GEOMETRÍA DE VARIEDADES DIFERENCIALES

JOSÉ A. VALLEJO

Resumen. Temario para un curso de posgrado. Dependiendo de la base de los asistentes, algunos tópicos pueden omitirse o tratarse de una manera más breve.

Temario

Repaso de topología. Aplicaciones inducidas en un cociente. Descomposición canónica de una aplicación. Topología cociente. Identificaciones topológicas.

Repaso de cálculo diferencial. Aplicaciones diferenciables de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Regla de la cadena. Toremas de la función inversa e implícita. Teorema del rango constante.

Variedades diferenciales. Estructuras diferenciales en espacios topológicos. Variedades. Ejemplos: variedades abiertas, esferas S^n, variedades producto: toros, la cinta de Möbius, superficies parametrizadas regulares en $\mathbb{R}^3$.

Aplicaciones diferenciables. Expresión local de una aplicación entre variedades. Aplicaciones $f : M \to N$ diferenciables. Rango de una aplicación. Teorema del rango constante en variedades.

Inmersiones y subvariedades. Inmersiones, subvariedades y subvariedades regulares (embebimientos o encajes). Propiedad de $k-$subvariedad de un subconjunto. Teorema de la función implícita en variedades. Propiedades de las subvariedades regulares. Factorización a través de una inmersión.

Submersiones. Definición. Factorización a través de una submersión. Secciones. Fibras: teorema de la fibra.

Variedades cociente. Relaciones binarias de equivalencia regulares. Variedad cociente . Unicidad de la estructura diferencial. La topología de variedad en $M/\sim$. Variedades cociente inducidas por aplicaciones. Los espacios proyectivos $\mathbb{R}P^n$.

Grupos topológicos. Definición y primeras propiedades. Grupos topológicos conexos. Componentes conexas.

Grupos de Lie. Definición y primeras propiedades. Traslaciones en un grupo de Lie. Propiedades topológicas. Subgrupos de Lie. Versión débil del Teorema de E. Cartan.

Los grupos de Lie clásicos. Automorfismos de espacios vectoriales normados. Her all-embracing majesty: $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. El grupo especial lineal $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. El grupo ortogonal $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. El grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$. El grupo simpléctico $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$. El isomorfismo $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{K}) \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$. El grupo ortogonal $\mathrm{O}(p,q)$.

La descomposición de Iwasawa-Cartan. El teorema de Iwasawa-Cartan. Exponencial y logaritmo de matrices. Aplicación al estudio de la topología de los grupos de Lie clásicos.

Orientabilidad. Orientación en cartas. Variedades orientables. Las dos orientaciones de una variedad orientable conexa. Orientabilidad y difeomorfismos. Ejemplos. Campos normales en superficies parametrizadas regulares de $\mathbb{R}^3$ y orientabilidad.

Espacio tangente a una variedad. Motivación. Derivaciones puntuales. El espacio T_pM. La estructura del espacio de derivaciones $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^{\infty}_M, p)$. El isomorfismo $\varphi_* : \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^{\infty}_{\mathbb{R}^n}, p) \simeq \mathbb{R}^n$. Bases coordenadas en T_pM. Cambios de base. Interpretación geométrica.

El espacio cotangente. El espacio T^*_pM y $1-$formas. Diferencial de una función $f : M \to \mathbb{R}$ en un punto. Expresión local de las $1-$formas. Cambios de base.

Las variedades TM y T^*M. Estructura diferencial y cartas en TM. Estructura diferencial y cartas en T^*M. Diferenciabilidad de las proyecciones canónicas.

Diferencial de una aplicación entre variedades. La diferencial $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$. Interpretación geométrica y diferenciabilidad de $f_* : TM \to TN$: expresión local de la diferencial. Regla de la cadena. Retroacción (pull-back) de $1-$formas. El teorema de la función inversa. Diferencial de una aplicación y rango. Ejemplos: aplicación tangente a una curva, diferencial de una función real.

El espacio tangente a una subvariedad. Dificultades en la interpretación del espacio tangente a una subvariedad. El espacio tangente a una subvariedad regular. Interpretación geométrica.

Dependencia funcional. Familias de funciones independientes en un punto de una variedad. Obtención de funciones coordenadas. Cartas inducidas por una aplicación diferenciable $f : M \to N$.

Campos vectoriales. Campos vectoriales como secciones de la submersión $\pi : TM \to M$. Expresión coordenada. El isomorfismo $\mathcal{X}(M) \simeq \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^{\infty}_M)$. El corchete de Lie en $\mathcal{X}(M)$: expresión local y propiedades. Campos vectoriales a lo largo de una aplicación. Campos $f-$relacionados.

Curvas integrales y flujos. Campos vectoriales y sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden en variedades. Curvas integrales de un campo vectorial. Flujo de un campo y grupos locales uniparamétricos. Derivada de Lie respecto de un campo vectorial. Propiedades del flujo. Generador de un grupo uniparamétrico.

Formas diferenciales. Repaso de álgebra multilineal. $1-$formas diferenciales y producto exterior. Diferencial exterior. El álgebra $\Omega(M)$. Formas valuadas vectoriales $\Omega(M; E)$. Derivaciones en el álgebra exterior: inserción y derivada de Lie. Relación entre la derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ y el flujo de X. Complejo de cohomología. Cohomología de De Rham. El teorema de Stokes.

Geometría Riemanniana. Tensores en una variedad. El álgebra tensorial $\mathcal{T}^\bullet(M)$. Tensor métrico. Codiferencial. Conexiones de Koszul. Curvatura y torsión. La conexión de Levi-Civitá. El transporte paralelo. Geodésicas en una variedad Riemanniana. Propiedades minimizantes. La aplicación exponencial. Cut locus y conjugate locus. Entornos convexos. Teorema de Hopf-Rinow. Variedades de Lorentz y espacios-tiempo: introducción a la Relatividad General.

Geometría simpléctica. Espacios vectoriales simplécticos. Variedades simplécticas. Álgebras y variedades de Poisson. Campos Hamiltonianos y localmente Hamiltonianos. El bivector de Poisson. La foliación simpléctica de una variedad de Poisson. Cohomología foliada. Forma simpléctica canónica en variedades cotangentes y ecuaciones de Hamilton. Introducción a la Mecánica Clásica.

Referencias

[AMR 88] R. Abraham, J. Marsden, T. Ratiu: Manifolds, Tensor Analysis, and Applications. Springer-Verlag (1988).

[BG 88] M. Berger, B. Gostiaux: Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces. Springer-Verlag (1988).

[Bo 02] W. Boothby: *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry.* 2nd ed. Academic Press (1992).

[Che 99] C. Chevalley: *Theory of Lie groups* (PMS-8), Volume 1. Princeton University Press (1999).

[Hall 03] B. C. Hall: *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction.* Springer-Verlag (2003).

[Tu 07] L. W. Tu: *An introduction to manifolds.* Springer-Verlag (2007).

[Va 14] J. A. Vallejo: *NOtas para un curso de geometría de variedades.* UASLP (2014).

[Wa 71] F. Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Scott, Foresman & Co. (1971).

Facultad de Ciencias. Universidad Autónoma de San Luis Potosí. Lat. Av. Salvador Nava s/n. Colonia Lomas. CP 78290 SAn Luis Potosí (SLP) México

E-mail address: jvallejo@fc.uaslp.mx