The background of the slide is a photograph of the Bank of Mexico building. It features large, classical stone columns and a balcony with a decorative golden wreath. At the bottom, a stone plaque with the words 'BANCO DE MEXICO' is visible, flanked by two seated female statues.

Aplicaciones de los ideales críticos

Banco de México

Carlos A. Alfaro

Coautores

Jephian C.-H. Lin
University of Victoria
Victoria, Canadá

Adrián Vázquez-Ávila
Universidad Aeronáutica en Querétaro
Queretaro, México

Carlos E. Valencia
CINVESTAV-IPN
CDMX, México

- 1 Ideales críticos de gráficas
- 2 Grupo de pilas de arena
- 3 El grupo de Smith
- 4 Rango mínimo
- 5 Número forzando a cero
- 6 Ideales críticos, rango mínimo & forzando a cero

Ideales críticos de gráficas

Definición

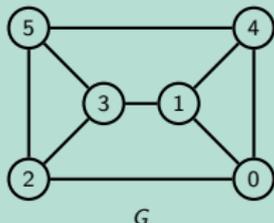
Sea G una gráfica con n vertices, y $X_G = \{x_u : u \in V(G)\}$ un conjunto de variables. La **matriz Laplaciana generalizada** $L(G, X_G)$ de G es la matriz cuya entrada (u, v) es x_u , si $u = v$; y el negativo del número m_{uv} de aristas entre los vertices u y v , si $u \neq v$.

Ideales críticos de gráficas

Definición

Sea G una gráfica con n vertices, y $X_G = \{x_u : u \in V(G)\}$ un conjunto de variables. La **matriz Laplaciana generalizada** $L(G, X_G)$ de G es la matriz cuya entrada (u, v) es x_u , si $u = v$; y el negativo del número m_{uv} de aristas entre los vertices u y v , si $u \neq v$.

Ejemplo



$$\begin{bmatrix} x_0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & x_1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & x_2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & x_3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & x_4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & x_5 \end{bmatrix}$$

Ideales críticos de gráficas

Definición

Denotemos por $\mathcal{R}[X_G]$ al anillo de polinomios sobre un anillo conmutativo \mathcal{R} en las variables X_G .

Ideales críticos de gráficas

Definición

Denotemos por $\mathcal{R}[X_G]$ al anillo de polinomios sobre un anillo conmutativo \mathcal{R} en las variables X_G .

Sea $\text{minors}_k(L(G, X_G))$ el conjunto de determinantes de las submatrices de tamaño $k \times k$ de $L(G, X_G)$.

Ideales críticos de gráficas

Definición

Denotemos por $\mathcal{R}[X_G]$ al anillo de polinomios sobre un anillo conmutativo \mathcal{R} en las variables X_G .

Sea $\text{minors}_k(L(G, X_G))$ el conjunto de determinantes de las submatrices de tamaño $k \times k$ de $L(G, X_G)$.

Para $1 \leq k \leq n$, el k -ésimo ideal crítico $I_k^{\mathcal{R}}(G, X_G)$ es el ideal $\langle \text{minors}_k(L(G, X_G)) \rangle \subseteq \mathcal{R}[X_G]$.

Ideales críticos de gráficas

Definición

Denotemos por $\mathcal{R}[X_G]$ al anillo de polinomios sobre un anillo conmutativo \mathcal{R} en las variables X_G .

Sea $\text{minors}_k(L(G, X_G))$ el conjunto de determinantes de las submatrices de tamaño $k \times k$ de $L(G, X_G)$.

Para $1 \leq k \leq n$, el k -ésimo ideal crítico $I_k^{\mathcal{R}}(G, X_G)$ es el ideal $\langle \text{minors}_k(L(G, X_G)) \rangle \subseteq \mathcal{R}[X_G]$.

Un ideal es **trivial** si es igual a $\langle 1 \rangle (= \mathcal{R}[X_G])$.

Ideales críticos de gráficas

Definición

Denotemos por $\mathcal{R}[X_G]$ al anillo de polinomios sobre un anillo conmutativo \mathcal{R} en las variables X_G .

Sea $\text{minors}_k(L(G, X_G))$ el conjunto de determinantes de las submatrices de tamaño $k \times k$ de $L(G, X_G)$.

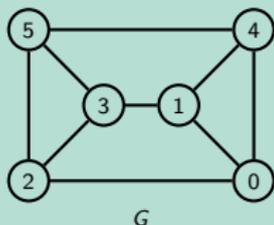
Para $1 \leq k \leq n$, el k -ésimo ideal crítico $I_k^{\mathcal{R}}(G, X_G)$ es el ideal $\langle \text{minors}_k(L(G, X_G)) \rangle \subseteq \mathcal{R}[X_G]$.

Un ideal es **trivial** si es igual a $\langle 1 \rangle (= \mathcal{R}[X_G])$.

El **corango algebraico** $\gamma_{\mathcal{R}}(G)$ de G es el máximo entero k tal que $I_k^{\mathcal{R}}(G, X_G)$ es trivial.

Ideales críticos de gráficas

Ejemplo



$$\begin{bmatrix} x_0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & x_1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & x_2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & x_3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & x_4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & x_5 \end{bmatrix}$$

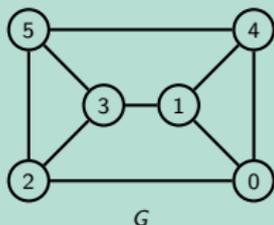
En este caso, $\gamma_{\mathbb{R}}(G) = \gamma_{\mathbb{Z}}(G) = 3$.

Y el ideal $I_4^{\mathbb{R}}(G, X_G) = I_4^{\mathbb{Z}}(G, X_G)$ es no trivial, así que damos su base de Gröbner para dar una descripción sencilla:

$$\langle x_0 + x_5 - 1, x_1 + x_5 - 1, x_2 - x_5, x_3 - x_5, x_4 + x_5 - 1, x_5^2 - x_5 - 1 \rangle.$$

Ideales críticos de gráficas

Ejemplo



$$\begin{bmatrix} x_0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & x_1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & x_2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & x_3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & x_4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & x_5 \end{bmatrix}$$

En este caso, $\gamma_{\mathbb{R}}(G) = \gamma_{\mathbb{Z}}(G) = 3$.

Y el ideal $I_4^{\mathbb{R}}(G, X_G) = I_4^{\mathbb{Z}}(G, X_G)$ es no trivial, así que damos su base de Gröbner para dar una descripción sencilla:

$$\langle x_0 + x_5 - 1, x_1 + x_5 - 1, x_2 - x_5, x_3 - x_5, x_4 + x_5 - 1, x_5^2 - x_5 - 1 \rangle.$$

En general $I_n^{\mathbb{R}}(G, X_G) = \langle \det(L(G, X_G)) \rangle$.

Ideales críticos de gráficas

Definición

La **variedad** $V(I)$ de un ideal I es el conjunto de las raíces comunes entre los polinomios en I .

Ideales críticos de gráficas

Definición

La **variedad** $V(I)$ de un ideal I es el conjunto de las raíces comunes entre los polinomios en I .

Ejemplo

La variedad del ideal $I_4^{\mathbb{R}}(G, X_G)$

$\langle x_0 + x_5 - 1, x_1 + x_5 - 1, x_2 - x_5, x_3 - x_5, x_4 + x_5 - 1, x_5^2 - x_5 - 1 \rangle$,
tiene solo 2 raíces:

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

y

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right).$$

Ideales críticos de gráficas

En general tenemos

$$\langle 1 \rangle \supseteq I_1^{\mathcal{R}}(G, X_G) \supseteq \cdots \supseteq I_n^{\mathcal{R}}(G, X_G) \supseteq \langle 0 \rangle.$$

Ideales críticos de gráficas

En general tenemos

$$\langle 1 \rangle \supseteq I_1^{\mathcal{R}}(G, X_G) \supseteq \cdots \supseteq I_n^{\mathcal{R}}(G, X_G) \supseteq \langle 0 \rangle.$$

Por lo que

$$V(\langle 1 \rangle) \subseteq V(I_1^{\mathcal{R}}(G, X_G)) \subseteq \cdots \subseteq V(I_n^{\mathcal{R}}(G, X_G)) \subseteq V(\langle 0 \rangle).$$

Ideales críticos de gráficas

Ejemplo

Para K_3 , la gráfica completa con 3 vertices, $\gamma_{\mathbb{R}}(K_3) = 1$,

$$I_2^{\mathbb{R}}(K_3, X_{K_3}) = \langle x_0 + 1, x_1 + 1, x_2 + 1 \rangle, \text{ y}$$

$$I_3^{\mathbb{R}}(K_3, X_{K_3}) = \langle x_0 x_1 x_2 - x_0 - x_1 - x_2 - 2 \rangle. \text{ La variedad}$$

$$V(I_2^{\mathbb{R}}(K_3, X_{K_3})) = \{(-1, -1, -1)\}, \text{ y variedad } V(I_3^{\mathbb{R}}(K_3, X_{K_3})) \text{ es}$$

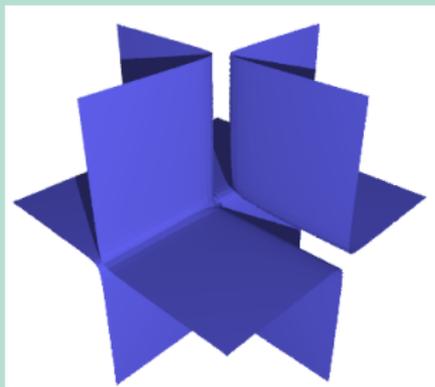


Figura: Vista parcial de la variedad de $I_3^{\mathbb{R}}(K_3, X_{K_3})$ en \mathbb{R}^3 .

Grupo de pilas de arena

Definición

El **grupo de pilas de arena** $K(G)$ de una gráfica G es la parte de torsión del cokernel $\mathbb{Z}^n / \text{Im}(L(G))$ de la matriz Laplaciana $L(G)$.

Grupo de pilas de arena

Definición

El **grupo de pilas de arena** $K(G)$ de una gráfica G es la parte de torsión del cokernel $\mathbb{Z}^n / \text{Im}(L(G))$ de la matriz Laplaciana $L(G)$.

Proposición

$K(G) \cong \mathbb{Z}/f_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/f_r\mathbb{Z}$, donde los enteros f_1, f_2, \dots, f_r se llaman **factores invariantes** de la matriz Laplacian de G y satisfacen $f_i | f_{i+1}$.

Grupo de pilas de arena

Definición

El **grupo de pilas de arena** $K(G)$ de una gráfica G es la parte de torsión del cokernel $\mathbb{Z}^n / \text{Im}(L(G))$ de la matriz Laplaciana $L(G)$.

Proposición

$K(G) \cong \mathbb{Z}/f_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/f_r\mathbb{Z}$, donde los enteros f_1, f_2, \dots, f_r se llaman **factores invariantes** de la matriz Laplacian de G y satisfacen $f_i | f_{i+1}$.

Proposición

$f_i = \Delta_i(L(G)) / \Delta_{i-1}(L(G))$, donde $\Delta_i(L(G))$ es el M.C.D. de los menores de tamaño i de la matriz Laplacian $L(G)$.

Grupo de pilas de arena

Proposición (Corrales & Valencia, 2013)

Al evaluar el k -ésimo ideal crítico $I_i^{\mathbb{Z}}(G, X_G)$ en el vector de grados, tenemos que el ideal resultante es generado por $\Delta_i(L(G))$.

Grupo de pilas de arena

Proposición (Corrales & Valencia, 2013)

Al evaluar el k -ésimo ideal crítico $I_i^{\mathbb{Z}}(G, X_G)$ en el vector de grados, tenemos que el ideal resultante es generado por $\Delta_i(L(G))$.

Ejemplo

$$I_i^{\mathbb{Z}}(K_3, X)|_{\deg(K_3)} = \langle \Delta_i(L(K_3)) \rangle = \begin{cases} \langle 1 \rangle & \text{si } i = 1, \\ \langle 3 \rangle & \text{si } i = 2, \\ \langle 0 \rangle & \text{si } i = 3. \end{cases}$$

Entonces $K(K_3) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Grupo de pilas de arena

Proposición (Corrales & Valencia, 2013)

Al evaluar el k -ésimo ideal crítico $I_i^{\mathbb{Z}}(G, X_G)$ en el vector de grados, tenemos que el ideal resultante es generado por $\Delta_i(L(G))$.

Ejemplo

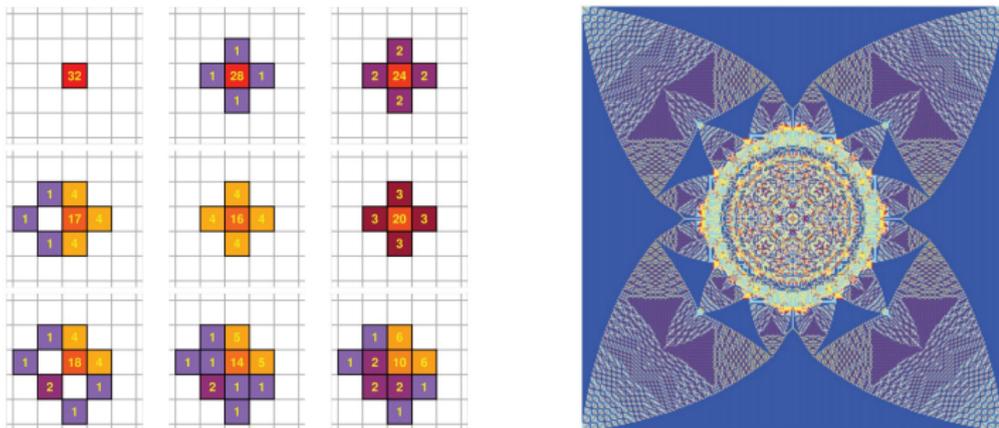
$$I_i^{\mathbb{Z}}(K_3, X)|_{\deg(K_3)} = \langle \Delta_i(L(K_3)) \rangle = \begin{cases} \langle 1 \rangle & \text{si } i = 1, \\ \langle 3 \rangle & \text{si } i = 2, \\ \langle 0 \rangle & \text{si } i = 3. \end{cases}$$

Entonces $K(K_3) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Teorema (Kirchhoff, Matrix tree theorem)

$|K(G)|$ es igual al número de árboles generadores de G .

Grupo de pilas de arena



Fuente: Notices of the AMS (2010) Vol. 57 Núm. 8.

Grupo de pilas de arena

Definición

Denotemos por $f(G)$ al número de factores invariantes de la matriz Laplaciana de G que son iguales a 1.

Grupo de pilas de arena

Definición

Denotemos por $f(G)$ al número de factores invariantes de la matriz Laplaciana de G que son iguales a 1.

Problema

¿Qué tan frecuente es que el grupo de pilas de arena sea cíclico? es decir, ¿qué tan frecuente es que $f(G)$ sea igual a $n - 2$ o $n - 1$?

Grupo de pilas de arena

Definición

Denotemos por $f(G)$ al número de factores invariantes de la matriz Laplaciana de G que son iguales a 1.

Problema

¿Qué tan frecuente es que el grupo de pilas de arena sea cíclico? es decir, ¿qué tan frecuente es que $f(G)$ sea igual a $n - 2$ o $n - 1$?

Conjetura (D. Wagner, 2001 & D. Lorenzini, 2008)

Casi siempre una gráfica tiene grupo de pilas de arena cíclico.

Grupo de pilas de arena

Teorema (M. Wood, 2017)

La probabilidad de que el grupo de pilas de arena de una gráfica aleatoria sea cíclico es asintóticamente a lo más

$$\zeta(3)^{-1}\zeta(5)^{-1}\zeta(7)^{-1}\zeta(9)^{-1}\zeta(11)^{-1}\dots \approx 0,7935212$$

donde ζ es la función zeta de Riemann.

Grupo de pilas de arena

Teorema (M. Wood, 2017)

La probabilidad de que el grupo de pilas de arena de una gráfica aleatoria sea cíclico es asintóticamente a lo más

$$\zeta(3)^{-1}\zeta(5)^{-1}\zeta(7)^{-1}\zeta(9)^{-1}\zeta(11)^{-1}\dots \approx 0,7935212$$

donde ζ es la función zeta de Riemann.

Problema

¿Cota inferior?

Grupo de pilas de arena

Por otro lado... ¿cuales son las gráficas menos cíclicas?

Grupo de pilas de arena

Por otro lado... ¿cuales son las gráficas menos cíclicas?

Problema

¿Cuales son las gráficas cuyo grupo de pilas de arena tiene pocos factores invariantes iguales a 1?

Grupo de pilas de arena

Por otro lado... ¿cuales son las gráficas menos cíclicas?

Problema

¿Cuales son las gráficas cuyo grupo de pilas de arena tiene pocos factores invariantes iguales a 1?

Dino Lorenzini notó que las gráficas conexas con un factor invariante igual a 1 eran las gráficas completas.

Grupo de pilas de arena

Por otro lado... ¿cuales son las gráficas menos cíclicas?

Problema

¿Cuales son las gráficas cuyo grupo de pilas de arena tiene pocos factores invariantes iguales a 1?

Dino Lorenzini notó que las gráficas conexas con un factor invariante igual a 1 eran las gráficas completas.

Problema (Criel Merino, 2001)

¿Cuales son las gráficas cuyo grupo de pilas de arena tiene 2 y 3 factores invariantes iguales a 1?

Grupo de pilas de arena

Observación

En general, si H es una subgráfica inducida de G , entonces $K(H) \triangleleft K(G)$.

Grupo de pilas de arena

Observación

En general, si H es una subgráfica inducida de G , entonces $K(H) \triangleleft K(G)$.

Proposición (Corrales & Valencia, 2013)

Si H es una subgráfica inducida de G , entonces, para $i \leq |H|$, $I_i^{\mathcal{R}}(H, X_H) \subseteq I_i^{\mathcal{R}}(G, X_G)$.

Grupo de pilas de arena

Observación

En general, si H es una subgráfica inducida de G , entonces $K(H) \triangleleft K(G)$.

Proposición (Corrales & Valencia, 2013)

Si H es una subgráfica inducida de G , entonces, para $i \leq |H|$, $I_i^{\mathcal{R}}(H, X_H) \subseteq I_i^{\mathcal{R}}(G, X_G)$.

Observación

$\gamma_{\mathbb{Z}}(G) \leq f(G)$.

Grupo de pilas de arena

Observación

En general, si H es una subgráfica inducida de G , entonces $K(H) \triangleleft K(G)$.

Proposición (Corrales & Valencia, 2013)

Si H es una subgráfica inducida de G , entonces, para $i \leq |H|$, $I_i^{\mathcal{R}}(H, X_H) \subseteq I_i^{\mathcal{R}}(G, X_G)$.

Observación

$\gamma_{\mathbb{Z}}(G) \leq f(G)$.

Las gráficas con $f(G) \leq i$ están contenidas en las gráficas con $\gamma_{\mathbb{Z}}(G) \leq i$.

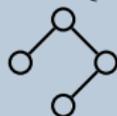
Grupo de pilas de arena

Teorema (Alfaro & Valencia, 2014)

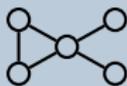
Sea G una gráfica conexa. Entonces, los siguientes equivalentes:

1 $\gamma_{\mathbb{Z}}(G) \leq 2$,

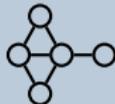
2 G es $\{P_4, \times, \text{dart}, K_{2,2,1,1}, K_5 \setminus P_3\}$ -libre,



P_4



\times



dart

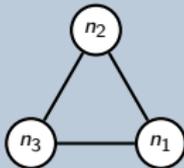


$K_{2,2,1,1}$



$K_5 \setminus P_3$

3 G es isomorfo a K_{n_1, n_2, n_3} o a $\overline{K_{n_1}} \vee (K_{n_2} + K_{n_3})$.



Grupo de pilas de arena

Teorema (Alfaro & Valencia, 2014)

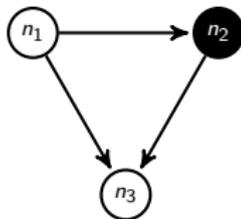
Sea G una gráfica conexa. Entonces, $f(G) = 2$ si y solo si G es una de las siguientes gráficas:

- 1 K_{n_1, n_2, n_3} , donde n_1, n_2 y n_3 tienen la misma paridad.
- 2 $\overline{K_{n_1}} \vee (K_{n_2} + K_{n_3})$, donde $n_1, n_2, n_3 \geq 3$ y tienen la misma paridad,
- 3 otros casos.

Grupo de pilas de arena

Teorema (Alfaro, Valencia & Vazquez, 2017)

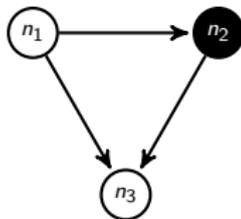
Sea D una digráfica conexa. Entonces, $\gamma_{\mathbb{Z}}(D) \leq 1$ si y solo si D es isomorfo a Λ_{n_1, n_2, n_3} .



Grupo de pilas de arena

Teorema (Alfaro, Valencia & Vazquez, 2017)

Sea D una digráfica conexa. Entonces, $\gamma_{\mathbb{Z}}(D) \leq 1$ si y solo si D es isomorfo a Λ_{n_1, n_2, n_3} .



Teorema (Alfaro, Valencia & Vázquez, 2017)

Sea D una digráfica conexa. Entonces, $f(D) = 1$ si y solo si D es una de las siguientes gráficas:

- 1 $n_1, n_2, n_3 \geq 1$,
- 2 otros casos.

El grupo de Smith

Definición

El **group de Smith** $S(G)$ de una gráfica G es el cokernel $\mathbb{Z}^n / \text{Im}(A(G))$ de la matriz de adyacencia $A(G)$.

El grupo de Smith

Definición

El **group de Smith** $S(G)$ de una gráfica G es el cokernel $\mathbb{Z}^n / \text{Im}(A(G))$ de la matriz de adyacencia $A(G)$.

Proposición

$S(G) \cong \mathbb{Z}/g_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/g_r\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-r}$, donde los enteros g_1, g_2, \dots, g_r los **factores invariantes** de la matriz de adyacencia y satisfacen $g_i | g_{i+1}$.

El grupo de Smith

Definición

El **group de Smith** $S(G)$ de una gráfica G es el cokernel $\mathbb{Z}^n / \text{Im}(A(G))$ de la matriz de adyacencia $A(G)$.

Proposición

$S(G) \cong \mathbb{Z}/g_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/g_r\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-r}$, donde los enteros g_1, g_2, \dots, g_r los los **factores invariantes** de la matriz de adyacencia y satisfacen $g_i | g_{i+1}$.

Proposición

$g_i = \Delta_i(A(G)) / \Delta_{i-1}(A(G))$, donde $\Delta_i(G)$ es el M.C.D. de los menores de tamaño i de $A(G)$.

El grupo de Smith

Proposición

Al evaluar el i -ésimo ideal crítico $I_i^{\mathbb{Z}}(G, X_G)$ en el vector cero, obtenemos que el ideal evaluado es generado por $\Delta_i(A(G))$.

El grupo de Smith

Proposición

Al evaluar el i -ésimo ideal crítico $I_i^{\mathbb{Z}}(G, X_G)$ en el vector cero, obtenemos que el ideal evaluado es generado por $\Delta_i(A(G))$.

Ejemplo

$$I_i^{\mathbb{Z}}(K_3, X)|_{\deg(K_3)} = \langle \Delta_i(K_3) \rangle = \begin{cases} \langle 1 \rangle & \text{si } i = 1, \\ \langle 1 \rangle & \text{si } i = 2, \\ \langle 2 \rangle & \text{si } i = 3. \end{cases}$$

Entonces $S(A(K_3)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Rango mínimo

Definición

El **rango mínimo** $\text{mr}_{\mathcal{R}}(G)$ de G es el menor rango sobre todas las matrices simétricas $n \times n$ con entradas en el anillo \mathcal{R} , cuya entrada u, v ($u \neq v$) es no cero siempre que u sea adyacente a v , y cero de otra forma.

Rango mínimo

Definición

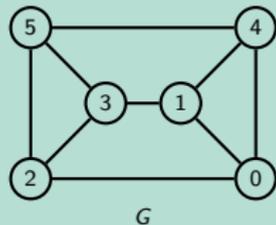
El **rango mínimo** $\text{mr}_{\mathcal{R}}(G)$ de G es el menor rango sobre todas las matrices simétricas $n \times n$ con entradas en el anillo \mathcal{R} , cuya entrada u, v ($u \neq v$) es no cero siempre que u sea adyacente a v , y cero de otra forma.

Observación (Alfaro & Lin, 2017)

Si $V(I_k^{\mathcal{R}}(G, X_G)) \neq \emptyset$ para algún k , entonces existe $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^n$ tal que para todo $t \geq k$, $I_t^{\mathcal{R}}(G, \mathbf{a}) = \langle 0 \rangle$; esto es, todos los menores de tamaño t de $L(G, \mathbf{a})$ son iguales a 0. Entonces, $\text{mr}_{\mathcal{R}}(G) \leq k - 1$.

Rango mínimo

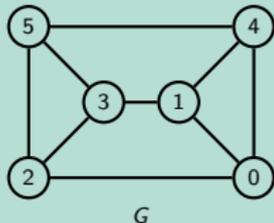
Ejemplo



Como $V(I_4^{\mathbb{R}}(G, X_G))$ es no vacío,
entonces $\text{mr}_{\mathbb{R}}(G) \leq 3$.

Rango mínimo

Ejemplo



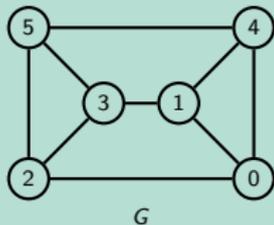
Como $V(I_4^{\mathbb{R}}(G, X_G))$ es no vacío, entonces $\text{mr}_{\mathbb{R}}(G) \leq 3$.

Lema (Nullstellensatz débil)

Sea \mathcal{R} un campo algebraicamente cerrado y sea $I \subseteq \mathcal{R}[X]$ un ideal con $V(I) = \emptyset$. Entonces I es trivial.

Rango mínimo

Ejemplo



Como $V(I_4^{\mathbb{R}}(G, X_G))$ es no vacío, entonces $\text{mr}_{\mathbb{R}}(G) \leq 3$.

Lema (Nullstellensatz débil)

Sea \mathcal{R} un campo algebraicamente cerrado y sea $I \subseteq \mathcal{R}[X]$ un ideal con $V(I) = \emptyset$. Entonces I es trivial.

Teorema (Alfaro & Lin, 2017)

Si \mathcal{R} es un campo algebraicamente cerrado, entonces $\text{mr}_{\mathcal{R}}(G) \leq \gamma_{\mathcal{R}}(G)$.

Aplicaciones: Rango mínimo

Conjetura

$$\text{mr}_{\mathbb{R}}(G) \leq \gamma_{\mathbb{R}}(G).$$

Aplicaciones: Rango mínimo

Conjetura

$$\text{mr}_{\mathbb{R}}(G) \leq \gamma_{\mathbb{R}}(G).$$

Teorema (Alfaro & Lin, 2017)

Si G es una gráfica conexa con $\text{mr}_{\mathbb{R}}(G) \leq 2$, entonces $\text{mr}_{\mathbb{R}}(G) \leq \gamma_{\mathbb{R}}(G)$.

Aplicaciones: Rango mínimo

Conjetura

$$\text{mr}_{\mathbb{R}}(G) \leq \gamma_{\mathbb{R}}(G).$$

Teorema (Alfaro & Lin, 2017)

Si G es una gráfica conexa con $\text{mr}_{\mathbb{R}}(G) \leq 2$, entonces $\text{mr}_{\mathbb{R}}(G) \leq \gamma_{\mathbb{R}}(G)$.

Teorema (Alfaro, 2018)

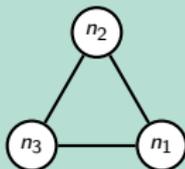
Si G es una gráfica conexa con $\text{mr}_{\mathbb{R}}(G) \leq 3$, entonces $\text{mr}_{\mathbb{R}}(G) \leq \gamma_{\mathbb{R}}(G)$.

Rango mínimo

Ejemplo

Sabemos que $\gamma_{\mathbb{Z}}(K_{n_1, n_2, n_3}) \leq 2$.

Pero cuando $n_1, n_2, n_3 \geq 3$, $\text{mr}_{\mathbb{Z}}(K_{n_1, n_2, n_3}) = 3$.



Número forzando a cero

Definición

El **juego forzando a cero** es un juego donde los vértices cambian de color entre azul y blanco.

Número forzando a cero

Definición

El **juego forzando a cero** es un juego donde los vértices cambian de color entre azul y blanco.

Al principio, un conjunto de vertices B se colorean azul, mientras que el resto se colorean blanco.

Número forzando a cero

Definición

El **juego forzando a cero** es un juego donde los vértices cambian de color entre azul y blanco.

Al principio, un conjunto de vertices B se colorean azul, mientras que el resto se colorean blanco.

El objetivo es colorear todos los vértices de color azul aplicando repetidamente la siguiente **regla de cambio de color**:

Número forzando a cero

Definición

El **juego forzando a cero** es un juego donde los vértices cambian de color entre azul y blanco.

Al principio, un conjunto de vertices B se colorean azul, mientras que el resto se colorean blanco.

El objetivo es colorear todos los vértices de color azul aplicando repetidamente la siguiente **regla de cambio de color**: Si x es un vértice tal que y es el único vecino blanco de x , entonces y es forzado a ser azul.

Número forzando a cero

Definición

El **juego forzando a cero** es un juego donde los vértices cambian de color entre azul y blanco.

Al principio, un conjunto de vertices B se colorean azul, mientras que el resto se colorean blanco.

El objetivo es colorear todos los vértices de color azul aplicando repetidamente la siguiente **regla de cambio de color**: Si x es un vértice tal que y es el único vecino blanco de x , entonces y es forzado a ser azul.

Un conjunto de vértices azules B es un **conjunto forzando a cero** si al comenzar con B uno puede colorear todos los vertices de azul.

Número forzando a cero

Definición

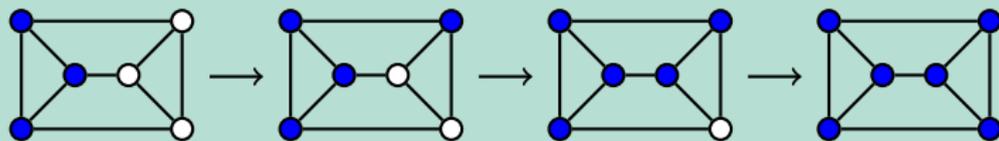
El **número forzando a cero** $Z(G)$ es la mínima cardinalidad de un conjunto forzando a cero.

Número forzando a cero

Definición

El **número forzando a cero** $Z(G)$ es la mínima cardinalidad de un conjunto forzando a cero.

Ejemplo



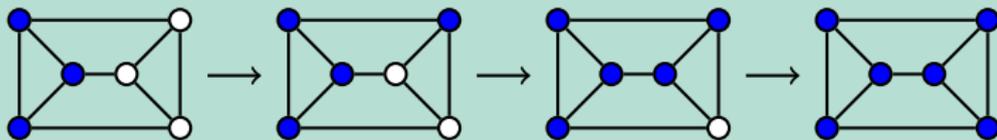
Como no hay conjuntos forzando a cero de cardinalidad 2, entonces $mz(G) = Z(G) = 3$.

Número forzando a cero

Definición

El **número forzando a cero** $Z(G)$ es la mínima cardinalidad de un conjunto forzando a cero.

Ejemplo



Como no hay conjuntos forzando a cero de cardinalidad 2, entonces $mz(G) = Z(G) = 3$.

Definición

$$mz(G) = |V(G)| - Z(G).$$

Ideales críticos, rango mínimo & mz

Teorema (Alfaro & Lin, 2017)

Para toda gráfica G y para cualquier anillo conmutativo \mathcal{R} , tenemos $mz(G) \leq \gamma_{\mathcal{R}}(G)$.

Ideales críticos, rango mínimo & mz

Teorema (Alfaro & Lin, 2017)

Para toda gráfica G y para cualquier anillo conmutativo \mathcal{R} , tenemos $mz(G) \leq \gamma_{\mathcal{R}}(G)$.

Teorema (AIM Minimum Rank Work Group, 2008)

Para toda gráfica G y cualquier campo \mathcal{R} , $mz(G) \leq mr_{\mathcal{R}}(G)$.

Ideales críticos, rango mínimo & mz

Teorema (Alfaro & Lin, 2017)

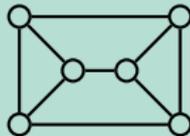
Para toda gráfica G y para cualquier anillo conmutativo \mathcal{R} , tenemos $mz(G) \leq \gamma_{\mathcal{R}}(G)$.

Teorema (AIM Minimum Rank Work Group, 2008)

Para toda gráfica G y cualquier campo \mathcal{R} , $mz(G) \leq mr_{\mathcal{R}}(G)$.

Ejemplo

Para la gráfica



tenemos $mz(G) = mr_{\mathbb{R}}(G) = \gamma_{\mathbb{R}}(G) = 3$.

Ideales críticos, rango mínimo & mz

De las 143 gráficas conexas con a lo más 6 vértices, solamente 21 tienen $mz(G) < \gamma_{\mathbb{R}}(G)$. Para las otras, $mz(G) = mr(G) = \gamma_{\mathbb{R}}(G)$.

Ideales críticos, rango mínimo & mz

De las 143 gráficas conexas con a lo más 6 vértices, solamente 21 tienen $mz(G) < \gamma_{\mathbb{R}}(G)$. Para las otras, $mz(G) = mr(G) = \gamma_{\mathbb{R}}(G)$.

Teorema (Alfaro & Lin, 2017)

Sea T un árbol, entonces $mz(T) = mr(T) = \gamma_{\mathbb{R}}(T)$.

Ideales críticos, rango mínimo & mz

De las 143 gráficas conexas con a lo más 6 vértices, solamente 21 tienen $mz(G) < \gamma_{\mathbb{R}}(G)$. Para las otras, $mz(G) = mr(G) = \gamma_{\mathbb{R}}(G)$.

Teorema (Alfaro & Lin, 2017)

Sea T un árbol, entonces $mz(T) = mr(T) = \gamma_{\mathbb{R}}(T)$.

Teorema (Alfaro & Lin, 2017)

Sea C_n un ciclo con $n \geq 3$, entonces $mz(C_n) = mr(C_n) = \gamma_{\mathbb{R}}(C_n)$.

Ideales críticos, rango mínimo & mz

De las 143 gráficas conexas con a lo más 6 vértices, solamente 21 tienen $mz(G) < \gamma_{\mathbb{R}}(G)$. Para las otras, $mz(G) = mr(G) = \gamma_{\mathbb{R}}(G)$.

Teorema (Alfaro & Lin, 2017)

Sea T un árbol, entonces $mz(T) = mr(T) = \gamma_{\mathbb{R}}(T)$.

Teorema (Alfaro & Lin, 2017)

Sea C_n un ciclo con $n \geq 3$, entonces $mz(C_n) = mr(C_n) = \gamma_{\mathbb{R}}(C_n)$.

Teorema (Alfaro & Lin, 2017)

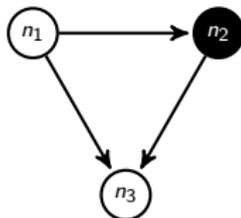
Sea G una gráfica de líneas de un árbol, entonces $mz(G) = mr(G) = \gamma_{\mathbb{R}}(G)$.

Ideales críticos, rango mínimo & mz

Teorema (Alfaro & Lin, 2017)

Sea \mathcal{R} un anillo conmutativo con unidad. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- 1 D es isomorfo a Λ_{n_1, n_2, n_3} ,
- 2 $\text{mr}_{\mathcal{R}}(D) \leq 1$,
- 3 $\text{mz}(D) \leq 1$,
- 4 $\gamma_{\mathcal{R}}(D) \leq 1$.



Referencias

- H. Corrales & C.E. Valencia, On the critical ideals of graphs. *Linear Algebra Appl.* 439 (2013) 3870–3892.
- C.A. Alfaro & C.E. Valencia, Graphs with two trivial critical ideals. *Discrete Appl. Math.* 167 (2014) 33–44.
- C.A. Alfaro, C.E. Valencia & A. Vázquez-Ávila, Digraphs with at most one trivial critical ideal. *Linear & Multilinear Algebra* 66 (2018) 2036–204.
- C.A. Alfaro & J.C.-H. Lin, Critical ideals, minimum rank and zero forcing number. Preprint arXiv:1710.03386.
- C.A. Alfaro, Graphs with real algebraic co-rank at most two. *Linear Algebra Appl.* 556 (2018) 100–107.



¡Gracias por su atención!

Carlos A. Alfaro

carlos.alfaro@banxico.org.mx