

Transversales y 2-acoplamientos en sistemas lineales.

Carlos Alfaro¹ Gabriela Araujo-Pardo² Amanda Montejano³ Luis
Montejano¹ Christian Rubio-Montiel⁴ Adrián Vázquez-Ávila⁵

¹Banco de México.

²Instituto de Matemáticas
UNAM

³Unidad Multidisciplinaria de Docencia e Investigación de Juriquilla
UNAM

⁴División de matemáticas e ingeniería
UNAM

⁵Subdirección de ingeniería y Posgrado
Universidad Aeronáutica en Querétaro

Seminario de la Licenciatura en Matemática Educativa

Definición

Un *sistema de conjuntos* es una pareja $(X, \mathcal{F})$, donde $\mathcal{F}$ es una familia finita de subconjuntos de un conjunto finito X .

- Un subsistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es también conocido como una *hipergráfica*, donde los elementos de X son llamados *vertices* y los elementos de $\mathcal{F}$ son llamados *hiperearistas*.

Definición

Un *sistema de conjuntos* es una pareja $(X, \mathcal{F})$, donde $\mathcal{F}$ es una familia finita de subconjuntos de un conjunto finito X .

- Un subsistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es también conocido como una *hipergráfica*, donde los elementos de X son llamados *vertices* y los elementos de $\mathcal{F}$ son llamados *hiperearistas*.

Definiciones

Sea $(X, \mathcal{F})$ un sistema de conjuntos y $x \in X$.

- El grado de x , denotado por $\deg(x)$, es el número de subconjuntos de $\mathcal{F}$ que contienen a x .
- El grado máximo de los elementos de X es denotado por $\Delta = \Delta(X, \mathcal{F})$.
- El sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es r -regular, si todo elemento de X tiene grado r .
- El sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es k -uniforme, si todo subconjunto de $\mathcal{F}$ tiene exactamente k elementos.

Definiciones

Sea $(X, \mathcal{F})$ un sistema de conjuntos y $x \in X$.

- El grado de x , denotado por $\deg(x)$, es el número de subconjuntos de $\mathcal{F}$ que contienen a x .
- El grado máximo de los elementos de X es denotado por $\Delta = \Delta(X, \mathcal{F})$.
- El sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es r -regular, si todo elemento de X tiene grado r .
- El sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es k -uniforme, si todo subconjunto de $\mathcal{F}$ tiene exactamente k elementos.

Definiciones

Sea $(X, \mathcal{F})$ un sistema de conjuntos y $x \in X$.

- El grado de x , denotado por $\deg(x)$, es el número de subconjuntos de $\mathcal{F}$ que contienen a x .
- El grado máximo de los elementos de X es denotado por $\Delta = \Delta(X, \mathcal{F})$.
- El sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es r -regular, si todo elemento de X tiene grado r .
- El sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es k -uniforme, si todo subconjunto de $\mathcal{F}$ tiene exactamente k elementos.

Definiciones

Sea $(X, \mathcal{F})$ un sistema de conjuntos y $x \in X$.

- El grado de x , denotado por $\deg(x)$, es el número de subconjuntos de $\mathcal{F}$ que contienen a x .
- El grado máximo de los elementos de X es denotado por $\Delta = \Delta(X, \mathcal{F})$.
- El sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es r -regular, si todo elemento de X tiene grado r .
- El sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es k -uniforme, si todo subconjunto de $\mathcal{F}$ tiene exactamente k elementos.

Definiciones

Sea $(X, \mathcal{F})$ un sistema de conjuntos y $x \in X$.

- El grado de x , denotado por $\deg(x)$, es el número de subconjuntos de $\mathcal{F}$ que contienen a x .
- El grado máximo de los elementos de X es denotado por $\Delta = \Delta(X, \mathcal{F})$.
- El sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es r -regular, si todo elemento de X tiene grado r .
- El sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es k -uniforme, si todo subconjunto de $\mathcal{F}$ tiene exactamente k elementos.

Definiciones

Definición

Sea $(X, \mathcal{F})$ un sistema de conjuntos. A un subconjunto $T \subseteq X$ se le llama *transversal* de $(X, \mathcal{F})$, si éste interseca a todos los subconjuntos de $\mathcal{F}$, esto es $T \cap F \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{F}$.

El número de transversal de $(X, \mathcal{F})$, denotado por $\tau = \tau(X, \mathcal{F})$, es la cardinalidad más pequeña entre todas las transversales de $(X, \mathcal{F})$, esto es

$$\tau = \min\{|T| : T \text{ es una transversal de } (X, \mathcal{F})\}.$$

- El número de transversal se ha estudiado en la literatura en diferentes contextos y nombres. Por ejemplo, con el nombre de **número de cubierta** y **número de pinchamiento**.

Definiciones

Definición

Sea $(X, \mathcal{F})$ un sistema de conjuntos. A un subconjunto $T \subseteq X$ se le llama *transversal* de $(X, \mathcal{F})$, si éste interseca a todos los subconjuntos de $\mathcal{F}$, esto es $T \cap F \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{F}$.

El número de transversal de $(X, \mathcal{F})$, denotado por $\tau = \tau(X, \mathcal{F})$, es la cardinalidad más pequeña entre todas las transversales de $(X, \mathcal{F})$, esto es

$$\tau = \min\{|T| : T \text{ es una transversal de } (X, \mathcal{F})\}.$$

- El número de transversal se ha estudiado en la literatura en diferentes contextos y nombres. Por ejemplo, con el nombre de *número de cubierta* y *número de pinchamiento*.

Definiciones

Definición

Sea $(X, \mathcal{F})$ un sistema de conjuntos. A un subconjunto $T \subseteq X$ se le llama *transversal* de $(X, \mathcal{F})$, si éste interseca a todos los subconjuntos de $\mathcal{F}$, esto es $T \cap F \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathcal{F}$.

El número de transversal de $(X, \mathcal{F})$, denotado por $\tau = \tau(X, \mathcal{F})$, es la cardinalidad más pequeña entre todas las transversales de $(X, \mathcal{F})$, esto es

$$\tau = \min\{|T| : T \text{ es una transversal de } (X, \mathcal{F})\}.$$

- El número de transversal se ha estudiado en la literatura en diferentes contextos y nombres. Por ejemplo, con el nombre de **número de cubierta** y **número de pinchamiento**.

Definición

Sea $(X, \mathcal{F})$ un sistema de conjuntos. A un subconjunto $R \subseteq \mathcal{F}$ se le llama **2-acoplamiento** (*2-packing*) de $(X, \mathcal{F})$, si los elementos de R son disjuntos tres a tres, esto es $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \emptyset$, para todo $F_1, F_2, F_3 \in R$.

- El número de 2-acoplamiento de $(X, \mathcal{F})$, denotado por $\nu_2 = \nu_2(X, \mathcal{F})$, es la cardinalidad más grande de un 2-acoplamiento de $(X, \mathcal{F})$, esto es

$$\nu_2 = \max\{|R| : R \text{ es un 2-acoplamiento de } (X, \mathcal{F})\}$$

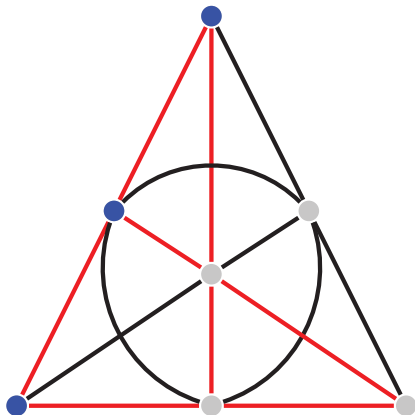
Definición

Sea $(X, \mathcal{F})$ un sistema de conjuntos. A un subconjunto $R \subseteq \mathcal{F}$ se le llama **2-acoplamiento** (*2-packing*) de $(X, \mathcal{F})$, si los elementos de R son disjuntos tres a tres, esto es $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \emptyset$, para todo $F_1, F_2, F_3 \in R$.

- El número de 2-acoplamiento de $(X, \mathcal{F})$, denotado por $\nu_2 = \nu_2(X, \mathcal{F})$, es la cardinalidad más grande de un 2-acoplamiento de $(X, \mathcal{F})$, esto es

$$\nu_2 = \max\{|R| : R \text{ es un 2-acoplamiento de } (X, \mathcal{F})\}$$

Ejemplo



Sistema de conjuntos con $\nu_2 = 4$ y $\tau = 3$

Observación

Un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ satisface $\Delta \leq 2$ si y sólo si $\nu_2 = |\mathcal{F}|$.

- Vamos a suponer que todo sistema lineal $(X, \mathcal{F})$ satisface $|\mathcal{F}| > \nu_2$.
- Vamos a suponer que $\Delta \geq 3$.

Observación

Un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ satisface $\Delta \leq 2$ si y sólo si $\nu_2 = |\mathcal{F}|$.

- Vamos a suponer que todo sistema lineal $(X, \mathcal{F})$ satisface $|\mathcal{F}| > \nu_2$.
- Vamos a suponer que $\Delta \geq 3$.

Observación

Un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ satisface $\Delta \leq 2$ si y sólo si $\nu_2 = |\mathcal{F}|$.

- Vamos a suponer que todo sistema lineal $(X, \mathcal{F})$ satisface $|\mathcal{F}| > \nu_2$.
- Vamos a suponer que $\Delta \geq 3$.

Definición

A un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ se le llama *sistema lineal*, si se satisface $|F_1 \cap F_2| \leq 1$, para todo par de distintos subconjuntos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$.

- Se denotará a un sistema lineal como $(P, \mathcal{L})$.
- A los elementos de P y $\mathcal{L}$ se les llama *puntos* y *líneas*, respectivamente.
- Estamos interesados en establecer una relación entre el número de transversal y el número de 2-acoplamiento de un sistema lineal.

Definición

A un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ se le llama *sistema lineal*, si se satisface $|F_1 \cap F_2| \leq 1$, para todo par de distintos subconjuntos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$.

- Se denotará a un sistema lineal como $(P, \mathcal{L})$.
- A los elementos de P y $\mathcal{L}$ se les llama *puntos* y *líneas*, respectivamente.
- Estamos interesados en establecer una relación entre el número de transversal y el número de 2-acoplamiento de un sistema lineal.

Definición

A un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ se le llama *sistema lineal*, si se satisface $|F_1 \cap F_2| \leq 1$, para todo par de distintos subconjuntos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$.

- Se denotará a un sistema lineal como $(P, \mathcal{L})$.
- A los elementos de P y $\mathcal{L}$ se les llama *puntos* y *líneas*, respectivamente.
- Estamos interesados en establecer una relación entre el número de transversal y el número de 2-acoplamiento de un sistema lineal.

Definición

A un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ se le llama *sistema lineal*, si se satisface $|F_1 \cap F_2| \leq 1$, para todo par de distintos subconjuntos $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$.

- Se denotará a un sistema lineal como $(P, \mathcal{L})$.
- A los elementos de P y $\mathcal{L}$ se les llama *puntos* y *líneas*, respectivamente.
- Estamos interesados en establecer una relación entre el número de transversal y el número de 2-acoplamiento de un sistema lineal.

Proposición (A. Vázquez, [8])

Todo sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ satisface $\lceil \nu_2/2 \rceil \leq \tau$.

- Como todo 2-acoplamiento de un sistema lineal induce a lo más $\binom{\nu_2}{2}$ puntos dobles, se cumple:

Proposición (A. Vázquez, [8])

Todo sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ satisface $\tau \leq \binom{\nu_2}{2}$.

Proposición (A. Vázquez, [8])

Todo sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ satisface $\lceil \nu_2/2 \rceil \leq \tau$.

- Como todo 2-acoplamiento de un sistema lineal induce a lo más $\binom{\nu_2}{2}$ puntos dobles, se cumple:

Proposición (A. Vázquez, [8])

Todo sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ satisface $\tau \leq \binom{\nu_2}{2}$.

Proposición (A. Vázquez, [8])

Todo sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ satisface $\lceil \nu_2/2 \rceil \leq \tau$.

- Como todo 2-acoplamiento de un sistema lineal induce a lo más $\binom{\nu_2}{2}$ puntos dobles, se cumple:

Proposición (A. Vázquez, [8])

Todo sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ satisface $\tau \leq \binom{\nu_2}{2}$.

Teorema (C. Alfaro, C. Rubio, A. Vázquez, [2])

Si G es una gráfica simple y conexa con $|V(G)| > \nu_2$, entonces

$$\lceil \nu_2/2 \rceil \leq \tau \leq \nu_2 - 1.$$

- Más aún, en [2] se caracterizó a las gráficas simples y conexas que satisfacen las desigualdades del teorema anterior.

Teorema (C. Alfaro, C. Rubio, A. Vázquez, [2])

Si G es una gráfica simple y conexa con $|V(G)| > \nu_2$, entonces

$$\lceil \nu_2/2 \rceil \leq \tau \leq \nu_2 - 1.$$

- Más aún, en [2] se caracterizó a las gráficas simples y conexas que satisfacen las desigualdades del teorema anterior.

Definición

Una *representación en segmentos de línea recta* en $\mathbb{R}^2$, de un sistema lineal $(P, \mathcal{L})$, mapea cada punto $x \in P$ a un punto $p(x)$ en $\mathbb{R}^2$, y cada línea $F \in \mathcal{L}$ a un segmento de línea recta $I(F)$ en $\mathbb{R}^2$, de tal forma que:

- cada punto $x \in P$ y línea $F \in \mathcal{L}$ se cumple $p(x) \in I(F)$ si y sólo si $x \in F$,
- cada par de distintas líneas $F, H \in \mathcal{F}$ se cumple

$$I(F) \cap I(H) = \{p(x) : x \in F \cap H\}.$$

Definiciones

Definición

Un *sistema de segmentos de líneas rectas*, o simplemente *sistema de segmentos*, es un sistema lineal en el que tiene una representación en segmentos de líneas rectas en $\mathbb{R}^2$.

Definición

Se denotará por $T(n)$ al valor máximo entre todas las transversales de todo sistema de segmentos cuyo número de 2-acoplamiento es n (fijo) y con al menos $n + 1$ líneas. Esto es, si ν_2^n es el conjunto de todos los sistemas de segmentos $(P, \mathcal{L})$ tales que $\nu_2 = n$ y $|\mathcal{L}| > \nu_2$, entonces

$$T(n) = \max\{\tau(P, \mathcal{L}) : (P, \mathcal{L}) \in \nu_2^n\}.$$

Definiciones

Definición

Un *sistema de segmentos de líneas rectas*, o simplemente *sistema de segmentos*, es un sistema lineal en el que tiene una representación en segmentos de líneas rectas en $\mathbb{R}^2$.

Definición

Se denotará por $T(n)$ al valor máximo entre todas las transversales de todo sistema de segmentos cuyo número de 2-acoplamiento es n (fijo) y con al menos $n + 1$ líneas. Esto es, si ν_2^n es el conjunto de todos los sistemas de segmentos $(P, \mathcal{L})$ tales que $\nu_2 = n$ y $|\mathcal{L}| > \nu_2$, entonces

$$T(n) = \max\{\tau(P, \mathcal{L}) : (P, \mathcal{L}) \in \nu_2^n\}.$$

Resultados

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

$$T(n) = n - 1, \text{ para } n \in \{2, 3, 4\}.$$

- Creemos que el resultado anterior se cumple en general.

Conjetura (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

$$T(n) = n - 1, \text{ para } n \geq 2.$$

Resultados

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

$$T(n) = n - 1, \text{ para } n \in \{2, 3, 4\}.$$

- Creemos que el resultado anterior se cumple en general.

Conjetura (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

$$T(n) = n - 1, \text{ para } n \geq 2.$$

Resultados

- Los casos $n = 2, 3$, la demostración es fácil.
- El caso $n = 4$, es el primer caso no trivial donde se verifica $T(4) = 3$.
- De hecho, se demostró un poco más.

Proposición (Araujo, A. Montejano, L. Montejano, Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L})$ es un sistema lineal con $\nu_2 = 2$ y $|\mathcal{L}| > 2$, entonces $\tau = 1$. En particular $T(2) = 1$.

Proposición (Araujo, A. Montejano, L. Montejano, Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L})$ es un sistema lineal con $\nu_2 = 3$ y $|\mathcal{L}| > 3$, entonces $\tau = 2$. En particular $T(3) = 2$.

Resultados

- Los casos $n = 2, 3$, la demostración es fácil.
- El caso $n = 4$, es el primer caso no trivial donde se verifica $T(4) = 3$.
- De hecho, se demostró un poco más.

Proposición (Araujo, A. Montejano, L. Montejano, Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L})$ es un sistema lineal con $\nu_2 = 2$ y $|\mathcal{L}| > 2$, entonces $\tau = 1$. En particular $T(2) = 1$.

Proposición (Araujo, A. Montejano, L. Montejano, Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L})$ es un sistema lineal con $\nu_2 = 3$ y $|\mathcal{L}| > 3$, entonces $\tau = 2$. En particular $T(3) = 2$.

Resultados

- Los casos $n = 2, 3$, la demostración es fácil.
- El caso $n = 4$, es el primer caso no trivial donde se verifica $T(4) = 3$.
- De hecho, se demostró un poco más.

Proposición (Araujo, A. Montejano, L. Montejano, Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L})$ es un sistema lineal con $\nu_2 = 2$ y $|\mathcal{L}| > 2$, entonces $\tau = 1$. En particular $T(2) = 1$.

Proposición (Araujo, A. Montejano, L. Montejano, Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L})$ es un sistema lineal con $\nu_2 = 3$ y $|\mathcal{L}| > 3$, entonces $\tau = 2$. En particular $T(3) = 2$.

Resultados

- Los casos $n = 2, 3$, la demostración es fácil.
- El caso $n = 4$, es el primer caso no trivial donde se verifica $T(4) = 3$.
- De hecho, se demostró un poco más.

Proposición (Araujo, A. Montejano, L. Montejano, Vázquez, [3])

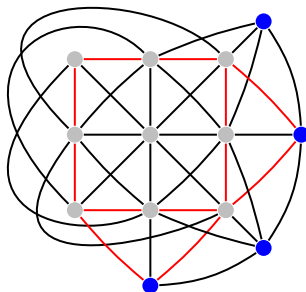
Si $(P, \mathcal{L})$ es un sistema lineal con $\nu_2 = 2$ y $|\mathcal{L}| > 2$, entonces $\tau = 1$. En particular $T(2) = 1$.

Proposición (Araujo, A. Montejano, L. Montejano, Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L})$ es un sistema lineal con $\nu_2 = 3$ y $|\mathcal{L}| > 3$, entonces $\tau = 2$. En particular $T(3) = 2$.

Observaciones

- En vista de las proposiciones anteriores, es tentativo conjeturar que si $(P, \mathcal{L})$ es un sistema lineal con $\nu_2 = 4$ y $|\mathcal{L}| > 4$, entonces $\tau \leq 3$. Lo que implicaría $T(4) = 3$.
- Sin embargo, el plano proyectivo de orden 3 satisface $\nu_2 = \tau = 4$.



Definiciones

Definición

Un *plano proyectivo finito* es un sistema lineal $(P, \mathcal{L})$, tal que:

- (i) *todo par de puntos están contenidos en una única línea,*
- (ii) *todo par de líneas contienen a un punto en común, y*
- (iii) *existen cuatro puntos en posición general (no tres de ellos contenidos en una línea).*

Observación

Si $(P, \mathcal{L})$ es un plano proyectivo, existe $q \in \mathbb{N}$, llamado *orden del plano proyectivo*, tal que, todo punto (línea, respectivamente) es incidente a exactamente $q+1$ líneas (puntos, respectivamente), y $(P, \mathcal{L})$ contiene exactamente $q^2 + q + 1$ puntos (líneas, respectivamente).

Definiciones

Definición

Un *plano proyectivo finito* es un sistema lineal $(P, \mathcal{L})$, tal que:

- (i) *todo par de puntos están contenidos en una única línea,*
- (ii) *todo par de líneas contienen a un punto en común, y*
- (iii) *existen cuatro puntos en posición general (no tres de ellos contenidos en una línea).*

Observación

Si $(P, \mathcal{L})$ es un plano proyectivo, existe $q \in \mathbb{N}$, llamado *orden del plano proyectivo*, tal que, todo punto (línea, respectivamente) es incidente a exactamente $q+1$ líneas (puntos, respectivamente), y $(P, \mathcal{L})$ contiene exactamente $q^2 + q + 1$ puntos (líneas, respectivamente).

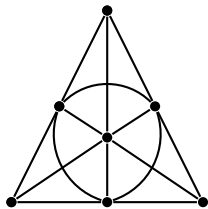
Ejemplos

Observación

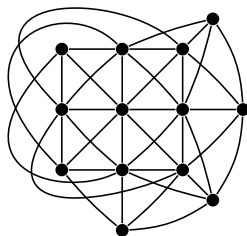
El plano proyectivo de orden q existe, si q es una potencia de primo.

- Denotaremos por Π_q a los planos proyectivos de orden q .

Ejemplos:



Π_2



Π_3

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Todo plano proyectivo Π_q de orden q satisface:

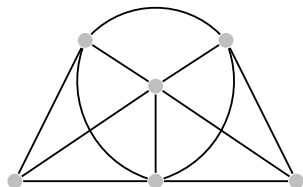
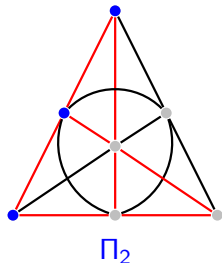
- $\tau(\Pi_q) = \nu_2(\Pi_q) - 1$, si q es par, y
- $\tau(\Pi_q) = \nu_2(\Pi_q)$, si q es impar.

Definición

Definición

Un *subsistema lineal* $(P', \mathcal{L}')$ de un sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ satisface $P' \subseteq P$, y para toda línea $l' \in \mathcal{L}'$ existe una única línea $l \in \mathcal{L}$, tal que $l' \subseteq l$. En particular, si $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ y $P' = \bigcup_{l \in \mathcal{L}'} l$, entonces $(P', \mathcal{L}')$ es llamado *subsistema lineal inducido* por $\mathcal{L}'$.

Ejemplo:



Resultados

- Para probar que $T(4) = 3$, se necesitó de los siguientes resultados:

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Sea $(P, \mathcal{L})$ un sistema lineal con $|\mathcal{L}| > 4$. Si $\nu_2 = 4$, entonces $\tau \leq 4$. Más aún, si $\tau = \nu_2 = 4$, entonces $(P, \mathcal{L})$ es un subsistema lineal de Π_3 .

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L})$ es un sistema lineal que satisface $\tau = \nu_2 = 4$, entonces $(P, \mathcal{L})$ no tiene representación en segmentos de línea recta en $\mathbb{R}^2$.

Observación

$T(n) \geq n - 1$, para $n \geq 2$.

Resultados

- Para probar que $T(4) = 3$, se necesitó de los siguientes resultados:

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Sea $(P, \mathcal{L})$ un sistema lineal con $|\mathcal{L}| > 4$. Si $\nu_2 = 4$, entonces $\tau \leq 4$. Más aún, si $\tau = \nu_2 = 4$, entonces $(P, \mathcal{L})$ es un subsistema lineal de Π_3 .

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L})$ es un sistema lineal que satisface $\tau = \nu_2 = 4$, entonces $(P, \mathcal{L})$ no tiene representación en segmentos de línea recta en $\mathbb{R}^2$.

Observación

$T(n) \geq n - 1$, para $n \geq 2$.

Resultados

- Para probar que $T(4) = 3$, se necesitó de los siguientes resultados:

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Sea $(P, \mathcal{L})$ un sistema lineal con $|\mathcal{L}| > 4$. Si $\nu_2 = 4$, entonces $\tau \leq 4$. Más aún, si $\tau = \nu_2 = 4$, entonces $(P, \mathcal{L})$ es un subsistema lineal de Π_3 .

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L})$ es un sistema lineal que satisface $\tau = \nu_2 = 4$, entonces $(P, \mathcal{L})$ no tiene representación en segmentos de línea recta en $\mathbb{R}^2$.

Observación

$T(n) \geq n - 1$, para $n \geq 2$.

Resultados

- Para probar que $T(4) = 3$, se necesitó de los siguientes resultados:

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Sea $(P, \mathcal{L})$ un sistema lineal con $|\mathcal{L}| > 4$. Si $\nu_2 = 4$, entonces $\tau \leq 4$. Más aún, si $\tau = \nu_2 = 4$, entonces $(P, \mathcal{L})$ es un subsistema lineal de Π_3 .

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L})$ es un sistema lineal que satisface $\tau = \nu_2 = 4$, entonces $(P, \mathcal{L})$ no tiene representación en segmentos de línea recta en $\mathbb{R}^2$.

Observación

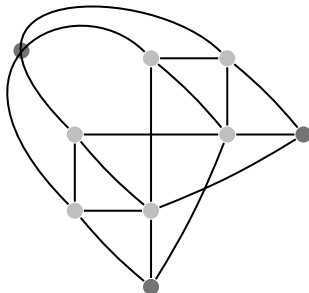
$T(n) \geq n - 1$, para $n \geq 2$.

Ejemplo

Observación

Existen subsistemas lineales de Π_3 con $\nu_2 = 4$ y $\tau = 3$.

Ejemplo:



Resultados

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Sea $(P, \mathcal{L})$ un sistema lineal con $|\mathcal{L}| > 4$. Si $\nu_2 = 4$, entonces $\tau \leq 4$. Más aún, si $\tau = \nu_2 = 4$, entonces $(P, \mathcal{L})$ es un subsistema lineal de Π_3 .

- Para probar el teorema anterior, se analizaron diferentes casos relacionados con el grado máximo del sistema lineal. Los casos fueron cuando $\Delta \in \{3, 4\}$ y $\Delta \geq 5$.

Lema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Todo sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ con $\nu_2 = 4$ y $\Delta \geq 5$ satisface $\tau \leq 3$.

- Los casos restantes, $\Delta = 3$ y $\Delta = 4$, son los casos donde existen sistemas lineales que satisfacen $\nu_2 = \tau = 4$.

Resultados

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Sea $(P, \mathcal{L})$ un sistema lineal con $|\mathcal{L}| > 4$. Si $\nu_2 = 4$, entonces $\tau \leq 4$. Más aún, si $\tau = \nu_2 = 4$, entonces $(P, \mathcal{L})$ es un subsistema lineal de Π_3 .

- Para probar el teorema anterior, se analizaron diferentes casos relacionados con el grado máximo del sistema lineal. Los casos fueron cuando $\Delta \in \{3, 4\}$ y $\Delta \geq 5$.

Lema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Todo sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ con $\nu_2 = 4$ y $\Delta \geq 5$ satisface $\tau \leq 3$.

- Los casos restantes, $\Delta = 3$ y $\Delta = 4$, son los casos donde existen sistemas lineales que satisfacen $\nu_2 = \tau = 4$.

Resultados

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Sea $(P, \mathcal{L})$ un sistema lineal con $|\mathcal{L}| > 4$. Si $\nu_2 = 4$, entonces $\tau \leq 4$. Más aún, si $\tau = \nu_2 = 4$, entonces $(P, \mathcal{L})$ es un subsistema lineal de Π_3 .

- Para probar el teorema anterior, se analizaron diferentes casos relacionados con el grado máximo del sistema lineal. Los casos fueron cuando $\Delta \in \{3, 4\}$ y $\Delta \geq 5$.

Lema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Todo sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ con $\nu_2 = 4$ y $\Delta \geq 5$ satisface $\tau \leq 3$.

- Los casos restantes, $\Delta = 3$ y $\Delta = 4$, son los casos donde existen sistemas lineales que satisfacen $\nu_2 = \tau = 4$.

Definición

Dado un sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ y un punto $p \in P$, el sistema lineal obtenido a partir de $(P, \mathcal{L})$ al borrar el punto p es el subsistema lineal $(P', \mathcal{L}')$ inducido por $\mathcal{L}' = \{I \setminus \{p\} : I \in \mathcal{L}\}$.

Definición

Dado un sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ y una línea $I \in \mathcal{L}$, el sistema lineal obtenido a partir de $(P, \mathcal{L})$ al borrar la línea I es el subsistema lineal $(P', \mathcal{L}')$ inducido por $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \setminus \{I\}$.

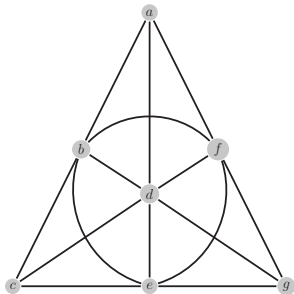
Definición

Dado un sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ y un punto $p \in P$, el sistema lineal obtenido a partir de $(P, \mathcal{L})$ al borrar el punto p es el subsistema lineal $(P', \mathcal{L}')$ inducido por $\mathcal{L}' = \{I \setminus \{p\} : I \in \mathcal{L}\}$.

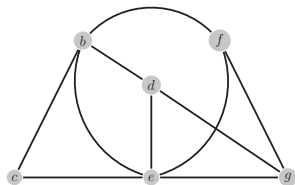
Definición

Dado un sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ y una línea $I \in \mathcal{L}$, el sistema lineal obtenido a partir de $(P, \mathcal{L})$ al borrar la línea I es el subsistema lineal $(P', \mathcal{L}')$ inducido por $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \setminus \{I\}$.

Ejemplo



Π_2



Sistema lineal resultante al borrar el punto a y la línea $\{c, d, f\}$ de Π_2 .

Caso $\Delta = 3$

Definición

Consideremos cualquier punto k y cualquier línea l de Π_3 , tal que $k \notin l$. Se denotará por $\mathcal{C}_{3,4}$ al sistema lineal obtenido a partir de Π_3 al:

- i) borrar el punto k y sus cuatro líneas incidentes; y al
- ii) borrar la línea l y sus cuatro puntos que contiene.

- El sistema lineal $\mathcal{C}_{3,4}$ es un sistema 3-regular y 3-uniforme, con 8 puntos y 8 líneas.

Caso $\Delta = 3$

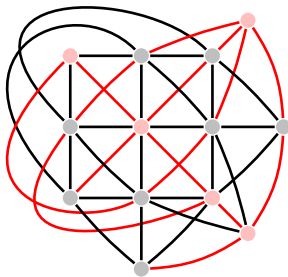
Definición

Consideremos cualquier punto k y cualquier línea l de Π_3 , tal que $k \notin l$. Se denotará por $\mathcal{C}_{3,4}$ al sistema lineal obtenido a partir de Π_3 al:

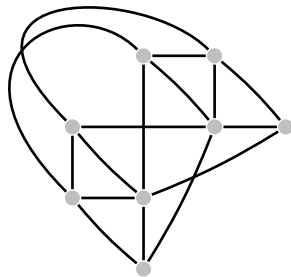
- i) borrar el punto k y sus cuatro líneas incidentes; y al
- ii) borrar la línea l y sus cuatro puntos que contiene.

- El sistema lineal $\mathcal{C}_{3,4}$ es un sistema 3-regular y 3-uniforme, con 8 puntos y 8 líneas.

Caso $\Delta = 3$



Π_3

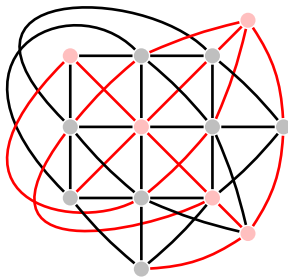


$\mathcal{C}_{3,4}$

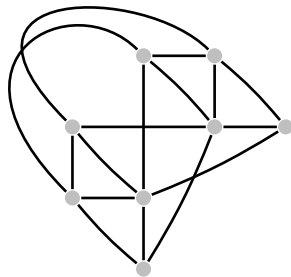
Proposición (Araujo, A. Montejano, L. Montejano, Vázquez, [3])

$$\tau(\mathcal{C}_{3,4}) = \nu_2(\mathcal{C}_{3,4}) = 4$$

Caso $\Delta = 3$



Π_3



$\mathcal{C}_{3,4}$

Proposición (Araujo, A. Montejano, L. Montejano, Vázquez, [3])

$$\tau(\mathcal{C}_{3,4}) = \nu_2(\mathcal{C}_{3,4}) = 4$$

Caso $\Delta = 3$

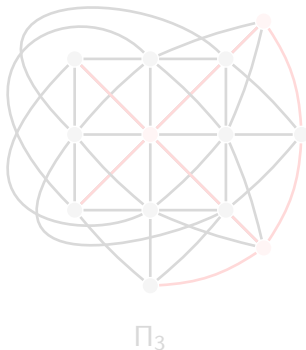
Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Sea $(P, \mathcal{L})$ un sistema lineal con $\nu_2 = 4$ y $\Delta = 3$. Si $(P, \mathcal{L}) \not\cong \mathcal{C}_{3,4}$, entonces $\tau \leq 3$.

Caso $\Delta = 4$

Definición

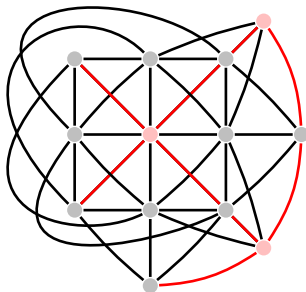
Sea $\mathcal{C}$ el sistema lineal obtenido a partir de Π_3 al borrar tres líneas no concurrentes, junto con sus respectivos puntos dobles, es decir, al borrar los puntos y las líneas de un triángulo de Π_3 .



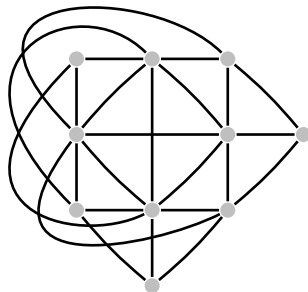
Caso $\Delta = 4$

Definición

Sea $\mathcal{C}$ el sistema lineal obtenido a partir de Π_3 al borrar tres líneas no concurrentes, junto con sus respectivos puntos dobles, es decir, al borrar los puntos y las líneas de un triángulo de Π_3 .



Π_3



$\mathcal{C}$

Caso $\Delta = 4$

Definición

Denotaremos por $\mathcal{C}_{4,4}$ a la familia de sistemas lineales $(P, \mathcal{L})$ con $\nu_2 = 4$ tales que:

- i) $\mathcal{C}$ es un subsistema lineal de $(P, \mathcal{L})$, y
- ii) $(P, \mathcal{L})$ es un subsistema lineal de Π_3 ,

esto es,

$$\mathcal{C}_{4,4} = \{(P, \mathcal{L}) : \mathcal{C} \subseteq (P, \mathcal{L}) \subseteq \Pi_3, \text{ con } \nu_2 = 4\}.$$

Proposición (Araujo, A. Montejano, L. Montejano, Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{C}_{4,4}$, entonces $\tau = 4$.

Caso $\Delta = 4$

Definición

Denotaremos por $\mathcal{C}_{4,4}$ a la familia de sistemas lineales $(P, \mathcal{L})$ con $\nu_2 = 4$ tales que:

- i) $\mathcal{C}$ es un subsistema lineal de $(P, \mathcal{L})$, y
- ii) $(P, \mathcal{L})$ es un subsistema lineal de Π_3 ,

esto es,

$$\mathcal{C}_{4,4} = \{(P, \mathcal{L}) : \mathcal{C} \subseteq (P, \mathcal{L}) \subseteq \Pi_3, \text{ con } \nu_2 = 4\}.$$

Proposición (Araujo, A. Montejano, L. Montejano, Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{C}_{4,4}$, entonces $\tau = 4$.

Caso $\Delta = 4$

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Sea $(P, \mathcal{L})$ un sistema lineal con $\nu_2 = \Delta = 4$. Si $(P, \mathcal{L}) \notin \mathcal{C}_{4,4}$, entonces $\tau \leq 3$.

Resultados

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Sea $(P, \mathcal{L})$ un sistema lineal con $|\mathcal{L}| > 4$. Si $\nu_2 = 4$, entonces $\tau \leq 4$. Más aún, si $\tau = \nu_2 = 4$, entonces $(P, \mathcal{L})$ es un subsistema lineal de Π_3 .

- Si $(P, \mathcal{L}) \simeq \mathcal{C}_{3,4}$ o bien $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{C}_{4,4}$, entonces $\tau = 4$.
- De lo contrario $\tau \leq 3$.

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L}) \simeq \mathcal{C}_{3,4}$ o bien $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{C}_{4,4}$, entonces $(P, \mathcal{L})$ no tiene representación en segmentos de línea recta.

Resultados

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Sea $(P, \mathcal{L})$ un sistema lineal con $|\mathcal{L}| > 4$. Si $\nu_2 = 4$, entonces $\tau \leq 4$. Más aún, si $\tau = \nu_2 = 4$, entonces $(P, \mathcal{L})$ es un subsistema lineal de Π_3 .

- Si $(P, \mathcal{L}) \simeq \mathcal{C}_{3,4}$ o bien $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{C}_{4,4}$, entonces $\tau = 4$.
- De lo contrario $\tau \leq 3$.

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L}) \simeq \mathcal{C}_{3,4}$ o bien $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{C}_{4,4}$, entonces $(P, \mathcal{L})$ no tiene representación en segmentos de línea recta.

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L}) \simeq \mathcal{C}_{3,4}$ o bien $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{C}_{4,4}$, entonces $(P, \mathcal{L})$ no tiene representación en segmentos de línea recta.

- Para probar el teorema anterior, se necesitó de lo siguiente:

Definición

La gráfica de incidencia de un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$, denotado por $B(X, \mathcal{F})$, es una gráfica bipartita cuyo conjunto vértices es $V = X \cup \mathcal{F}$, donde dos vértices $x \in X$ y $F \in \mathcal{F}$ son adyacentes si y solo si $x \in F$.

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L}) \simeq \mathcal{C}_{3,4}$ o bien $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{C}_{4,4}$, entonces $(P, \mathcal{L})$ no tiene representación en segmentos de línea recta.

- Para probar el teorema anterior, se necesitó de lo siguiente:

Definición

La gráfica de incidencia de un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$, denotado por $B(X, \mathcal{F})$, es una gráfica bipartita cuyo conjunto vértices es $V = X \cup \mathcal{F}$, donde dos vértices $x \in X$ y $F \in \mathcal{F}$ son adyacentes si y solo si $x \in F$.

Definición

Un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es *Zykov-planar*, si existe una gráfica planar G (no necesariamente simple) tal que $V(G) = X$ y G puede dibujarse en el plano con las caras bicoloreadas (digamos rojo y azul) de tal forma que existe una biyección entre las caras rojas de G y los subconjuntos de $\mathcal{F}$, de manera que, un punto es incidente a una cara roja si y solo si este punto es incidente al subconjunto correspondiente.

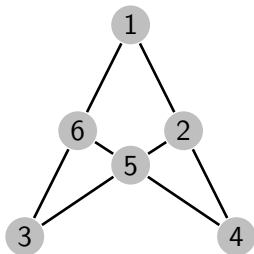
- Cualquier sistema de segmentos es Zykov-planar [7].

Definición

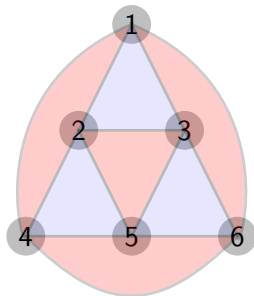
Un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es *Zykov-planar*, si existe una gráfica planar G (no necesariamente simple) tal que $V(G) = X$ y G puede dibujarse en el plano con las caras bicoloreadas (digamos rojo y azul) de tal forma que existe una biyección entre las caras rojas de G y los subconjuntos de $\mathcal{F}$, de manera que, un punto es incidente a una cara roja si y solo si este punto es incidente al subconjunto correspondiente.

- Cualquier sistema de segmentos es Zykov-planar [7].

Ejemplo



(a)



(b)

- En el inciso (a) se muestra una representación del sistema lineal $W = (P_W, \mathcal{L}_W)$ (sistema de segmentos), donde $P_W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\mathcal{L}_W = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$. Por otra parte, en el inciso (b) se muestra una representación Zykov-plana del sistema lineal W .

Resultados

Teorema (T. R. S. Walsh, [12])

Un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es Zykov-planar si y solo si la gráfica de incidencia $B(X, \mathcal{F})$ de $(X, \mathcal{F})$ es planar.

Proposición (Araujo, A. Montejano, L. Montejano, Vázquez, [3])

La gráfica de incidencia $B(\mathcal{C}_{3,4})$ no es una gráfica planar, y por tanto, el sistema lineal $\mathcal{C}_{3,4}$ no tiene representación en segmentos de línea recta.

- Como el sistema lineal $\mathcal{C}_{3,4}$ es un subsistema del sistema lineal de $\mathcal{C}$, entonces:

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L}) \simeq \mathcal{C}_{3,4}$ o bien $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{C}_{4,4}$, entonces $(P, \mathcal{L})$ no tiene representación en segmentos de línea recta.

Resultados

Teorema (T. R. S. Walsh, [12])

Un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es Zykov-planar si y solo si la gráfica de incidencia $B(X, \mathcal{F})$ de $(X, \mathcal{F})$ es planar.

Proposición (Araujo, A. Montejano, L. Montejano, Vázquez, [3])

La gráfica de incidencia $B(\mathcal{C}_{3,4})$ no es una gráfica planar, y por tanto, el sistema lineal $\mathcal{C}_{3,4}$ no tiene representación en segmentos de línea recta.

- Como el sistema lineal $\mathcal{C}_{3,4}$ es un subsistema del sistema lineal de $\mathcal{C}$, entonces:

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L}) \simeq \mathcal{C}_{3,4}$ o bien $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{C}_{4,4}$, entonces $(P, \mathcal{L})$ no tiene representación en segmentos de línea recta.

Resultados

Teorema (T. R. S. Walsh, [12])

Un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es Zykov-planar si y solo si la gráfica de incidencia $B(X, \mathcal{F})$ de $(X, \mathcal{F})$ es planar.

Proposición (Araujo, A. Montejano, L. Montejano, Vázquez, [3])

La gráfica de incidencia $B(\mathcal{C}_{3,4})$ no es una gráfica planar, y por tanto, el sistema lineal $\mathcal{C}_{3,4}$ no tiene representación en segmentos de línea recta.

- Como el sistema lineal $\mathcal{C}_{3,4}$ es un subsistema del sistema lineal de $\mathcal{C}$, entonces:

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L}) \simeq \mathcal{C}_{3,4}$ o bien $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{C}_{4,4}$, entonces $(P, \mathcal{L})$ no tiene representación en segmentos de línea recta.

Resultados

Teorema (T. R. S. Walsh, [12])

Un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es Zykov-planar si y solo si la gráfica de incidencia $B(X, \mathcal{F})$ de $(X, \mathcal{F})$ es planar.

Proposición (Araujo, A. Montejano, L. Montejano, Vázquez, [3])

La gráfica de incidencia $B(\mathcal{C}_{3,4})$ no es una gráfica planar, y por tanto, el sistema lineal $\mathcal{C}_{3,4}$ no tiene representación en segmentos de línea recta.

- Como el sistema lineal $\mathcal{C}_{3,4}$ es un subsistema del sistema lineal de $\mathcal{C}$, entonces:

Teorema (G. Araujo, A. Montejano, L. Montejano, A. Vázquez, [3])

Si $(P, \mathcal{L}) \simeq \mathcal{C}_{3,4}$ o bien $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{C}_{4,4}$, entonces $(P, \mathcal{L})$ no tiene representación en segmentos de línea recta.

Observación

- De los resultados presentados anteriormente, es tentativo conjeturar que todo sistema lineal $(P, \mathcal{L})$, con $|\mathcal{L}| > \nu_2$, satisface $\tau \leq \nu_2$.
- Sin embargo esto no es cierto. Eustis y Verstraëte probaron en [5], utilizando métodos probabilísticos, la existencia de sistemas lineales k -uniformes $(P, \mathcal{L})$, para una infinidad de k 's y $n = |P|$ lo suficientemente grande, cuyo número de transversal es $\tau(P, \mathcal{L}) = n - o(n)$. Este sistema lineal k -uniforme tiene el número de 2-acoplamiento acotado superiormente por $\frac{2n}{k}$, y por tanto $\nu_2(P, \mathcal{L}) < \tau(P, \mathcal{L})$.
- Más aún, no existe $\lambda > 0$ tal que $\tau \leq \lambda \nu_2$.

Observación

- De los resultados presentados anteriormente, es tentativo conjeturar que todo sistema lineal $(P, \mathcal{L})$, con $|\mathcal{L}| > \nu_2$, satisface $\tau \leq \nu_2$.
- Sin embargo esto no es cierto. Eustis y Verstraëte probaron en [5], utilizando métodos probabilísticos, la existencia de sistemas lineales k -uniformes $(P, \mathcal{L})$, para una infinidad de k 's y $n = |P|$ lo suficientemente grande, cuyo número de transversal es $\tau(P, \mathcal{L}) = n - o(n)$. Este sistema lineal k -uniforme tiene el número de 2-acoplamiento acotado superiormente por $\frac{2n}{k}$, y por tanto $\nu_2(P, \mathcal{L}) < \tau(P, \mathcal{L})$.
- Más aún, no existe $\lambda > 0$ tal que $\tau \leq \lambda \nu_2$.

Observación

- De los resultados presentados anteriormente, es tentativo conjeturar que todo sistema lineal $(P, \mathcal{L})$, con $|\mathcal{L}| > \nu_2$, satisface $\tau \leq \nu_2$.
- Sin embargo esto no es cierto. Eustis y Verstraëte probaron en [5], utilizando métodos probabilísticos, la existencia de sistemas lineales k -uniformes $(P, \mathcal{L})$, para una infinidad de k 's y $n = |P|$ lo suficientemente grande, cuyo número de transversal es $\tau(P, \mathcal{L}) = n - o(n)$. Este sistema lineal k -uniforme tiene el número de 2-acoplamiento acotado superiormente por $\frac{2n}{k}$, y por tanto $\nu_2(P, \mathcal{L}) < \tau(P, \mathcal{L})$.
- Más aún, no existe $\lambda > 0$ tal que $\tau \leq \lambda \nu_2$.

Problema

- Estamos interesados en encontrar familias de sistemas lineales que satisfagan $\tau \leq \nu_2$.

Ejemplo

- *Gráficas simples.*
- *Planos proyectivos.*
- *Sistemas lineales con $\Delta = 2$.*
- *Sistemas lineales con $\nu_2 \in \{2, 3, 4\}$.*
- *Sistemas de segmentos con $\nu_2 \in \{2, 3, 4\}$.*

Problema

- Estamos interesados en encontrar familias de sistemas lineales que satisfagan $\tau \leq \nu_2$.

Ejemplo

- *Gráficas simples.*
- *Planos proyectivos.*
- *Sistemas lineales con $\Delta = 2$.*
- *Sistemas lineales con $\nu_2 \in \{2, 3, 4\}$.*
- *Sistemas de segmentos con $\nu_2 \in \{2, 3, 4\}$.*

- Con respecto a sistemas lineales que satisfacen $\tau \leq \nu_2$. En [1] se probó el siguiente resultado:

Teorema (Alfaro, Araujo-Pardo, Rubio-Montiel, Vázquez-Ávila, [1])

Sea $(P, \mathcal{L})$ un sistema lineal con $p, q \in P$ dos puntos tales que $\deg(p) = \Delta$ y $\deg(q) = \max\{\deg(x) : x \in P \setminus \{p\}\}$. Si $|\mathcal{L}| \leq \deg(p) + \deg(q) + \nu_2 - 3$, entonces $\tau \leq \nu_2 - 1$.

- En [1] se mostró una familia infinita de sistemas lineales $(P, \mathcal{L})$ con $|\mathcal{L}| = 2\Delta + \nu_2 - 2$, y tales que $\tau = \nu_2$, para Δ impar.

- Con respecto a sistemas lineales que satisfacen $\tau \leq \nu_2$. En [1] se probó el siguiente resultado:

Teorema (Alfaro, Araujo-Pardo, Rubio-Montiel, Vázquez-Ávila, [1])

Sea $(P, \mathcal{L})$ un sistema lineal con $p, q \in P$ dos puntos tales que $\deg(p) = \Delta$ y $\deg(q) = \max\{\deg(x) : x \in P \setminus \{p\}\}$. Si $|\mathcal{L}| \leq \deg(p) + \deg(q) + \nu_2 - 3$, entonces $\tau \leq \nu_2 - 1$.

- En [1] se mostró una familia infinita de sistemas lineales $(P, \mathcal{L})$ con $|\mathcal{L}| = 2\Delta + \nu_2 - 2$, y tales que $\tau = \nu_2$, para Δ impar.

Resultados

- Con respecto a sistemas lineales que satisfacen $\tau \leq \nu_2$. En [1] se probó el siguiente resultado:

Teorema (Alfaro, Araujo-Pardo, Rubio-Montiel, Vázquez-Ávila, [1])

Sea $(P, \mathcal{L})$ un sistema lineal con $p, q \in P$ dos puntos tales que $\deg(p) = \Delta$ y $\deg(q) = \max\{\deg(x) : x \in P \setminus \{p\}\}$. Si $|\mathcal{L}| \leq \deg(p) + \deg(q) + \nu_2 - 3$, entonces $\tau \leq \nu_2 - 1$.

- En [1] se mostró una familia infinita de sistemas lineales $(P, \mathcal{L})$ con $|\mathcal{L}| = 2\Delta + \nu_2 - 2$, y tales que $\tau = \nu_2$, para Δ impar.

Definición

Sea $(X, \mathcal{F})$ un sistema de conjuntos y $D \subseteq X$. El conjunto D es un *conjunto dominante*, si para todo $x \in X \setminus D$ existe $v \in D$ tal que u y v son adyacentes ($u, v \in F$, para algún $F \in \mathcal{F}$).

- El *número de dominación* de un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$, denotado por $\gamma = \gamma(X, \mathcal{F})$, es la cardinalidad más pequeña entre todos los conjuntos dominantes de $(X, \mathcal{F})$, esto es

$$\gamma = \min\{|D| : D \text{ es un conjunto dominante de } (X, \mathcal{F})\}$$

Definición

Sea $(X, \mathcal{F})$ un sistema de conjuntos y $D \subseteq X$. El conjunto D es un *conjunto dominante*, si para todo $x \in X \setminus D$ existe $v \in D$ tal que u y v son adyacentes ($u, v \in F$, para algún $F \in \mathcal{F}$).

- El *número de dominación* de un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$, denotado por $\gamma = \gamma(X, \mathcal{F})$, es la cardinalidad más pequeña entre todos los conjuntos dominantes de $(X, \mathcal{F})$, esto es

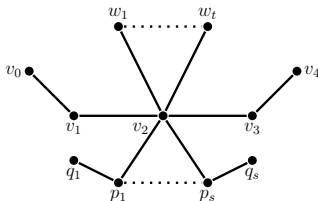
$$\gamma = \min\{|D| : D \text{ es un conjunto dominante de } (X, \mathcal{F})\}$$

Observaciones

Observación

- Es fácil probar que todo sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ satisface $\gamma \leq \tau$.

- En [9] se da una caracterización de gráficas simples y conexas que cumplen $\gamma = \nu_2 - 1$:



Definiciones

Definición

Un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es intersectante, si todo par de elementos $F, H \in \mathcal{F}$, se cumple $F \cap H \neq \emptyset$. En particular, si un sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ es intersectante, entonces $|I \cap I'| = 1$, para todo par de líneas $I, I' \in \mathcal{L}$.

Definición

Denotaremos por $\mathcal{I}_r$ a la familia de sistemas lineales $(P, \mathcal{L})$ de rango r con $\gamma = r - 1$.

Lema (Y. Dong, E. Shan, S. Li, L. Kang, [4])

Para todo sistema lineal $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_r$, existe un subsistema lineal generador r -uniforme $(P^*, \mathcal{L}^*)$ de $(P, \mathcal{L})$, tal que, toda línea en $\mathcal{L}^*$ contiene un punto de grado uno.

Definiciones

Definición

Un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es intersectante, si todo par de elementos $F, H \in \mathcal{F}$, se cumple $F \cap H \neq \emptyset$. En particular, si un sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ es intersectante, entonces $|l \cap l'| = 1$, para todo par de líneas $l, l' \in \mathcal{L}$.

Definición

Denotaremos por $\mathcal{I}_r$ a la familia de sistemas lineales $(P, \mathcal{L})$ de rango r con $\gamma = r - 1$.

Lema (Y. Dong, E. Shan, S. Li, L. Kang, [4])

Para todo sistema lineal $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_r$, existe un subsistema lineal generador r -uniforme $(P^*, \mathcal{L}^*)$ de $(P, \mathcal{L})$, tal que, toda línea en $\mathcal{L}^*$ contiene un punto de grado uno.

Definiciones

Definición

Un sistema de conjuntos $(X, \mathcal{F})$ es intersectante, si todo par de elementos $F, H \in \mathcal{F}$, se cumple $F \cap H \neq \emptyset$. En particular, si un sistema lineal $(P, \mathcal{L})$ es intersectante, entonces $|l \cap l'| = 1$, para todo par de líneas $l, l' \in \mathcal{L}$.

Definición

Denotaremos por $\mathcal{I}_r$ a la familia de sistemas lineales $(P, \mathcal{L})$ de rango r con $\gamma = r - 1$.

Lema (Y. Dong, E. Shan, S. Li, L. Kang, [4])

Para todo sistema lineal $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_r$, existe un subsistema lineal generador r -uniforme $(P^*, \mathcal{L}^*)$ de $(P, \mathcal{L})$, tal que, toda línea en $\mathcal{L}^*$ contiene un punto de grado uno.

Lema (Y. Dong, E. Shan, S. Li, L. Kang, [4])

Para todo sistema lineal $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_r$, existe un subsistema lineal generador r -uniforme $(P^, \mathcal{L}^*)$ de $(P, \mathcal{L})$, tal que, toda línea en $\mathcal{L}^*$ contiene un punto de grado uno.*

- Se denotará por $(P^*, \mathcal{L}^*)$ al sistema lineal intersectante generador y r -uniforme de $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_r$ obtenido del lema anterior.
- Se denotará por $(P', \mathcal{L}')$ al subsistema lineal intersectante y $(r - 1)$ -uniforme obtenido de $(P^*, \mathcal{L}^*)$ al eliminar el punto de grado uno en cada línea de $\mathcal{L}^*$.

Lema (Y. Dong, E. Shan, S. Li, L. Kang, [4])

Para todo sistema lineal $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_r$, existe un subsistema lineal generador r -uniforme $(P^, \mathcal{L}^*)$ de $(P, \mathcal{L})$, tal que, toda línea en $\mathcal{L}^*$ contiene un punto de grado uno.*

- Se denotará por $(P^*, \mathcal{L}^*)$ al sistema lineal intersectante generador y r -uniforme de $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_r$ obtenido del lema anterior.
- Se denotará por $(P', \mathcal{L}')$ al subsistema lineal intersectante y $(r - 1)$ -uniforme obtenido de $(P^*, \mathcal{L}^*)$ al eliminar el punto de grado uno en cada línea de $\mathcal{L}^*$.

Resultados

Lema (Y. Dong, E. Shan, S. Li, L. Kang, [4])

Para todo sistema lineal $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_r$ se satisface

$$\gamma(P, \mathcal{L}) = \gamma(P^*, \mathcal{L}^*) = \tau(P^*, \mathcal{L}^*) = \tau(P', \mathcal{L}') = r - 1.$$

Lema (Y. Dong, E. Shan, S. Li, L. Kang, [4])

Sea $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_r$ ($r \geq 3$), entonces toda línea de $(P', \mathcal{L}')$ tiene a lo más un punto de grado 2 y $\Delta(P', \mathcal{L}') = r - 1$.

Resultados

Lema (Y. Dong, E. Shan, S. Li, L. Kang, [4])

Para todo sistema lineal $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_r$ se satisface

$$\gamma(P, \mathcal{L}) = \gamma(P^*, \mathcal{L}^*) = \tau(P^*, \mathcal{L}^*) = \tau(P', \mathcal{L}') = r - 1.$$

Lema (Y. Dong, E. Shan, S. Li, L. Kang, [4])

Sea $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_r$ ($r \geq 3$), entonces toda línea de $(P', \mathcal{L}')$ tiene a lo más un punto de grado 2 y $\Delta(P', \mathcal{L}') = r - 1$.

Lema (Y. Dong, E. Shan, S. Li, L. Kang, [4])

Sea $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_r$, con $r \geq 3$, entonces

$$3(r-2) \leq |\mathcal{L}'| \leq (r-1)^2 - (r-1) + 1 \text{ y } |P'| = (r-1)^2 - (r-1) + 1,$$

y por tanto $\gamma(P', \mathcal{L}') = 1$.

Resultados

Lema (A. Vázquez-Ávila, [10])

Sea $(P, \mathcal{L})$ un sistema lineal intersectante y r -uniforme con $r \geq 2$ un entero par. Si $\nu_2(P, \mathcal{L}) = r + 1$, entonces $\tau(P, \mathcal{L}) = \frac{r+2}{2}$.

Lema (A. Vázquez-Ávila, [10])

Sea $r \geq 2$ un entero par. Para todo $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_{r+2}$ se satisface $\nu_2(P', \mathcal{L}') = r + 2$. Por lo tanto $\tau(P', \mathcal{L}') = \nu_2(P', \mathcal{L}') - 1$.

Resultados

Lema (A. Vázquez-Ávila, [10])

Sea $(P, \mathcal{L})$ un sistema lineal intersectante y r -uniforme con $r \geq 2$ un entero par. Si $\nu_2(P, \mathcal{L}) = r + 1$, entonces $\tau(P, \mathcal{L}) = \frac{r+2}{2}$.

Lema (A. Vázquez-Ávila, [10])

Sea $r \geq 2$ un entero par. Para todo $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_{r+2}$ se satisface $\nu_2(P', \mathcal{L}') = r + 2$. Por lo tanto $\tau(P', \mathcal{L}') = \nu_2(P', \mathcal{L}') - 1$.

Resultados

Teorema (A. Vázquez-Ávila, [10])

Sea q potencia de primo par. Para todo $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_{q+2}$ el sistema lineal $(P', \mathcal{L}')$ es un subsistema generador intersectante y $(q+1)$ -uniforme de Π_q , tal que $\tau(P', \mathcal{L}') = \nu_2(P', \mathcal{L}') - 1 = q + 1$ con $|\mathcal{L}'| \geq 3q$.

Corolario (A. Vázquez-Ávila, [10])

Si $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_4$, entonces $(P', \mathcal{L}')$ es el plano proyectivo de orden 2, Π_2 , o bien $(P', \mathcal{L}')$ se obtiene de Π_2 al borrar cualquier línea.

- El corolario anterior es el resultado principal de [4].

Resultados

Teorema (A. Vázquez-Ávila, [10])

Sea q potencia de primo par. Para todo $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_{q+2}$ el sistema lineal $(P', \mathcal{L}')$ es un subsistema generador intersectante y $(q+1)$ -uniforme de Π_q , tal que $\tau(P', \mathcal{L}') = \nu_2(P', \mathcal{L}') - 1 = q + 1$ con $|\mathcal{L}'| \geq 3q$.

Corolario (A. Vázquez-Ávila, [10])

Si $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_4$, entonces $(P', \mathcal{L}')$ es el plano proyectivo de orden 2, Π_2 , o bien $(P', \mathcal{L}')$ se obtiene de Π_2 al borrar cualquier línea.

- El corolario anterior es el resultado principal de [4].

Resultados

Teorema (A. Vázquez-Ávila, [10])

Sea q potencia de primo par. Para todo $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_{q+2}$ el sistema lineal $(P', \mathcal{L}')$ es un subsistema generador intersectante y $(q+1)$ -uniforme de Π_q , tal que $\tau(P', \mathcal{L}') = \nu_2(P', \mathcal{L}') - 1 = q + 1$ con $|\mathcal{L}'| \geq 3q$.

Corolario (A. Vázquez-Ávila, [10])

Si $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_4$, entonces $(P', \mathcal{L}')$ es el plano proyectivo de orden 2, Π_2 , o bien $(P', \mathcal{L}')$ se obtiene de Π_2 al borrar cualquier línea.

- El corolario anterior es el resultado principal de [4].

Lema (A. Vázquez-Ávila, [11])

Sea $r \geq 2$ un entero impar. Para todo $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_{r+2}$ se satisface $\tau(P', \mathcal{L}') = \nu_2(P', \mathcal{L}') = r + 1$.

Teorema (A. Vázquez-Ávila, [11])

Sea q una potencia de primo impar. Para todo $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_{q+2}$, el sistema lineal $(P', \mathcal{L}')$ es un subsistema lineal generador y $(q + 1)$ -uniforme de Π_q tal que $\tau(P', \mathcal{L}') = \nu_2(P', \mathcal{L}') = q + 1$ con $|\mathcal{L}'| \geq 3q + 1$.

Lema (A. Vázquez-Ávila, [11])

Sea $r \geq 2$ un entero impar. Para todo $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_{r+2}$ se satisface $\tau(P', \mathcal{L}') = \nu_2(P', \mathcal{L}') = r + 1$.

Teorema (A. Vázquez-Ávila, [11])

Sea q una potencia de primo impar. Para todo $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_{q+2}$, el sistema lineal $(P', \mathcal{L}')$ es un subsistema lineal generador y $(q + 1)$ -uniforme de Π_q tal que $\tau(P', \mathcal{L}') = \nu_2(P', \mathcal{L}') = q + 1$ con $|\mathcal{L}'| \geq 3q + 1$.

Lema (A. Vázquez-Ávila, [11])

Sea $r \geq 2$ un entero impar. Para todo $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_{r+2}$ se satisface $\tau(P', \mathcal{L}') = \nu_2(P', \mathcal{L}') = r + 1$.

Teorema (A. Vázquez-Ávila, [11])

Sea q una potencia de primo impar. Para todo $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_{q+2}$, el sistema lineal $(P', \mathcal{L}')$ es un subsistema lineal generador y $(q + 1)$ -uniforme de Π_q tal que $\tau(P', \mathcal{L}') = \nu_2(P', \mathcal{L}') = q + 1$ con $|\mathcal{L}'| \geq 3q + 1$.

Lema (A. Vázquez-Ávila, [11])

Sea $r \geq 2$ un entero impar. Para todo $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_{r+2}$ se satisface $\tau(P', \mathcal{L}') = \nu_2(P', \mathcal{L}') = r + 1$.

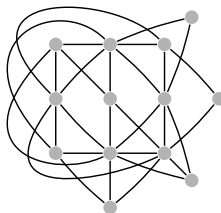
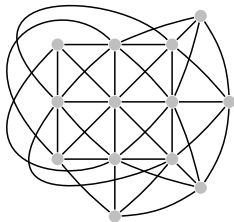
Teorema (A. Vázquez-Ávila, [11])

Sea q una potencia de primo impar. Para todo $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_{q+2}$, el sistema lineal $(P', \mathcal{L}')$ es un subsistema lineal generador y $(q + 1)$ -uniforme de Π_q tal que $\tau(P', \mathcal{L}') = \nu_2(P', \mathcal{L}') = q + 1$ con $|\mathcal{L}'| \geq 3q + 1$.

Resultados

Corolario (A. Vázquez-Ávila, [11])

Si $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_5$ se satisface $\tau(P', \mathcal{L}') = \nu_2(P', \mathcal{L}') = 4$. Más aún, el sistema lineal $(P', \mathcal{L}')$ se obtiene a partir de Π_3 al borrar a lo más tres líneas no incidentes a un mismo punto en Π_3 .

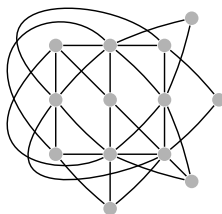
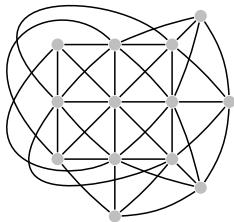


- El corolario anterior es el resultado principal de [6], y se obtuvo de manera independiente.

Resultados

Corolario (A. Vázquez-Ávila, [11])

Si $(P, \mathcal{L}) \in \mathcal{I}_5$ se satisface $\tau(P', \mathcal{L}') = \nu_2(P', \mathcal{L}') = 4$. Más aún, el sistema lineal $(P', \mathcal{L}')$ se obtiene a partir de Π_3 al borrar a lo más tres líneas no incidentes a un mismo punto en Π_3 .



- El corolario anterior es el resultado principal de [6], y se obtuvo de manera independiente.

¡Muchas gracias!

References



C. Alfaro, G. Araujo-Pardo, C. Rubio-Montiel and A. Vázquez-Ávila, *On transversal and 2-packing number in uniform linear systems*, Submitted.



C. Alfaro, C. Rubio-Montiel and A. Vázquez-Ávila, *Covering and 2-packing number in graphs*, Submitted.



G. Araujo-Pardo, A. Montejano, L. Montejano and A. Vázquez-Ávila, *On transversal and 2-packing numbers in straight line systems on $\mathbb{R}^2$* , Util. Math. **105** (2017), 317–336.



Y. Dong, E. Shan, S. Li and L. Kang, *Domination in intersecting hypergraphs*, Discrete Appl. Math. (2018).



A. Eustis and J. Verstraëte, *On the independence number of Steiner systems*, Combin. Probab. Comput. **22** (2013), no. 2, 241–252.



S. Li, L. Kang, E. Shan and Y. Dong, *The finite projective plane and the 5-Uniform linear intersecting hypergraphs with domination number four*, Graphs and **34** Combinatorics (2018) , no. 5, 931–945.



M. Kaufmann, M. Kreveld and B. Speckmann, *Graph Drawin Subdivision Drawings of Hypergraphs*, In: GD 2008. LNCS, vol. 5417, pp. 396–407. Springer, Heidelberg (2008).



A. Vázquez-Ávila, *Dos temas en sistemas lineales: la conjetura Erdős–Faber–Lovász y transversales*, Tesis de Doctorado (2015).



A. Vázquez-Ávila, *Domination and 2-packing number in graphs*, Submitted.



A. Vázquez-Ávila, *A note on domination in intersecting linear systems*, Appl. Math. E-Notes. Accepted



A. Vázquez-Ávila, *On domination and 2-packing numbers in intersecting linear systems*, Ars Comb. Accepted



T. R. S. Walsh, *Hypermaps versus bipartite maps*, J. Combinatorial Theory Ser. B **18** (1975), 155–163.