Universidad Autónoma de Zacatecas
Unidad Académica de Matemáticas

Sobre la familia de gráficas con aristas 2-excepcionales

Jesús Leaños

(con Drago Bokal, Maribor University)

Seminario de la Lic. en Matemática Educativa de la UASLP

Noviembre de 2018

Contenido

Conceptos Básicos

Un dibujo de una gráfica

Un *dibujo* de una gráfica G (en el plano) consta de un conjunto de puntos, uno por cada vértice de G, y una colección de arcos abiertos simples, uno por cada arista de la gráfica, tal que si e es una arista de G con extremos u y v, entonces la cerradura topológica del arco α que representa a e consiste de α y los dos puntos que representan a u y v.

Un dibujo de una gráfica

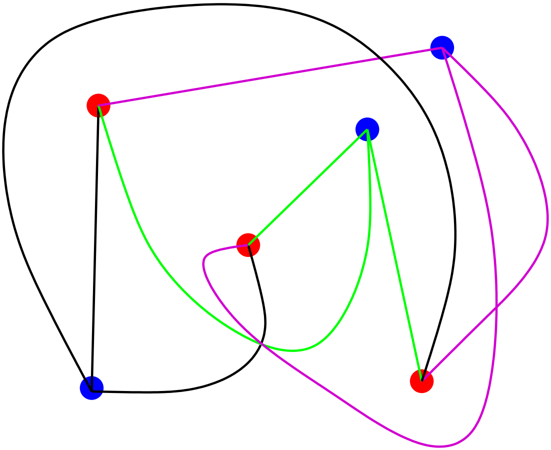


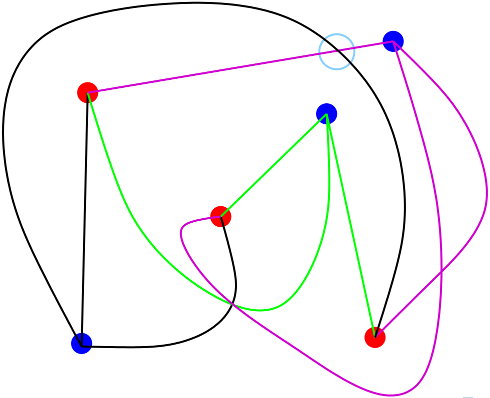
Figura: Un dibujo de $K_{3,3}$

Un dibujo de una gráfica

Dos aristas se *cruzan en un dibujo* en cierto punto, o el punto es un punto de cruce de las aristas, si dicho punto pertenece al interior de los arcos que representan las aristas

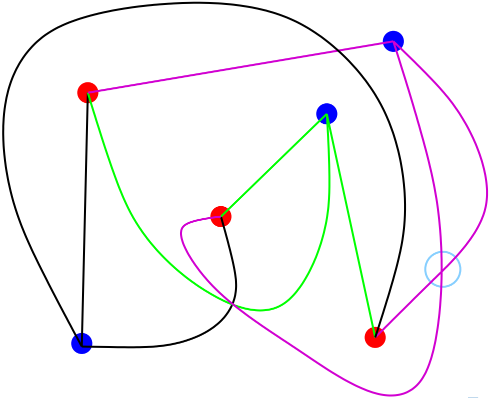
Un dibujo de una gráfica

Dos aristas se *cruzan en un dibujo* en cierto punto, o el punto es un punto de cruce de las aristas, si dicho punto pertenece al interior de los arcos que representan las aristas



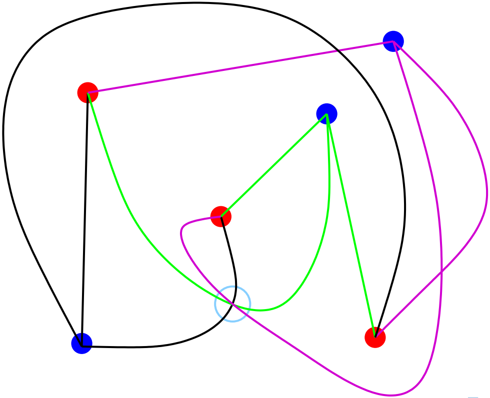
Un dibujo de una gráfica

Dos aristas se *cruzan en un dibujo* en cierto punto, o el punto es un punto de cruce de las aristas, si dicho punto pertenece al interior de los arcos que representan las aristas



Un dibujo de una gráfica

Dos aristas se *cruzan en un dibujo* en cierto punto, o el punto es un punto de cruce de las aristas, si dicho punto pertenece al interior de los arcos que representan las aristas



Dibujos *buenos*

Decimos que un dibujo es *bueno* si:

Dibujos *buenos*

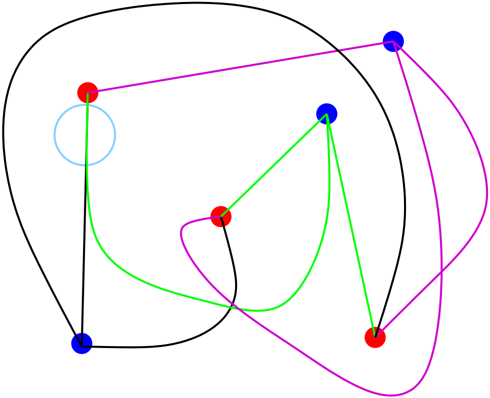
Decimos que un dibujo es *bueno* si:

i) Dos arcos tienen un número finito de puntos en común

Dibujos *buenos*

Decimos que un dibujo es *bueno* si:

i) Dos arcos tienen un número finito de puntos en común



Dibujos *buenos*

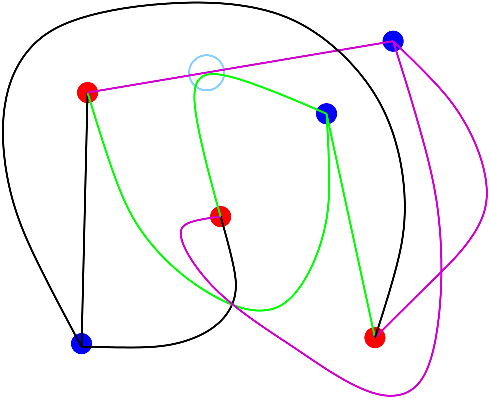
Decimos que un dibujo es *bueno* si:

ii) No hay dos arcos con un punto tangencial

Dibujos *buenos*

Decimos que un dibujo es *bueno* si:

ii) No hay dos arcos con un punto tangencial



Dibujos *buenos*

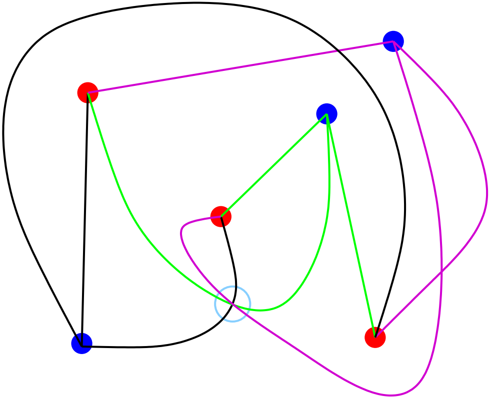
Decimos que un dibujo es *bueno* si:

iii) Cualesquiera tres arcos no tienen un punto en común

Dibujos *buenos*

Decimos que un dibujo es *bueno* si:

iii) Cualesquiera tres arcos no tienen un punto en común



Número de cruce

El número de cruce $\mathrm{cr}(\mathcal{D})$ en un dibujo bueno $\mathcal{D}$ es la suma de los cruces.

Número de cruce

El número de cruce $\mathrm{cr}(\mathcal{D})$ en un dibujo bueno $\mathcal{D}$ es la suma de los cruces.

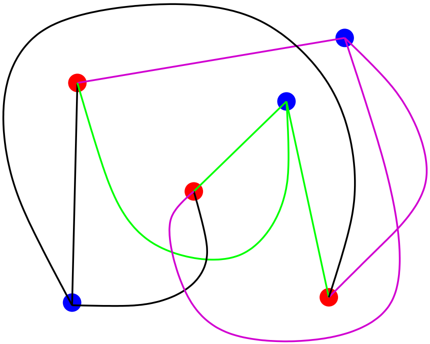
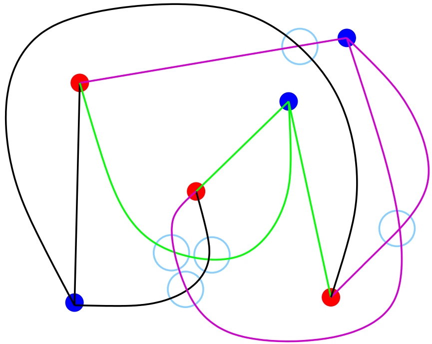


Figura: Dibujo *bueno* $\mathcal{D}$ de $K_{3,3}$

Número de cruce

El número de cruce $\mathrm{cr}(\mathcal{D})$ en un dibujo bueno $\mathcal{D}$ es la suma de los cruces.



$$\mathrm{cr}(\mathcal{D}) = 5$$

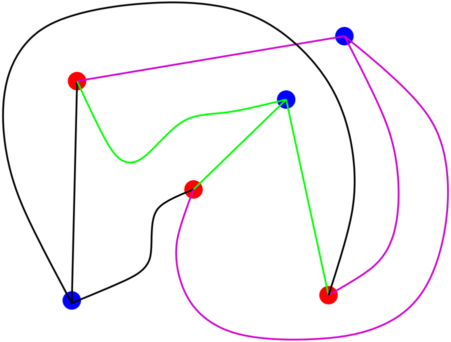
Figura: Dibujo *bueno* $\mathcal{D}$ de $K_{3,3}$

Número de cruce

El número de cruce $\mathrm{cr}(G)$ de una gráfica G es el mínimo de $\mathrm{cr}(\mathcal{D})$ sobre todos los dibujos $\mathcal{D}$ de G.

Número de cruce

El número de cruce $\mathrm{cr}(G)$ de una gráfica G es el mínimo de $\mathrm{cr}(\mathcal{D})$ sobre todos los dibujos $\mathcal{D}$ de G.



$$\mathrm{cr}(K_{3,3}) = 1$$

Figura: Dibujo *bueno* $\mathcal{D}$ de $K_{3,3}$

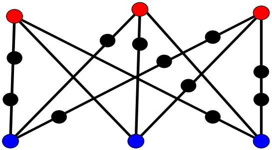
Número de cruce

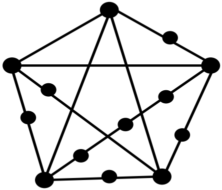
El número de cruce $\mathrm{cr}(G)$ de una gráfica G es el mínimo de $\mathrm{cr}(\mathcal{D})$ sobre todos los dibujos $\mathcal{D}$ de G.

Problema:

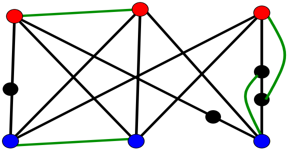
Determinar el número de cruce de una gráfica G.

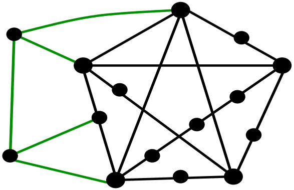
Gráficas de Kuratowski



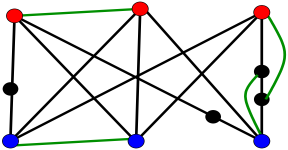


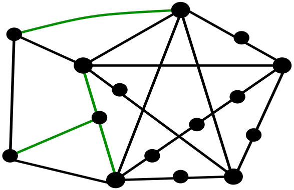
Aristas de Kuratowski





Aristas de Kuratowski





Aristas de Kuratowski

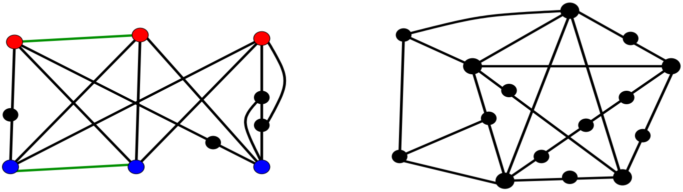


Figura: Únicamente las aristas verdes no son aristas de Kuratowski

Aristas k-críticas en cruces

Sea k un entero positivo, G una gráfica y e una arista de G.

Diremos que e es k-crítica en cruces si $\mathrm{cr}(G) \geq k > \mathrm{cr}(G - e)$.

Aristas k-críticas en cruces

Sea k un entero positivo, G una gráfica y e una arista de G.

Diremos que e es k-crítica en cruces si $\mathrm{cr}(G) \geq k > \mathrm{cr}(G - e)$.

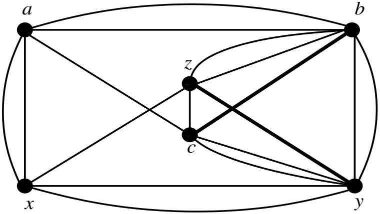


Figura: Aquí cada arista es 2-crítica en cruces.

Aristas k-excepcionales

Sea k un entero positivo, G una gráfica y e una arista de G.

Diremos que e es una aristas k-excepcional de G, si

- e es k-crítica, y
- e no está en ninguna subgráfica de Kuratowski de G.

Aristas k-excepcionales

Sea k un entero positivo, G una gráfica y e una arista de G.

Diremos que e es una aristas k-excepcional de G, si

- e es k-crítica, y
- e no está en ninguna subgráfica de Kuratowski de G.

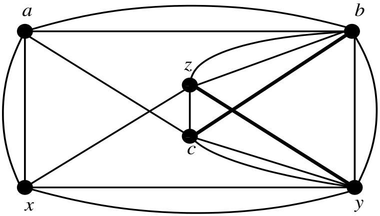


Figura: Aquí las dos aristas gruesas son 2-excepcionales.

El problema de interés

Nuestro problema

Caracterizar a la familia de gráficas que tienen aristas 2-excepcionales.

Algunos antecedentes...

Algunos antecedentes...

- En 1932 Kuratowski demostró que una gráfica es planar si y sólo si no contiene subgráficas de Kuratowski.

Algunos antecedentes...

- En 1932 Kuratowski demostró que una gráfica es planar si y sólo si no contiene subgráficas de Kuratowski.

Algunos antecedentes...

- En 1932 Kuratowski demostró que una gráfica es planar si y sólo si no contiene subgráficas de Kuratowski.
- En 1954 Dirac y Schuster demostraron que la familia de gráficas conteniendo aristas 1-excepcionales es vacía.

Algunos antecedentes...

- En 1932 Kuratowski demostró que una gráfica es planar si y sólo si no contiene subgráficas de Kuratowski.
- En 1954 Dirac y Schuster demostraron que la familia de gráficas conteniendo aristas 1-excepcionales es vacía.

Algunos antecedentes...

- En 1932 Kuratowski demostró que una gráfica es planar si y sólo si no contiene subgráficas de Kuratowski.
- En 1954 Dirac y Schuster demostraron que la familia de gráficas conteniendo aristas 1-excepcionales es vacía.

  Široň, 1984:

Algunos antecedentes...

- En 1932 Kuratowski demostró que una gráfica es planar si y sólo si no contiene subgráficas de Kuratowski.
- En 1954 Dirac y Schuster demostraron que la familia de gráficas conteniendo aristas 1-excepcionales es vacía.

Širáň, 1984:

- Si G es una gráfica 4-conexa, entonces no tiene aristas 2-excepcionales.

Algunos antecedentes...

- En 1932 Kuratowski demostró que una gráfica es planar si y sólo si no contiene subgráficas de Kuratowski.
- En 1954 Dirac y Schuster demostraron que la familia de gráficas conteniendo aristas 1-excepcionales es vacía.

Širáň, 1984:

- Si G es una gráfica 4-conexa, entonces no tiene aristas 2-excepcionales.

Algunos antecedentes...

- En 1932 Kuratowski demostró que una gráfica es planar si y sólo si no contiene subgráficas de Kuratowski.
- En 1954 Dirac y Schuster demostraron que la familia de gráficas conteniendo aristas 1-excepcionales es vacía.

Širáň, 1984:

- Si G es una gráfica 4-conexa, entonces no tiene aristas 2-excepcionales.
- Si G es 3-conexa, entonces puede tener a lo más 4 aristas 2-excepcionales.

Algunos antecedentes...

- En 1932 Kuratowski demostró que una gráfica es planar si y sólo si no contiene subgráficas de Kuratowski.
- En 1954 Dirac y Schuster demostraron que la familia de gráficas conteniendo aristas 1-excepcionales es vacía.

Širáň, 1984:

- Si G es una gráfica 4-conexa, entonces no tiene aristas 2-excepcionales.
- Si G es 3-conexa, entonces puede tener a lo más 4 aristas 2-excepcionales.

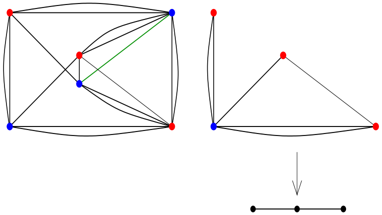
Algunos antecedentes...

- En 1932 Kuratowski demostró que una gráfica es planar si y sólo si no contiene subgráficas de Kuratowski.
- En 1954 Dirac y Schuster demostraron que la familia de gráficas conteniendo aristas 1-excepcionales es vacía.

Široň, 1984:

- Si G es una gráfica 4-conexa, entonces no tiene aristas 2-excepcionales.
- Si G es 3-conexa, entonces puede tener a lo más 4 aristas 2-excepcionales.
- Si G es 3-conexa y e es una arista con extremos a, b tal que el árbol de cortes-bloques de $G - \{b, c\}$ tiene más de 3 vértices entonces e no puede ser 2-excepcional.

El árbol de cortes-bloques de $G - \{b, c\}$



Ideas de la demostración...

Aristas 2-excepcionales...

Proposición 1 (D. Bokal, J. L. 2016)

Si G es una gráfica 2-conexa y contiene una subdivisión de K_5 como subgráfica, entonces cada arista de G es una arista de Kuratowski.

Aristas 2-excepcionales...

Proposición 1 (D. Bokal, J. L. 2016)

Si G es una gráfica 2-conexa y contiene una subdivisión de K_5 como subgráfica, entonces cada arista de G es una arista de Kuratowski.

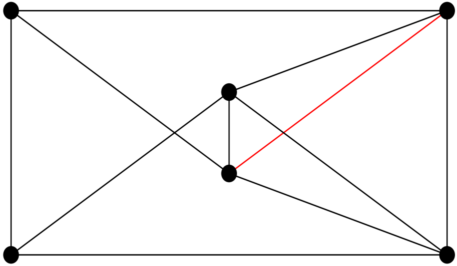
Corolario 2 (D. Bokal, J. L. 2016)

Si G es una gráfica 2-conexa y tiene al menos una arista 2-excepcional, entonces $K_{3,3}$ es subdivisión de G, y cada subgráfica de Kuratowski en G una subdivisión de $K_{3,3}$.

Aristas 2-excepcionales...

Proposición 3 (D. Bokal, J. L. 2016)

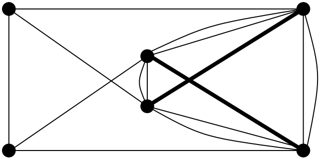
Si G es una gráfica 3-conexa y tiene al menos una arista 2-excepcional, entonces tiene una subdivisión del siguiente esqueleto.



Aristas 2-excepcionales...

Proposición 4 (D. Bokal, J. L. 2016)

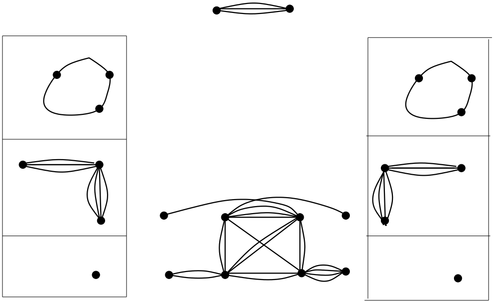
Si G es una gráfica 3-conexa y tiene al menos una arista 2-excepcional, entonces tiene una subdivisión del siguiente esqueleto.



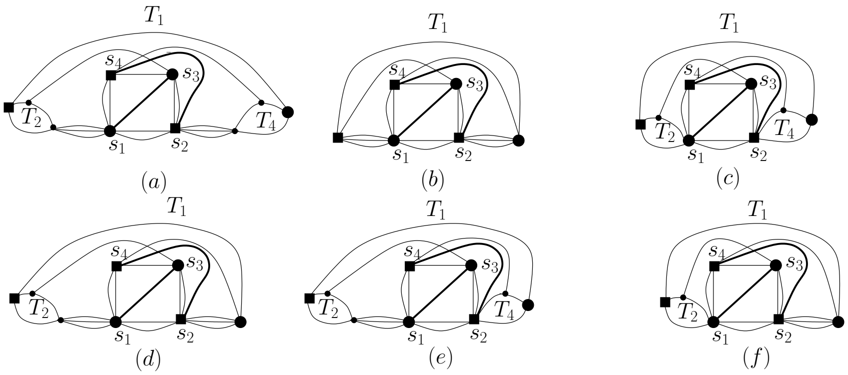
Caracterización de la familia de interés...

Teorema Principal (D. Bokal, J. L. 2016)

Sea G una gráfica 3-conexa. Entonces G contiene aristas 2-excepcionales sí y sólo sí G es la ciclización de las siguientes clases de gráficas.



Caracterización de la familia de interés...



Comentarios finales...

- Si una gráfica tiene aristas 2-excepcionales, entonces tiene exactamente 2 de ellas.

Comentarios finales...

- Si una gráfica tiene aristas 2-excepcionales, entonces tiene exactamente 2 de ellas.

Comentarios finales...

- Si una gráfica tiene aristas 2-excepcionales, entonces tiene exactamente 2 de ellas.
- La caracterización presentada es puramente combinatoria.

Comentarios finales...

- Si una gráfica tiene aristas 2-excepcionales, entonces tiene exactamente 2 de ellas.
- La caracterización presentada es puramente combinatoria.

Comentarios finales...

- Si una gráfica tiene aristas 2-excepcionales, entonces tiene exactamente 2 de ellas.
- La caracterización presentada es puramente combinatoria.
- Una aplicación del teorema principal es la caracterización de la familia de gráficas (independientemente de la conexidad) que tienen aristas 2-excepcionales.

Comentarios finales...

- Si una gráfica tiene aristas 2-excepcionales, entonces tiene exactamente 2 de ellas.
- La caracterización presentada es puramente combinatoria.
- Una aplicación del teorema principal es la caracterización de la familia de gráficas (independientemente de la conexidad) que tienen aristas 2-excepcionales.

Comentarios finales...

- Si una gráfica tiene aristas 2-excepcionales, entonces tiene exactamente 2 de ellas.
- La caracterización presentada es puramente combinatoria.
- Una aplicación del teorema principal es la caracterización de la familia de gráficas (independientemente de la conexidad) que tienen aristas 2-excepcionales.
- El teorema principal resuelve el último caso que quedaba pendiente para el problema de las aristas 2-excepcionales.

Comentarios finales...

- Si una gráfica tiene aristas 2-excepcionales, entonces tiene exactamente 2 de ellas.
- La caracterización presentada es puramente combinatoria.
- Una aplicación del teorema principal es la caracterización de la familia de gráficas (independientemente de la conexidad) que tienen aristas 2-excepcionales.
- El teorema principal resuelve el último caso que quedaba pendiente para el problema de las aristas 2-excepcionales.

Comentarios finales...

- Si una gráfica tiene aristas 2-excepcionales, entonces tiene exactamente 2 de ellas.
- La caracterización presentada es puramente combinatoria.
- Una aplicación del teorema principal es la caracterización de la familia de gráficas (independientemente de la conexidad) que tienen aristas 2-excepcionales.
- El teorema principal resuelve el último caso que quedaba pendiente para el problema de las aristas 2-excepcionales.
- Se sabe nada sobre las gráficas que tienen aristas k-excepcionales para el caso en que $k \geq 3$.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN !