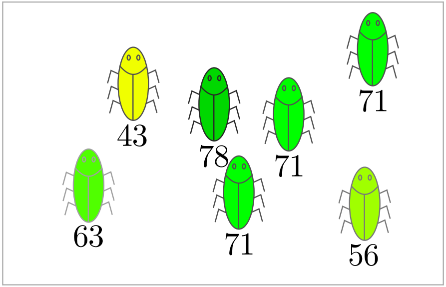


Crossing valleys

Fitness

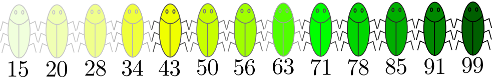


Landscape

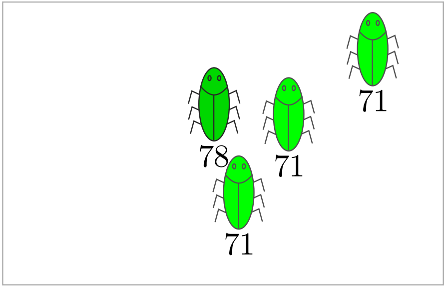


Crossing valleys

Fitness

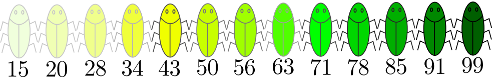


Landscape

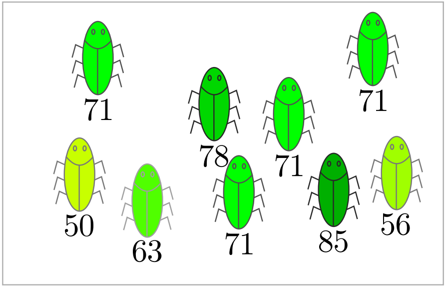


Crossing valleys

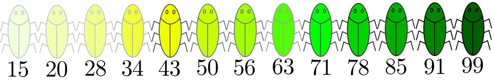
Fitness



Landscape

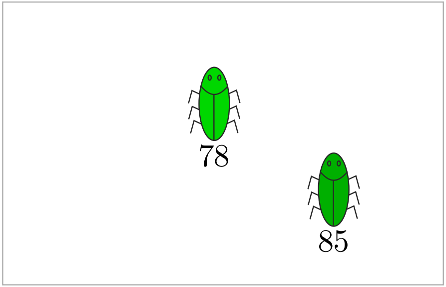


Fitness

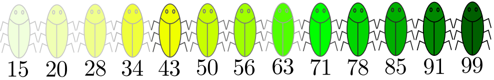


Crossing valleys

Landscape

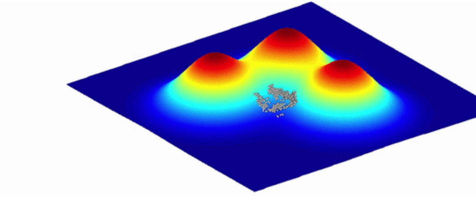


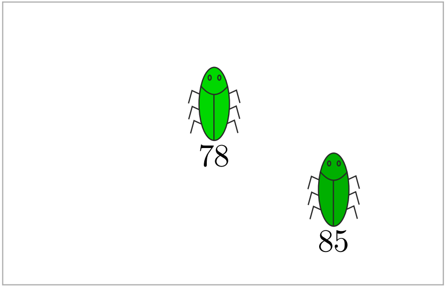
Fitness



Crossing valleys

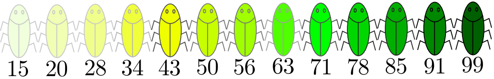
Landscape



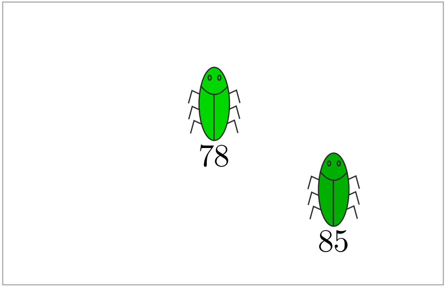


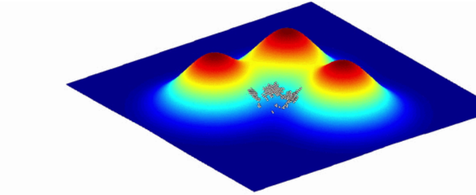
Crossing valleys

Fitness



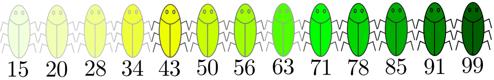
Landscape



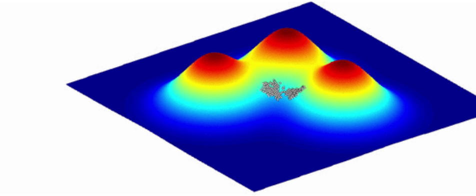


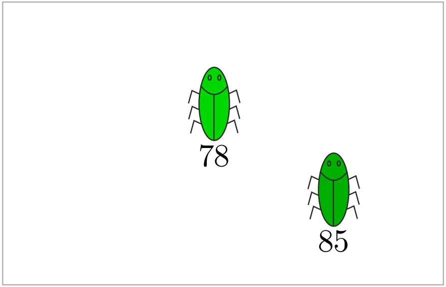
Crossing valleys

Fitness



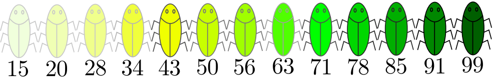
Landscape



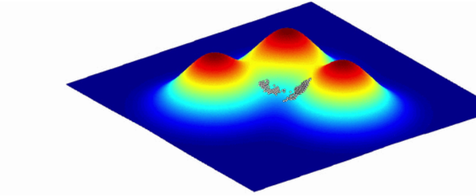


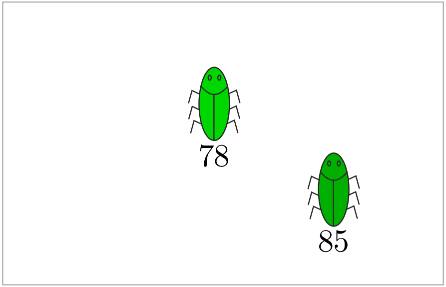
Crossing valleys

Fitness



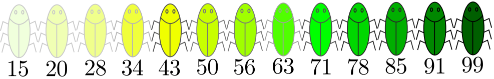
Landscape



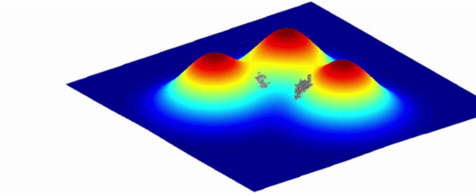


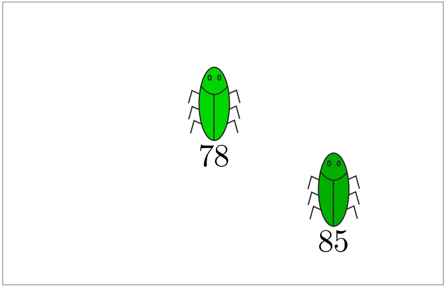
Crossing valleys

Fitness



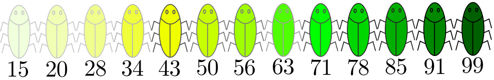
Landscape

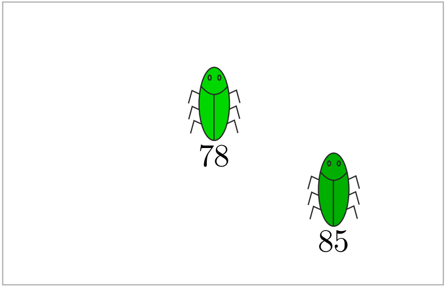




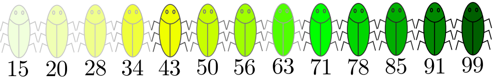
Crossing valleys

Fitness

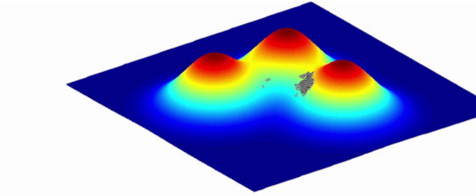




Fitness

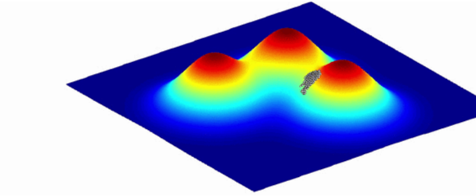


Landscape

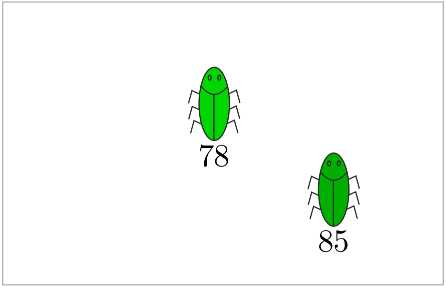


Crossing valleys

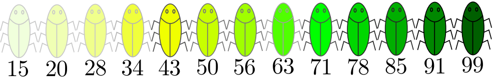
Landscape

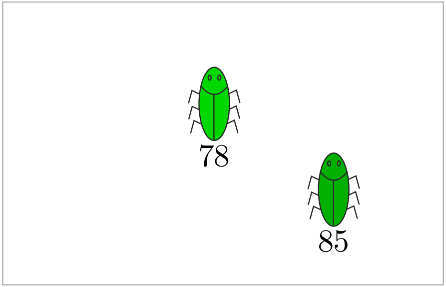


Crossing valleys

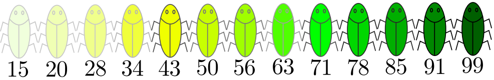


Fitness

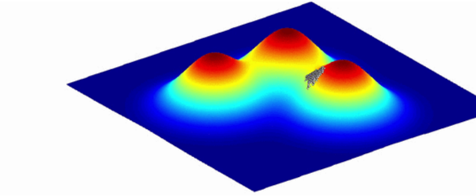




Fitness

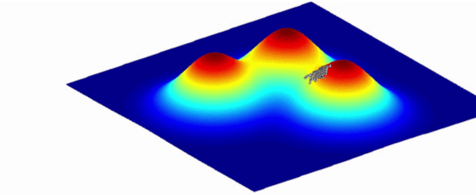


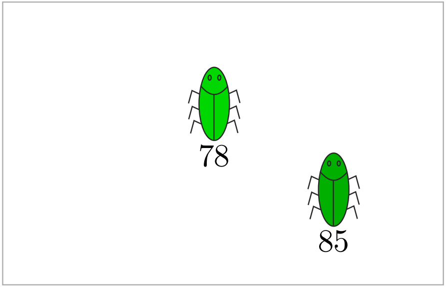
Landscape



Crossing valleys

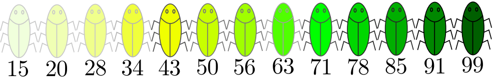
Landscape



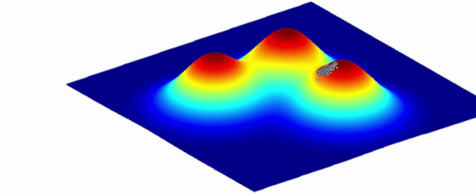


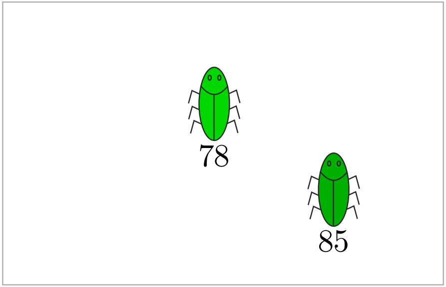
Crossing valleys

Fitness



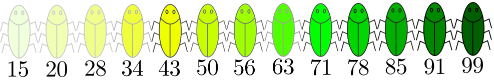
Landscape

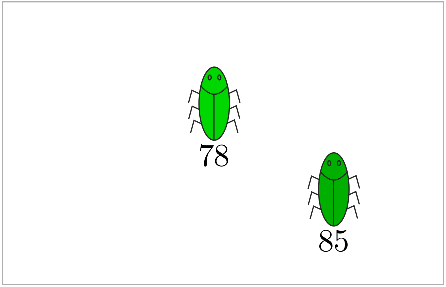




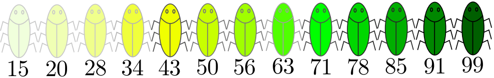
Crossing valleys

Fitness

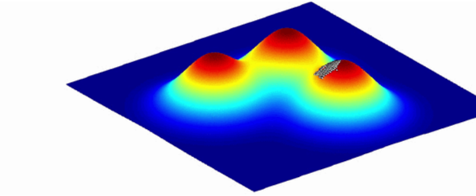




Fitness

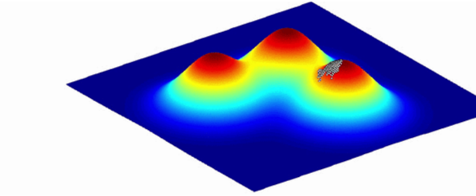


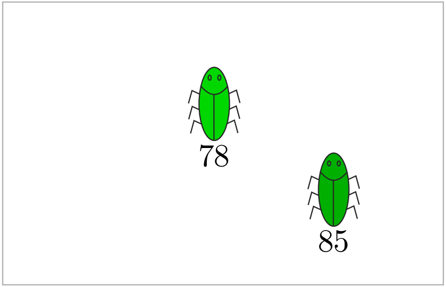
Landscape



Crossing valleys

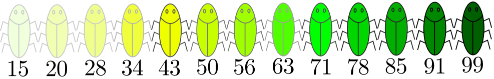
Landscape

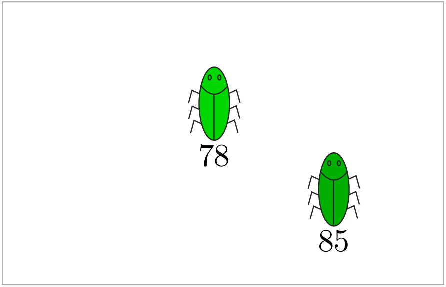




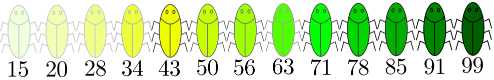
Crossing valleys

Fitness

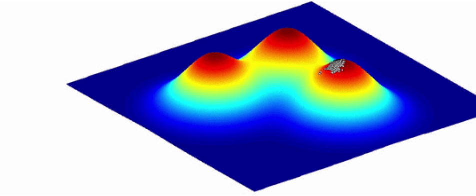




Fitness

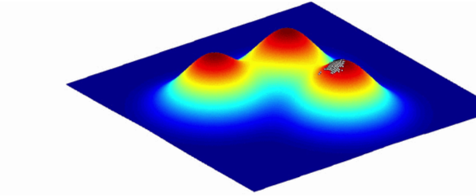


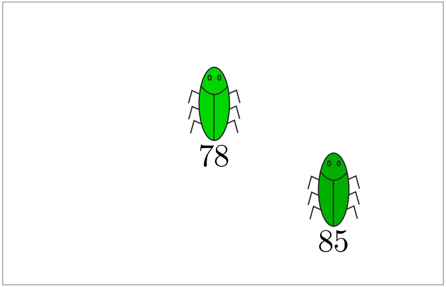
Landscape



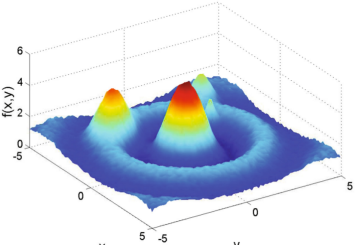
Crossing valleys

Landscape

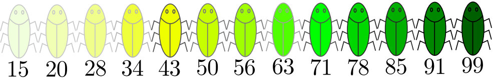




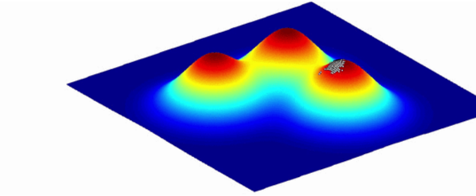
Crossing valleys



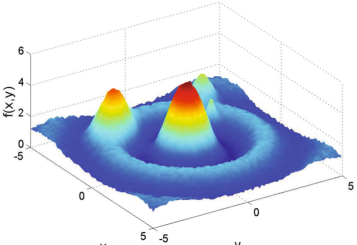
Fitness



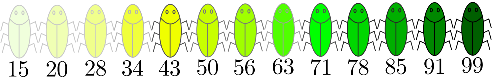
Landscape



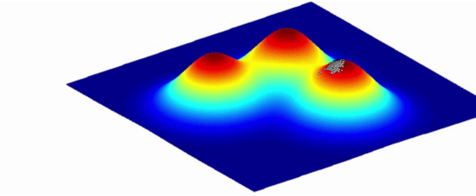
Crossing valleys

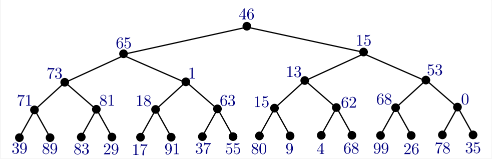


Fitness

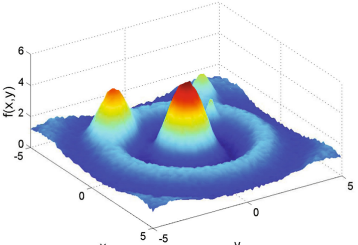


Landscape

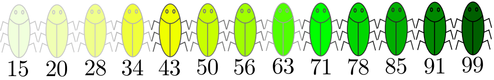


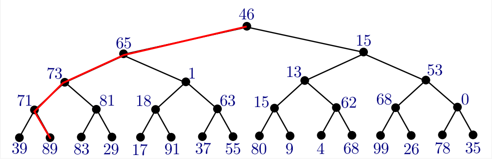


Crossing valleys

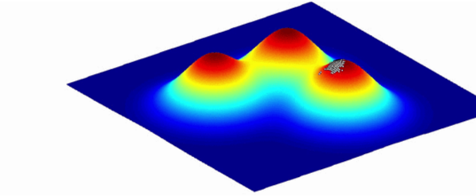


Fitness



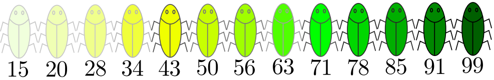


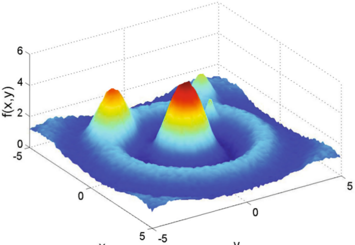
Landscape

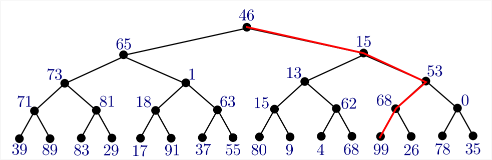


Crossing valleys

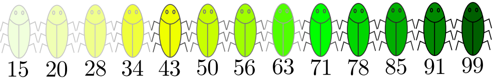
Fitness



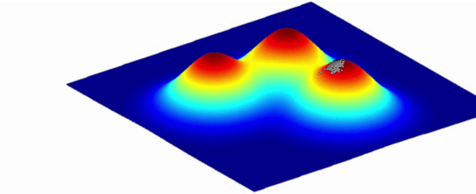




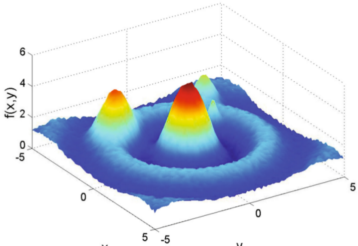
Fitness

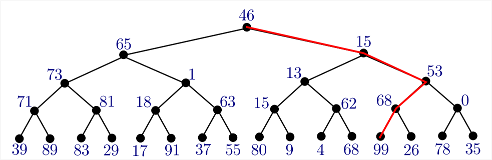


Landscape

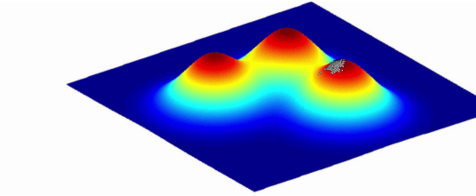


Crossing valleys

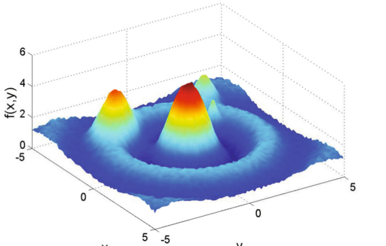


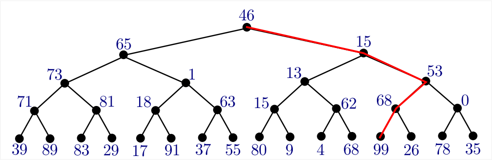


Landscape

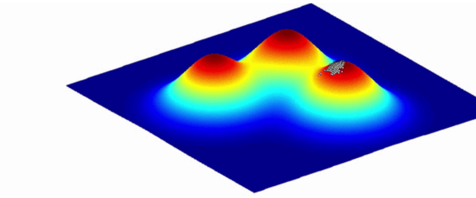


Crossing valleys

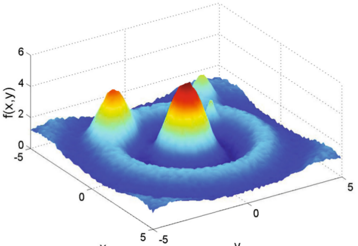




Landscape



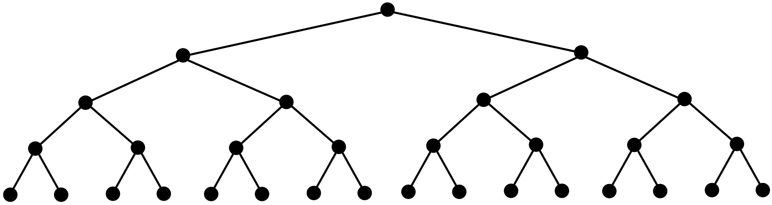
Crossing valleys



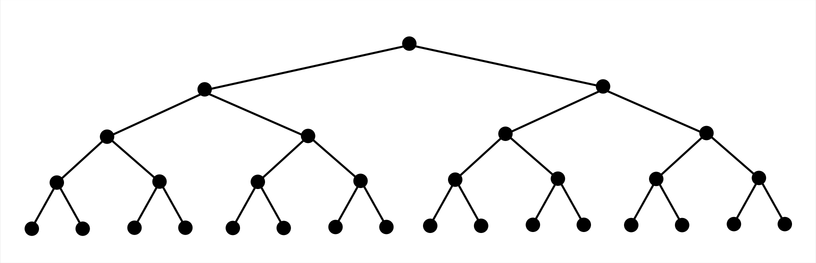
Caminos k-accesibles:
Se permiten saltos de hasta $k-1$.

T es un árbol d-regular de altura h si todos los vértices a distancia menor que h de la raíz tienen grado d.

T es un árbol d-regular de altura h si todos los vértices a distancia menor que h de la raíz tienen grado d.

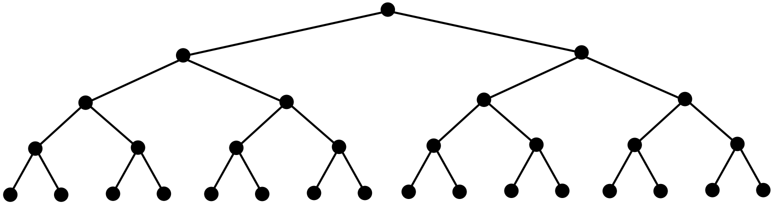


T es un árbol d-regular de altura h si todos los vértices a distancia menor que h de la raíz tienen grado d.



¿Cuándo hay caminos k-accesibles?

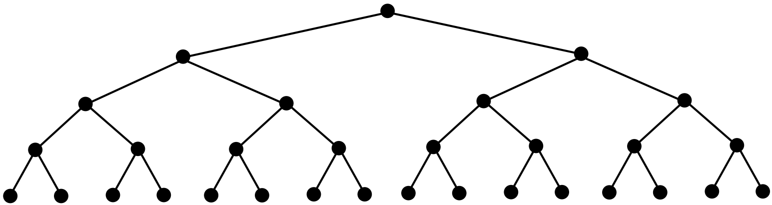
T es un árbol d-regular de altura h si todos los vértices a distancia menor que h de la raíz tienen grado d.



¿Cuándo hay caminos k-accesibles?

- h vs d.

T es un árbol d-regular de altura h si todos los vértices a distancia menor que h de la raíz tienen grado d.



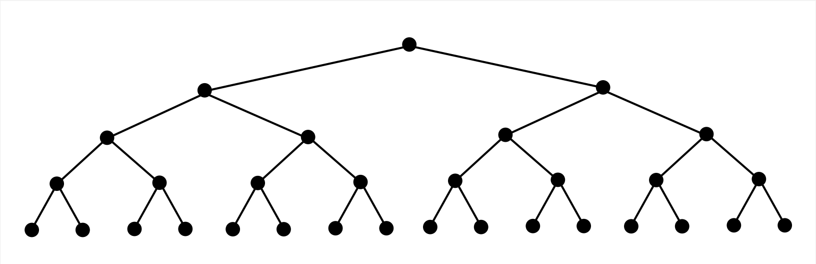
¿Cuándo hay caminos k-accesibles?

- h vs d.

Sean:

- $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$

T es un árbol d-regular de altura h si todos los vértices a distancia menor que h de la raíz tienen grado d.



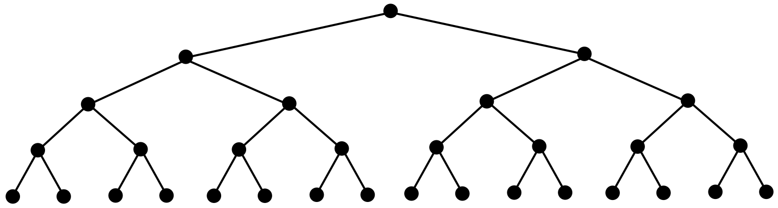
¿Cuándo hay caminos k-accesibles?

- h vs d.

Sean:

- $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$
- $T_h(f)$ al árbol $f(h)$-regular de altura h.

T es un árbol d-regular de altura h si todos los vértices a distancia menor que h de la raíz tienen grado d.



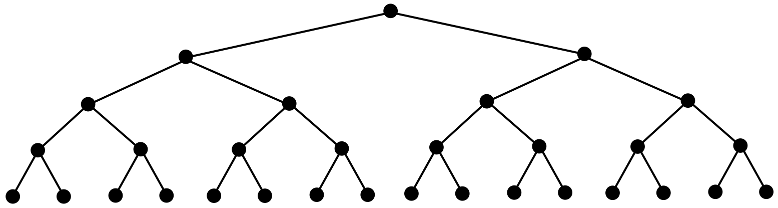
¿Cuándo hay caminos k-accesibles?

- h vs d.

Sean:

- $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$
- $T_h(f)$ al árbol $f(h)$-regular de altura h.
- ¿Que tan rápido debe de crecer f?

T es un árbol d-regular de altura h si todos los vértices a distancia menor que h de la raíz tienen grado d.



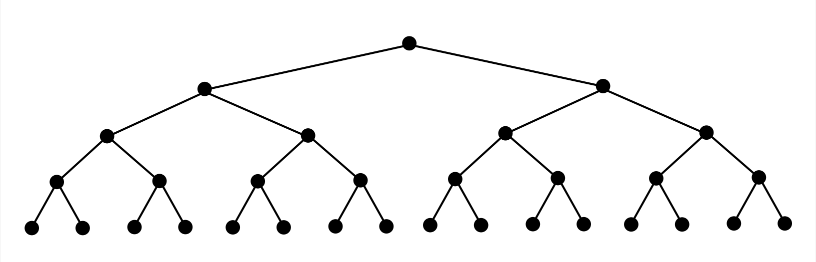
¿Cuándo hay caminos k-accesibles?

- h vs d.

Sean:

- $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$
- $T_h(f)$ al árbol $f(h)$-regular de altura h.
- ¿Que tan rápido debe de crecer f?

T es un árbol d-regular de altura h si todos los vértices a distancia menor que h de la raíz tienen grado d.



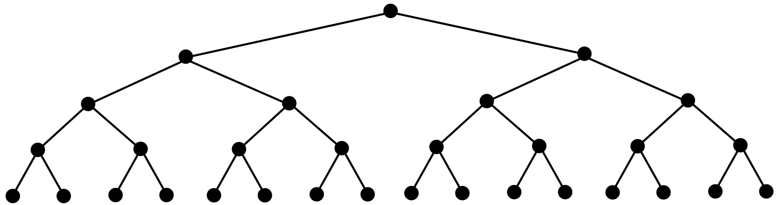
¿Cuándo hay caminos k-accesibles?

- h vs d.

Sean:

- $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$
- $T_h(f)$ al árbol $f(h)$-regular de altura h.
- ¿Que tan rápido debe de crecer f?

T es un árbol d-regular de altura h si todos los vértices a distancia menor que h de la raíz tienen grado d.

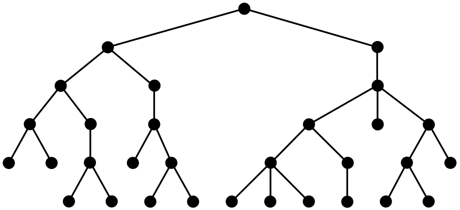


¿Cuándo hay caminos k-accesibles?

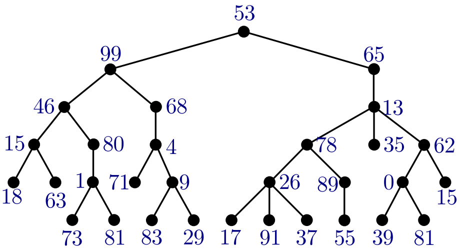
- h vs d.

Sean:

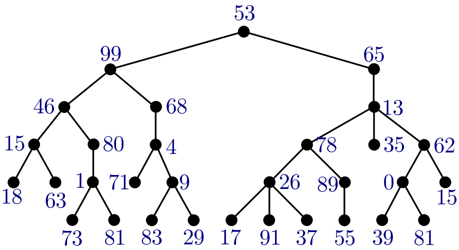
- $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$
- $T_h(f)$ al árbol $f(h)$-regular de altura h.
- ¿Que tan rápido debe de crecer f?



Sea T un árbol enraizado cuyos vértices han sido etiquetados con variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Dado v en T su etiqueta es denotada por $w(v)$.



Sea T un árbol enraizado cuyos vértices han sido etiquetados con variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Dado v en T su etiqueta es denotada por $w(v)$.



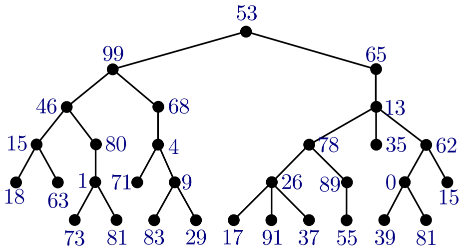
Sea T un árbol enraizado cuyos vértices han sido etiquetados con variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Dado v en T su etiqueta es denotada por $w(v)$.

Sea $P = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_h$ un camino desde la raíz hasta una hoja.
P es k-accesible si existe una subsecuencia

$$S := v_{r(0)}, v_{r(1)}, v_{r(2)}, \ldots, v_{r(t)}$$

de los vértices de P tal que:

- $v_0 = v_{r(0)}$ y $v_h = v_{r(t)}$.



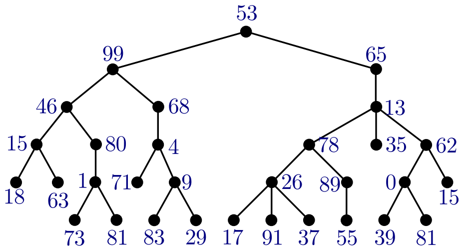
Sea T un árbol enraizado cuyos vértices han sido etiquetados con variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Dado v en T su etiqueta es denotada por $w(v)$.

Sea $P = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_h$ un camino desde la raíz hasta una hoja.
P es k-accesible si existe una subsecuencia

$$S := v_{r(0)}, v_{r(1)}, v_{r(2)}, \ldots, v_{r(t)}$$

de los vértices de P tal que:

- $v_0 = v_{r(0)}$ y $v_h = v_{r(t)}$.
- $w(v_{r(0)}) < w(v_{r(1)}) < w(v_{r(2)}) < \cdots < w(v_{r(t)})$.



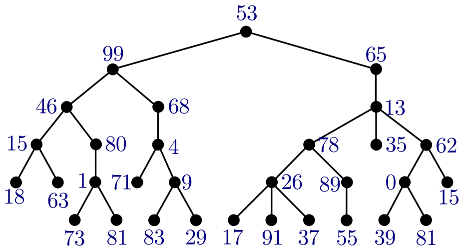
Sea T un árbol enraizado cuyos vértices han sido etiquetados con variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Dado v en T su etiqueta es denotada por $w(v)$.

Sea $P = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_h$ un camino desde la raíz hasta una hoja.
P es k-accesible si existe una subsecuencia

$$S := v_{r(0)}, v_{r(1)}, v_{r(2)}, \ldots, v_{r(t)}$$

de los vértices de P tal que:

- $v_0 = v_{r(0)}$ y $v_h = v_{r(t)}$.
- $w(v_{r(0)}) < w(v_{r(1)}) < w(v_{r(2)}) < \cdots < w(v_{r(t)})$.
- cada k vértices consecutivos de P hay por lo menos un vértice de S.

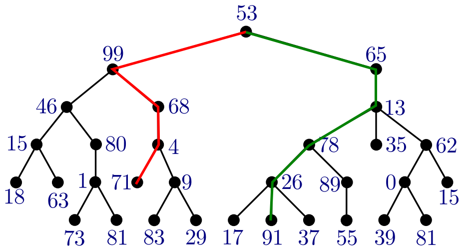


Sea $P = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_h$ un camino desde la raíz hasta una hoja.
P es *k-accesible* si existe una subsecuencia

$$S := v_{r(0)}, v_{r(1)}, v_{r(2)}, \ldots, v_{r(t)}$$

de los vértices de P tal que:

- $v_0 = v_{r(0)}$ y $v_h = v_{r(t)}$.
- $w(v_{r(0)}) < w(v_{r(1)}) < w(v_{r(2)}) < \cdots < w(v_{r(t)})$.
- cada k vértices consecutivos de P hay por lo menos un vértice de S.



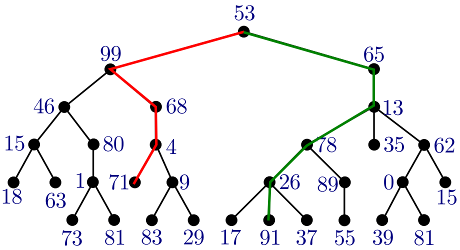
Sea $P = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_h$ un camino desde la raíz hasta una hoja.

P es *k*-accesible si existe una subsecuencia

$$S := v_{r(0)}, v_{r(1)}, v_{r(2)}, \ldots, v_{r(t)}$$

de los vértices de P tal que:

- $v_0 = v_{r(0)}$ y $v_h = v_{r(t)}$.
- $w(v_{r(0)}) < w(v_{r(1)}) < w(v_{r(2)}) < \cdots < w(v_{r(t)})$.
- cada k vértices consecutivos de P hay por lo menos un vértice de S.



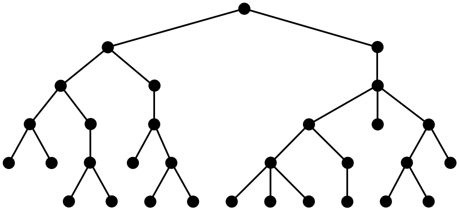
Caminos 2-accesibles: 53,99,68,4,71 y 53,65,13,78,26,91.

Sea $P = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_h$ un camino desde la raíz hasta una hoja.
P es *k-accesible* si existe una subsecuencia

$$S := v_{r(0)}, v_{r(1)}, v_{r(2)}, \dots, v_{r(t)}$$

de los vértices de P tal que:

- $v_0 = v_{r(0)}$ y $v_h = v_{r(t)}$.
- $w(v_{r(0)}) < w(v_{r(1)}) < w(v_{r(2)}) < \cdots < w(v_{r(t)})$.
- cada k vértices consecutivos de P hay por lo menos un vértice de S.

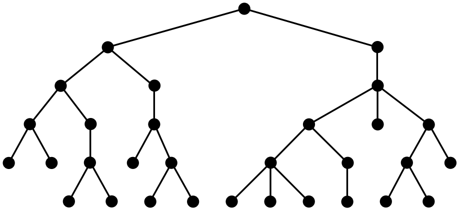


Sea $P = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_h$ un camino desde la raíz hasta una hoja.
P es *k-accesible* si existe una subsecuencia

$$S := v_{r(0)}, v_{r(1)}, v_{r(2)}, \ldots, v_{r(t)}$$

de los vértices de P tal que:

- $v_0 = v_{r(0)}$ y $v_h = v_{r(t)}$.
- $w(v_{r(0)}) < w(v_{r(1)}) < w(v_{r(2)}) < \cdots < w(v_{r(t)})$.
- cada k vértices consecutivos de P hay por lo menos un vértice de S.



Sea $P = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_h$ un camino desde la raíz hasta una hoja.

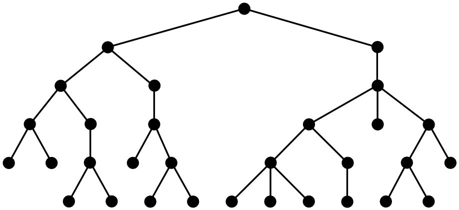
P es k-accesible si existe una subsecuencia

$$S := v_{r(0)}, v_{r(1)}, v_{r(2)}, \ldots, v_{r(t)}$$

de los vértices de P tal que:

- $v_0 = v_{r(0)}$ y $v_h = v_{r(t)}$.
- $w(v_{r(0)}) < w(v_{r(1)}) < w(v_{r(2)}) < \cdots < w(v_{r(t)})$.
- cada k vértices consecutivos de P hay por lo menos un vértice de S.

Teorema:



Sea $P = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_h$ un camino desde la raíz hasta una hoja.
P es k-accesible si existe una subsecuencia

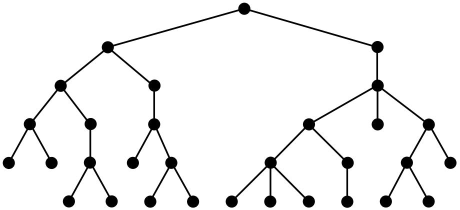
$$S := v_{r(0)}, v_{r(1)}, v_{r(2)}, \ldots, v_{r(t)}$$

de los vértices de P tal que:

- $v_0 = v_{r(0)}$ y $v_h = v_{r(t)}$.
- $w(v_{r(0)}) < w(v_{r(1)}) < w(v_{r(2)}) < \cdots < w(v_{r(t)})$.
- cada k vértices consecutivos de P hay por lo menos un vértice de S.

Teorema:

- Si $f(h) \leq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ para algún $c < 1$, es poco probable tener caminos k-accesibles (h grande).



Sea $P = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_h$ un camino desde la raíz hasta una hoja.
P es k-accesible si existe una subsecuencia

$$S := v_{r(0)}, v_{r(1)}, v_{r(2)}, \ldots, v_{r(t)}$$

de los vértices de P tal que:

- $v_0 = v_{r(0)}$ y $v_h = v_{r(t)}$.
- $w(v_{r(0)}) < w(v_{r(1)}) < w(v_{r(2)}) < \cdots < w(v_{r(t)})$.
- cada k vértices consecutivos de P hay por lo menos un vértice de S.

Teorema:

- Si $f(h) \leq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ para algún $c < 1$, es poco probable tener caminos k-accesibles (h grande).
- Si $f(h) \geq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ para algún $c > 1$, es muy probable tener caminos k-accesibles (h grande).

- $\theta_k(T)$:= Probabilidad de tener un camino k-accesible en T.
- $\mathcal{T}_f$:= La secuencia de árboles $\{T_h(f)\}_{h\in\mathbb{Z}_+}$.
- $\theta_k(\mathcal{T}_f) := \lim_{h\to\infty} \theta_k(T_h(f))$

Teorema:

- Si $f(h) \leq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ para algún $c < 1$, es poco probable tener caminos k-accesibles (h grande).
- Si $f(h) \geq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ para algún $c > 1$, es muy probable tener caminos k-accesibles (h grande).

Sea $P = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_h$ un camino desde la raíz hasta una hoja.
P es k-accesible si existe una subsecuencia

$$S := v_{r(0)}, v_{r(1)}, v_{r(2)}, \ldots, v_{r(t)}$$

de los vértices de P tal que:

- $v_0 = v_{r(0)}$ y $v_h = v_{r(t)}$.
- $w(v_{r(0)}) < w(v_{r(1)}) < w(v_{r(2)}) < \cdots < w(v_{r(t)})$.
- cada k vértices consecutivos de P hay por lo menos un vértice de S.

- $\theta_k(T)$:= Probabilidad de tener un camino k-accesible en T.
- $\mathcal{T}_f$:= La secuencia de árboles $\{T_h(f)\}_{h\in\mathbb{Z}_+}$.
- $\theta_k(\mathcal{T}_f) := \lim_{h\to\infty} \theta_k(T_h(f))$

Teorema:

- Si $f(h) \leq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ para algún $c < 1$, entonces $\theta_k(\mathcal{T}_f) = 0$.
- Si $f(h) \geq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ para algún $c > 1$, entonces $\theta_k(\mathcal{T}_f) = 1$.

Sea $P = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_h$ un camino desde la raíz hasta una hoja.
P es k-accesible si existe una subsecuencia

$$S := v_{r(0)}, v_{r(1)}, v_{r(2)}, \ldots, v_{r(t)}$$

de los vértices de P tal que:

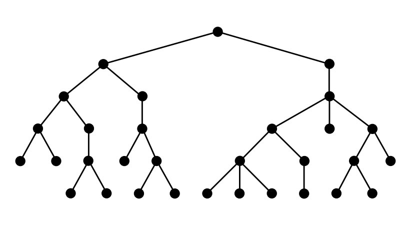
- $v_0 = v_{r(0)}$ y $v_h = v_{r(t)}$.
- $w(v_{r(0)}) < w(v_{r(1)}) < w(v_{r(2)}) < \cdots < w(v_{r(t)})$.
- cada k vértices consecutivos de P hay por lo menos un vértice de S.

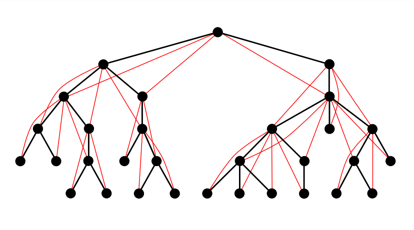
Sea G un grafo dirigido. La k-clausura transitiva de G, G^k, es el grafo obtenido de G agregando la arista dirigida de u a v cuando:

- La arista dirigida de u a v no está en G.
- Existe un camino dirigido de u a v de longitud a lo más k.

Sea G un grafo dirigido. La k-clausura transitiva de G, G^k, es el grafo obtenido de G agregando la arista dirigida de u a v cuando:

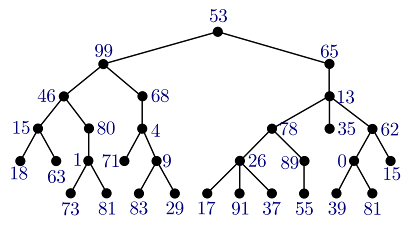
- La arista dirigida de u a v no está en G.
- Existe un camino dirigido de u a v de longitud a lo más k.

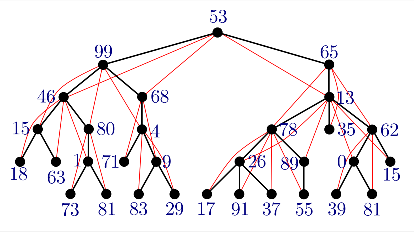




Sea G un grafo dirigido. La k-clausura transitiva de G, G^k, es el grafo obtenido de G agregando la arista dirigida de u a v cuando:

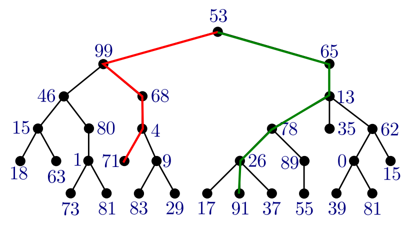
- La arista dirigida de u a v no está en G.
- Existe un camino dirigido de u a v de longitud a lo más k.

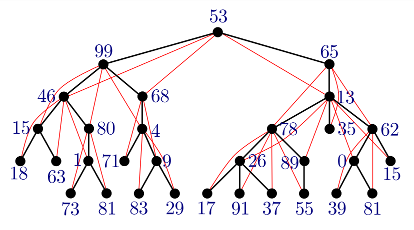




Sea G un grafo dirigido. La k-clausura transitiva de G, G^k, es el grafo obtenido de G agregando la arista dirigida de u a v cuando:

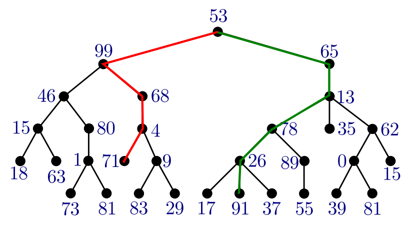
- La arista dirigida de u a v no está en G.
- Existe un camino dirigido de u a v de longitud a lo más k.

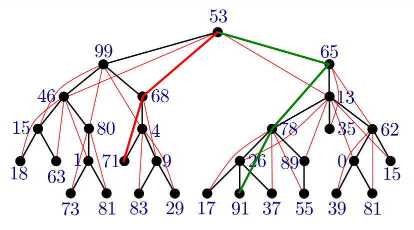




Sea G un grafo dirigido. La k-clausura transitiva de G, G^k, es el grafo obtenido de G agregando la arista dirigida de u a v cuando:

- La arista dirigida de u a v no está en G.
- Existe un camino dirigido de u a v de longitud a lo más k.

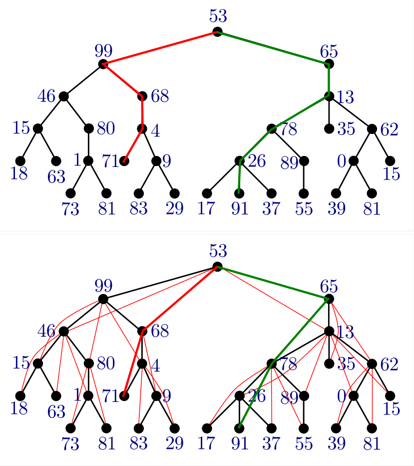




Sea G un grafo dirigido. La k-clausura transitiva de G, G^k, es el grafo obtenido de G agregando la arista dirigida de u a v cuando:

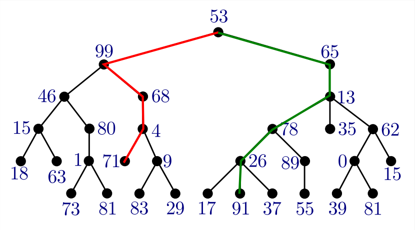
- La arista dirigida de u a v no está en G.
- Existe un camino dirigido de u a v de longitud a lo más k.

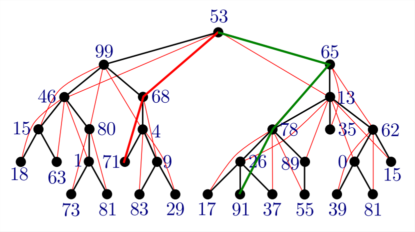
Caminos 1-accesibles en T^k:
Caminos monótonos de la fuente a algún sumidero.



Sea G un grafo dirigido. La k-clausura transitiva de G, G^k, es el grafo obtenido de G agregando la arista dirigida de u a v cuando:

- La arista dirigida de u a v no está en G.
- Existe un camino dirigido de u a v de longitud a lo más k.





Caminos 1-accesibles en T^k:

Caminos monótonos de la fuente a algún sumidero.

- Lema: $\theta_1(T^k) = \theta_k(T)$.

Teorema:

$$\theta_k(\mathcal{T}_f) = \begin{cases} 0, & \text{if } f(h) \leq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor \text{ for some } c < 1, \\ 1, & \text{if } f(h) \geq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor \text{ for some } c > 1. \end{cases}$$

Demostraremos que:

$$\theta_1(\mathcal{T}_f^k) = \begin{cases} 0, & \text{if } f(h) \leq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor \text{ for some } c < 1, \\ 1, & \text{if } f(h) \geq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor \text{ for some } c > 1. \end{cases}$$

Usando:

Teorema[Nowak y Krug]:

Si $f(h) \leq \lfloor \alpha h \rfloor$ para algún $\alpha \leq e^{-1}$ entonces $\theta_1(\mathcal{T}_f) = 0$.

Teorema[Roberts y Zhao]:

Si $f(h) \geq \lfloor \alpha h \rfloor$ para algún $\alpha > e^{-1}$ entonces $\theta_1(\mathcal{T}_f) = 1$.

Caso 1: Supongamos $f(h) \geq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ donde $c > 1$. Veamos que

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h^k(f)) = 1.$$

Caso 1: Supongamos $f(h) \geq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ donde $c > 1$. Veamos que

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h^k(f)) = 1.$$

Sea $c' = c^k - \epsilon$ con $\epsilon > 0$ y $c' > 1$. Sea $g(h) = \left\lfloor c' h/e \right\rfloor$.

Caso 1: Supongamos $f(h) \geq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ donde $c > 1$. Veamos que

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h^k(f)) = 1.$$

Sea $c' = c^k - \epsilon$ con $\epsilon > 0$ y $c' > 1$. Sea $g(h) = \left\lfloor c' h/e \right\rfloor$. Por teorema de Roberts y Zhao

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g)) = \lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h(g)) = 1$$

Caso 1: Supongamos $f(h) \geq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ donde $c > 1$. Veamos que

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h^k(f)) = 1.$$

Sea $c' = c^k - \epsilon$ con $\epsilon > 0$ y $c' > 1$. Sea $g(h) = \left\lfloor c' h/e \right\rfloor$. Por teorema de Roberts y Zhao

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g)) = \lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h(g)) = 1$$

Es suficiente con mostrar que

$$\theta_1(T_h^k(f)) \geq \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g))$$

Caso 1: Supongamos $f(h) \geq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ donde $c > 1$. Veamos que

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h^k(f)) = 1.$$

Sea $c' = c^k - \epsilon$ con $\epsilon > 0$ y $c' > 1$. Sea $g(h) = \left\lfloor c' h/e \right\rfloor$. Por teorema de Roberts y Zhao

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g)) = \lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h(g)) = 1$$

Es suficiente con mostrar que

$$\theta_1(T_h^k(f)) \geq \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g))$$

Sea G el subgrafo de $T_h^k(f)$ removiendo los vértices cuya distancia a la raíz que no es múltiplo de k

Caso 1: Supongamos $f(h) \geq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ donde $c > 1$. Veamos que

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h^k(f)) = 1.$$

Sea $c' = c^k - \epsilon$ con $\epsilon > 0$ y $c' > 1$. Sea $g(h) = \left\lfloor c' h/e \right\rfloor$. Por teorema de Roberts y Zhao

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g)) = \lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h(g)) = 1$$

Es suficiente con mostrar que

$$\theta_1(T_h^k(f)) \geq \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g))$$

Sea G el subgrafo de $T_h^k(f)$ removiendo los vértices cuya distancia a la raíz que no es múltiplo de k

G tiene altura $\lfloor h/k \rfloor$.

Caso 1: Supongamos $f(h) \geq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ donde $c > 1$. Veamos que

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h^k(f)) = 1.$$

Sea $c' = c^k - \epsilon$ con $\epsilon > 0$ y $c' > 1$. Sea $g(h) = \left\lfloor c' h/e \right\rfloor$. Por teorema de Roberts y Zhao

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g)) = \lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h(g)) = 1$$

Es suficiente con mostrar que

$$\theta_1(T_h^k(f)) \geq \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g))$$

Sea G el subgrafo de $T_h^k(f)$ removiendo los vértices cuya distancia a la raíz que no es múltiplo de k

G tiene altura $\lfloor h/k \rfloor$.

$$\deg_G(v) \geq \left\lfloor \sqrt[k]{\frac{h}{ek}}\, c \right\rfloor^k \geq g(\lfloor h/k \rfloor).$$

Teorema:

$$\theta_k(\mathcal{T}_f) = \begin{cases} 0, & \text{if } f(h) \leq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor \text{ for some } c < 1, \\ 1, & \text{if } f(h) \geq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor \text{ for some } c > 1. \end{cases}$$

Demostraremos que:

$$\theta_1(\mathcal{T}_f^k) = \begin{cases} 0, & \text{if } f(h) \leq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor \text{ for some } c < 1, \\ 1, & \text{if } f(h) \geq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor \text{ for some } c > 1. \end{cases}$$

Usando:
Teorema[Nowak y Krug]:
Si $f(h) \leq \lfloor \alpha h \rfloor$ para algún $\alpha \leq e^{-1}$ entonces $\theta_1(\mathcal{T}_f) = 0$.

Teorema[Roberts y Zhao]:
Si $f(h) \geq \lfloor \alpha h \rfloor$ para algún $\alpha > e^{-1}$ entonces $\theta_1(\mathcal{T}_f) = 1$.

Caso 2: Supongamos $f(h) \leq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ donde $c < 1$. Veamos que

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h^k(f)) = 0.$$

Caso 2: Supongamos $f(h) \leq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ donde $c < 1$. Veamos que

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h^k(f)) = 0.$$

Sea $c' = c^k + \epsilon$ con $\epsilon > 0$ y $c' < 1$. Sea $g(h) = \left\lfloor c' h/e \right\rfloor$.

Caso 2: Supongamos $f(h) \leq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ donde $c < 1$. Veamos que

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h^k(f)) = 0.$$

Sea $c' = c^k + \epsilon$ con $\epsilon > 0$ y $c' < 1$. Sea $g(h) = \left\lfloor c' h/e \right\rfloor$. Por teorema de Nowak y Krug

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g)) = \lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h(g)) = 0$$

Caso 2: Supongamos $f(h) \leq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ donde $c < 1$. Veamos que

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h^k(f)) = 0.$$

Sea $c' = c^k + \epsilon$ con $\epsilon > 0$ y $c' < 1$. Sea $g(h) = \left\lfloor c' h/e \right\rfloor$. Por teorema de Nowak y Krug

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g)) = \lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h(g)) = 0$$

Es suficiente con mostrar que

$$\theta_1(T_h^k(f)) \leq \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g))$$

Caso 2: Supongamos $f(h) \leq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ donde $c < 1$. Veamos que

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h^k(f)) = 0.$$

$$T^k := T_h^k(f)$$

Sea $c' = c^k + \epsilon$ con $\epsilon > 0$ y $c' < 1$. Sea $g(h) = \left\lfloor c' h/e \right\rfloor$. Por teorema de Nowak y Krug

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g)) = \lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h(g)) = 0$$

Es suficiente con mostrar que

$$\theta_1(T_h^k(f)) \leq \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g))$$

Caso 2: Supongamos $f(h) \leq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ donde $c < 1$. Veamos que

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h^k(f)) = 0.$$

$$T^k := T_h^k(f)$$

Sea $c' = c^k + \epsilon$ con $\epsilon > 0$ y $c' < 1$. Sea $g(h) = \left\lfloor c' h/e \right\rfloor$. Por teorema de Nowak y Krug

$$T' := T_{\lfloor h/k \rfloor}(g))$$

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g)) = \lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h(g)) = 0$$

Es suficiente con mostrar que

$$\theta_1(T_h^k(f)) \leq \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g))$$

Caso 2: Supongamos $f(h) \leq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor$ donde $c < 1$. Veamos que

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h^k(f)) = 0.$$

$$T^k := T_h^k(f)$$

Sea $c' = c^k + \epsilon$ con $\epsilon > 0$ y $c' < 1$. Sea $g(h) = \left\lfloor c' h/e \right\rfloor$. Por teorema de Nowak y Krug

$$T' := T_{\lfloor h/k \rfloor}(g))$$

$$\lim_{h\to\infty} \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g)) = \lim_{h\to\infty} \theta_1(T_h(g)) = 0$$

$$\theta_1(T^k) \leq \theta_1(H^k) \leq \theta_1(T')$$

Es suficiente con mostrar que

$$\theta_1(T_h^k(f)) \leq \theta_1(T_{\lfloor h/k \rfloor}(g))$$

$$\mathcal{A}_l = \{s \subset \{1, 2, \ldots, l-1\} : s \text{ no contiene } k \text{ enteros consecutivos}\}$$

$$\mathcal{A}_l = \{s \subset \{1, 2, \ldots, l-1\} : s \text{ no contiene } k \text{ enteros consecutivos}\}$$

Sea $H^k := (V, E)$ donde V y E son definidos como sigue.

$$\mathcal{A}_l = \{s \subset \{1, 2, \ldots, l{-}1\} : s \text{ no contiene } k \text{ enteros consecutivos}\}$$

Sea $H^k := (V, E)$ donde V y E son definidos como sigue. Dado v en T a distancia l de la raíz, denotamos por V_v al conjunto $V_v := \{v^s : s \in \mathcal{A}_l\}$.

$V := \{v^s : v^s \in V_v$ para algún v en $T\}$.

$$\mathcal{A}_l = \{s \subset \{1, 2, \ldots, l-1\} : s \text{ no contiene } k \text{ enteros consecutivos}\}$$

Sea $H^k := (V, E)$ donde V y E son definidos como sigue. Dado v en T a distancia l de la raíz, denotamos por V_v al conjunto $V_v := \{v^s : s \in \mathcal{A}_l\}$.

$V := \{v^s : v^s \in V_v$ para algún v en $T\}$.

Las aristas de E son definidas recursivamente como se sigue. Sean v en T a distancia l de la raíz y $s \in \mathcal{A}_l$. Diremos que $w^{s'}$ es un hijo de v^s si:

$$\mathcal{A}_l = \{s \subset \{1,2,\ldots,l-1\} : s \text{ no contiene } k \text{ enteros consecutivos}\}$$

Sea $H^k := (V,E)$ donde V y E son definidos como sigue. Dado v en T a distancia l de la raíz, denotamos por V_v al conjunto $V_v := \{v^s : s \in \mathcal{A}_l\}$.

$V := \{v^s : v^s \in V_v \text{ para algún } v \text{ en } T\}$.

Las aristas de E son definidas recursivamente como se sigue. Sean v en T a distancia l de la raíz y $s \in \mathcal{A}_l$. Diremos que $w^{s'}$ es un hijo de v^s si:

- w es hijo de v en T y $s = s'$, o
- w es un descendiente de v a distancia $1 < j \leq k$ y $s' = s \cup \{l+1, l+2, \ldots l+j\}$.

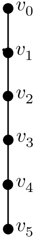
$$\mathcal{A}_l = \{s \subset \{1, 2, \ldots, l-1\} : s \text{ no contiene } k \text{ enteros consecutivos}\}$$

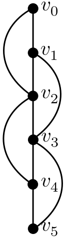
Sea $H^k := (V, E)$ donde V y E son definidos como sigue. Dado v en T a distancia l de la raíz, denotamos por V_v al conjunto $V_v := \{v^s : s \in \mathcal{A}_l\}$.

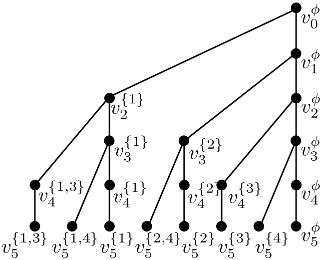
$V := \{v^s : v^s \in V_v \text{ para algún } v \text{ en } T\}$.

Las aristas de E son definidas recursivamente como se sigue. Sean v en T a distancia l de la raíz y $s \in \mathcal{A}_l$. Diremos que $w^{s'}$ es un hijo de v^s si:

- w es hijo de v en T y $s = s'$, o
- w es un descendiente de v a distancia $1 < j \leq k$ y $s' = s \cup \{l+1, l+2, \ldots l+j\}$.

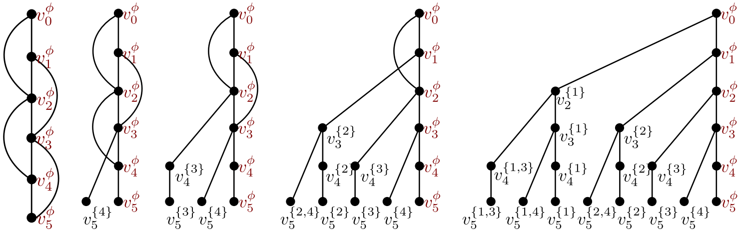






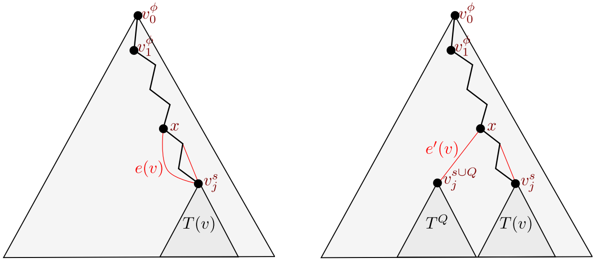
Lema: $\theta_1(H^k) \geq \theta_1(T^k)$

Lema: $\theta_1(H^k) \geq \theta_1(T^k)$



Para esto demostramos que

$$\theta_1(H_{i+1}) \geq \theta_1(H_i)$$



$$\mathbf{P}\left(\Gamma_1\right) = \mathbf{P}\left(\Gamma_2\right);$$
$$\mathbf{P}\left([0 \rightsquigarrow H_{i+1} \setminus e'(v)]\right) = \mathbf{P}\left([0 \rightsquigarrow H_i \setminus e(v)]\right);$$
$$\mathbf{P}\left([0 \rightsquigarrow H_i \setminus e(v)] \middle| \Gamma_1\right) \geq \mathbf{P}\left([0 \rightsquigarrow H_{i+1} \setminus e'(v)] \middle| \Gamma_2\right)$$

$$\begin{aligned}
\theta_1(H_{i+1}) - \theta_1(H_i) &= \mathbf{P}\left([0 \rightsquigarrow H_{i+1}]\right) - \mathbf{P}\left([0 \rightsquigarrow H_i]\right) \\
&= \mathbf{P}\left([0 \rightsquigarrow H_{i+1}] \cap [0 \rightsquigarrow H_{i+1} \setminus e'(v)]\right) - \mathbf{P}\left([0 \rightsquigarrow H_i] \cap [0 \rightsquigarrow H_i \setminus e(v)]\right) \\
&+ \mathbf{P}\left([0 \rightsquigarrow H_{i+1}] \cap [0 \not\rightsquigarrow H_{i+1} \setminus e'(v)]\right) - \mathbf{P}\left([0 \rightsquigarrow H_i] \cap [0 \not\rightsquigarrow H_i \setminus e(v)]\right) \\
&= \mathbf{P}\left([0 \rightsquigarrow H_{i+1} \setminus e'(v)]\right) - \mathbf{P}\left([0 \rightsquigarrow H_i \setminus e(v)]\right) \\
&+ \mathbf{P}\left(\Gamma_2 \cap [0 \not\rightsquigarrow H_{i+1} \setminus e'(v)]\right) - \mathbf{P}\left(\Gamma_1 \cap [0 \not\rightsquigarrow H_i \setminus e(v)]\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\Gamma_2\right) - \mathbf{P}\left(\Gamma_2 \cap [0 \rightsquigarrow H_{i+1} \setminus e'(v)]\right) \\
&- \mathbf{P}\left(\Gamma_1\right) + \mathbf{P}\left(\Gamma_1 \cap [0 \rightsquigarrow H_i \setminus e(v)]\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\Gamma_1\right)\left[\mathbf{P}\left([0 \rightsquigarrow H_i \setminus e(v)] \middle| \Gamma_1\right) - \mathbf{P}\left([0 \rightsquigarrow H_{i+1} \setminus e'(v)] \middle| \Gamma_2\right)\right] \geq 0
\end{aligned}$$

Lema: $\theta_1(T') \geq \theta_1(H^k)$

Lema: $\theta_1(T') \geq \theta_1(H^k)$

Sea $H' \subset H^k$ el subgrafo inducido por los vértices a distancia a lo más h/k de la raíz.

Lema: $\theta_1(T') \geq \theta_1(H^k)$

Sea $H' \subset H^k$ el subgrafo inducido por los vértices a distancia a lo más h/k de la raíz. Note que $\theta_1(H') \geq \theta_1(H^k)$.

Lema: $\theta_1(T') \geq \theta_1(H^k)$

Sea $H' \subset H^k$ el subgrafo inducido por los vértices a distancia a lo más h/k de la raíz. Note que $\theta_1(H') \geq \theta_1(H^k)$.

Como $\deg_{H'}(v) = \sum_{j=1}^{k} \lfloor f(h) \rfloor^j = \sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ke)}c \right\rfloor^j \leq g(\lfloor h/k \rfloor)$, entonces $H' \subset T'$ y

$$\theta_1(T') \geq \theta_1(H').$$

Lema: $\theta_1(T') \geq \theta_1(H^k)$

Sea $H' \subset H^k$ el subgrafo inducido por los vértices a distancia a lo más h/k de la raíz. Note que $\theta_1(H') \geq \theta_1(H^k)$.

Como $\deg_{H'}(v) = \sum_{j=1}^{k} \lfloor f(h) \rfloor^j = \sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ke)}c \right\rfloor^j \leq g(\lfloor h/k \rfloor)$, entonces $H' \subset T'$ y

$$\theta_1(T') \geq \theta_1(H').$$

$$\theta_1(T^k) \leq \theta_1(H^k) \leq \theta_1(T')$$

Lema: $\theta_1(T') \geq \theta_1(H^k)$

Sea $H' \subset H^k$ el subgrafo inducido por los vértices a distancia a lo más h/k de la raíz. Note que $\theta_1(H') \geq \theta_1(H^k)$.

Como $\deg_{H'}(v) = \sum_{j=1}^{k} \lfloor f(h) \rfloor^j = \sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ke)}c \right\rfloor^j \leq g(\lfloor h/k \rfloor)$, entonces $H' \subset T'$ y

$$\theta_1(T') \geq \theta_1(H').$$

$$\theta_1(T^k) \leq \theta_1(H^k) \leq \theta_1(T')$$

Teorema:

$$\theta_k(\mathcal{T}_f) = \begin{cases} 0, & \text{if } f(h) \leq \left\lfloor \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rfloor \text{ for some } c < 1, \\ 1, & \text{if } f(h) \geq \left\lceil \sqrt[k]{h/(ek)}c \right\rceil \text{ for some } c > 1. \end{cases}$$

BIBLIOGRAFÍA

- Accessible Percolation with Crossing Valleys on n-ary Trees. Frank Duque, Alejandro Roldán-Correa, Leon A Valencia. ArXiv:1712.04548
- Recent advances in the theory and application of fitness landscapes. Richter Hendrik y Andries Engelbrecht.

Gracias por su atención.